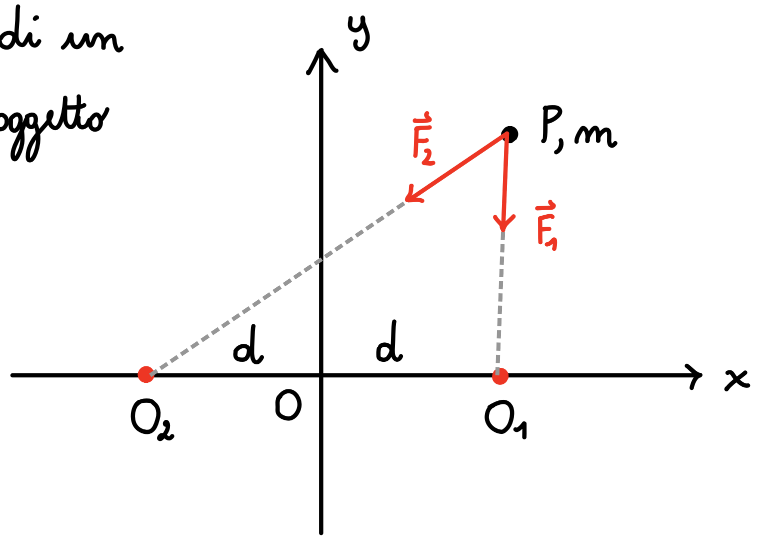
Esercizio (13 settembre 2016)

Consideriamo il moto di un punto P di massa m soggetto ad un campo di forze generato da due centri fissi O_1, O_2



$$|O_1 - O_2| = 2d$$

il moto avviene sul piano Oxy

Sul punto P agiscono le due forze

$$\vec{F}_1(x,y) = -\frac{(x-d,\, y)}{\left[(x-d)^2 + y^2\right]^{3/2}}$$

$$\vec{F}_2(x,y) = -\frac{(x+d,\, y)}{\left[(x+d)^2 + y^2\right]^{3/2}}$$

Mostrare che le coordinate ellittiche (ξ, η)

$$\begin{cases} x = d \cosh \xi \cos \eta \\ y = d \operatorname{senh} \xi \operatorname{sen} \eta \end{cases}$$

sono variabili separabili per l'eq. di Hamilton-Jacobi relativa a questo sistema meccanico.

Sol.

Vogliamo scrivere la funzione hamiltoniana e per questo troviamo prima le espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = d\,(\operatorname{senh}\xi \cos\eta)\,\dot{\xi} - d\,(\cosh\xi \operatorname{sen}\eta)\,\dot{\eta} \\ \dot{y} = d\,(\cosh\xi \operatorname{sen}\eta)\,\dot{\xi} + d\,(\operatorname{senh}\xi \cos\eta)\,\dot{\eta} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = d^2 \left(\operatorname{senh}^2\xi \cos^2\eta + \cosh^2\xi \overbrace{\operatorname{sen}^2\eta}^{= 1 - \cos^2\eta} \right) \dot{\xi}^2 + d^2 \left(\cosh^2\xi \underbrace{\operatorname{sen}^2\eta}_{= 1 - \cos^2\eta} + \operatorname{senh}^2\xi \cos^2\eta \right) \dot{\eta}^2$$

$$= d^2 \left(\cosh^2\xi - \cos^2\eta \right) \dot{\xi}^2 + d^2 \left(\cosh^2\xi - \cos^2\eta \right) \dot{\eta}^2$$

$$T(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} m d^2 \left(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 \right) \left(\cosh^2\xi - \cos^2\eta \right)$$

Occupiamoci dell'energia potenziale

$$V(x,y) = V_1(x,y) + V_2(x,y)$$

dove V_1 e V_2 sono due funzioni tali che

$$\nabla V_1 = -\vec{F}_1 \qquad \nabla V_2 = -\vec{F}_2$$

Le forze esercitate da O_1, O_2 sono di natura gravitazionale, ricordiamo che l'energia potenziale gravitazionale ha la forma $-K/\rho$, con K costante e ρ distanza dal centro di attrazione. Si ha

$$V_1 = -\frac{1}{[(x-d)^2+y^2]^{1/2}}$$

$$V_2 = -\frac{1}{[(x+d)^2+y^2]^{1/2}}$$

Calcoliamo

$$[(x\pm d)^2+y^2] = [(d\cosh\xi\cos\eta \pm d)^2 + (d\,\mathrm{senh}\,\xi\,\mathrm{sen}\,\eta)^2] =$$

$$d^2\cosh^2\xi\,\underbrace{\cos^2\eta}_{=1-\mathrm{sen}^2\eta} + d^2 \pm 2d^2\cosh\xi\cos\eta + d^2\,\mathrm{senh}^2\xi\,\mathrm{sen}^2\eta =$$

$$d^2\cosh^2\xi\,\underbrace{-d^2\,\mathrm{sen}^2\eta + d^2}_{=d^2\cos^2\eta} \pm 2d^2\cosh\xi\cos\eta =$$

$$d^2\cosh^2\xi + d^2\cos^2\eta \pm 2d^2\cosh\xi\cos\eta =$$

$$(d\cosh\xi \pm d\cos\eta)^2$$

Allora

$$[(x \pm d)^2 + y^2] = d^2(\cosh\xi \pm \cos\eta)^2$$

$$V(\xi,\eta) = -\frac{1}{d(\cosh\xi - \cos\eta)} - \frac{1}{d(\cosh\xi + \cos\eta)}$$

La funzione lagrangiana è

$$L(\xi,\eta,\dot{\xi},\dot{\eta}) = T(\xi,\eta,\dot{\xi},\dot{\eta}) - V(\xi,\eta)$$

La trasformazione di Legendre ci permette di introdurre i momenti coniugati a ξ, η :

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m d^2 \dot{\xi}\,(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)$$

$$p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = m d^2 \dot{\eta}\,(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)$$

da cui

$$\dot{\xi} = \frac{p_\xi}{md^2(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)}, \quad \dot{\eta} = \frac{p_\eta}{md^2(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)}$$

Essendo questo un sistema meccanico, la funzione di Hamilton si può introdurre direttamente come

$$H(p_\xi, p_\eta, \xi, \eta) = T(\xi, \eta, \dot\xi, \dot\eta)\Big|_{\substack{\dot\xi = \dot\xi(p_\xi, \xi, \eta) \\ \dot\eta = \dot\eta(p_\xi, \xi, \eta)}} + V(\xi, \eta)$$

$$T = \frac{1}{2} \cancel{m} \cancel{d^2} \cancel{(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)} \left(\frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{m^{\cancel{2}} d^{\cancel{4}\,2} (\cosh^2\xi - \cos^2\eta)^{\cancel{2}}} \right)$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{m d^2 (\cosh^2\xi - \cos^2\eta)}$$

$$H(p_\xi, p_\eta, \xi, \eta) = \frac{1}{2} \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{m d^2 (\cosh^2\xi - \cos^2\eta)} - \frac{1}{d(\cosh\xi - \cos\eta)} - \frac{1}{d(\cosh\xi + \cos\eta)}$$

Introduciamo la funzione caratteristica di Hamilton

$$W(\xi, \eta, \alpha) = W_1(\xi, \alpha) + W_2(\eta, \alpha)$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ nuovi momenti

Possiamo scrivere l'equazione di H.-J. nella forma

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial(\xi,\eta)},\xi,\eta\right) = e(\alpha)$$

con $e(\alpha)$ funzione arbitraria di α

Abbiamo

$$p_\xi = \frac{\partial W_1}{\partial \xi}, \quad p_\eta = \frac{\partial W_2}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{2md^2(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)}\left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta}\right)^2\right]$$

$$-\frac{1}{d(\cosh\xi - \cos\eta)} - \frac{1}{d(\cosh\xi + \cos\eta)} = e(\alpha)$$

moltiplichiamo per $d(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)$

3 $$\frac{1}{2md}\left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta}\right)^2\right] - (\cosh\xi + \cos\eta)$$

$$-(\cosh\xi - \cos\eta) = e(\alpha)\, d\,(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)$$

Possiamo separare questa equazione in due equazioni differenziali ordinarie

1 $$\frac{1}{2md}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\right)^2 - 2\cosh\xi - d(\cosh^2\xi)\,e(\alpha) = e_1(\alpha)$$

2 $$\frac{1}{2md}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta}\right)^2 + d(\cos^2\eta)\, e(\alpha) = -e_1(\alpha)$$

dove e_1, e sono due funzioni di α indipendenti, cioè tali che

$$\det \frac{\partial(e_1, e)}{\partial \alpha} \neq 0$$

Si noti che la somma di 1, 2 ci dà 3

Esercizio (1° compitino 2019/2020)

Consideriamo la funzione hamiltoniana

$$H(p,q,t) = (1+t^2)^2 \left(|p|^2 - \frac{|q|^2}{q_1^2 q_2^2}\right) + \frac{2t}{1+t^2}\, p\cdot q$$

$$p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \, , \quad q = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$$

i) Scrivere

$$X_K = \psi_* X_H$$

dove

$$(p,q,t) \xrightarrow{\psi} (P, Q, t)$$

è la trasformazione canonica definita da

$$S(q, P, t) = \frac{q\cdot P}{1+t^2}$$

con $P = (P_1, P_2)$, $Q = (Q_1, Q_2)$

Sol. Proponiamo due soluzioni

a)

$$K = H \circ \psi^{-1} + \frac{\partial S}{\partial t}(q(P,Q,t), P, t)$$

$$p = S_q = \frac{P}{1+t^2} \longrightarrow P = p(1+t^2)$$

$$Q = S_P = \frac{q}{1+t^2} \longrightarrow q = Q(1+t^2)$$

$$\frac{|q|^2}{q_1^2 q_2^2} = \frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2}$$

$$H \circ \psi^{-1} = (1+t^2)^2 \left(\frac{|P|^2}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{Q_1^2 (1+t^2)^2} - \frac{1}{Q_2^2 (1+t^2)^2} \right) + \frac{2t}{1+t^2} P \cdot Q$$

$$H \circ \psi^{-1} = |P|^2 \underbrace{- \frac{1}{Q_1^2} - \frac{1}{Q_2^2}}_{= -\frac{|Q|^2}{Q_1^2 Q_2^2}} + \frac{2t}{1+t^2} P \cdot Q$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{2t\, q \cdot P}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} \circ \psi^{-1} = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}(1+t^2)\, P \cdot Q =$$

$$-\frac{2t}{1+t^2}\, P \cdot Q$$

$$K(P,Q,t) = |P|^2 - \frac{|Q|^2}{Q_1^2 Q_2^2} + \cancel{\frac{2t}{1+t^2} P \cdot Q}$$

$$\cancel{-\frac{2t}{1+t^2} P \cdot Q}$$

$$K(P,Q,t) = |P|^2 - \frac{|Q|^2}{Q_1^2 Q_2^2} = P_1^2 + P_2^2 - \frac{1}{Q_1^2} - \frac{1}{Q_2^2}$$

Scriviamo X_K

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_1} = \dfrac{\partial}{\partial Q_1}\left(\dfrac{1}{Q_1^2}\right) = -\dfrac{2}{Q_1^3} \\[2ex] \dot{P}_2 = -\dfrac{\partial K}{\partial Q_2} = \dfrac{\partial}{\partial Q_2}\left(\dfrac{1}{Q_2^2}\right) = -\dfrac{2}{Q_2^3} \\[2ex] \dot{Q}_1 = \dfrac{\partial K}{\partial P_1} = 2P_1 \\[2ex] \dot{Q}_2 = \dfrac{\partial K}{\partial P_2} = 2P_2 \end{cases}$$

b)

$$X_K = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} X_H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \circ \psi^{-1}$$

con $x = (p, q)$ e

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Phi} (P, Q)$$

$$P = p(1+t^2) \quad , \quad Q = \frac{q}{1+t^2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+t^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+t^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

X_H :

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{2}{q_1^3}(1+t^2)^2 - \frac{2tp_1}{1+t^2}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{2}{q_2^3}(1+t^2)^2 - \frac{2tp_2}{1+t^2}$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = 2p_1(1+t^2)^2 + \frac{2tq_1}{1+t^2}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = 2p_2(1+t^2)^2 + \frac{2tq_2}{1+t^2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} X_H = \begin{pmatrix} -\frac{2(1+t^2)^3}{q_1^3} - 2t p_1 \\ -\frac{2(1+t^2)^3}{q_2^3} - 2t p_2 \\ 2p_1(1+t^2) + \frac{2t q_1}{(1+t^2)^2} \\ 2p_2(1+t^2) + \frac{2t q_2}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(2t p_1, 2t p_2, -\frac{2t q_1}{(1+t^2)^2}, -\frac{2t q_2}{(1+t^2)^2} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} X_H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(-\frac{2(1+t^2)^3}{q_1^3}, -\frac{2(1+t^2)^3}{q_2^3} \right.$$

$$\left. 2p_1(1+t^2), 2p_2(1+t^2) \right)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} X_H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \circ \psi^{-1} = \left(-\frac{2\cancel{(1+t^2)^3}}{Q_1^3 \cancel{(1+t^2)^3}}, -\frac{2\cancel{(1+t^2)^3}}{Q_2^3 \cancel{(1+t^2)^3}} \right.$$

$$\left. 2P_1 \frac{(1+t^2)}{(1+t^2)}, 2P_2 \frac{(1+t^2)}{(1+t^2)} \right) = \left(-\frac{2}{Q_1^3}, -\frac{2}{Q_2^3}, 2P_1, 2P_2 \right)$$

ii) Calcolare un integrale completo dell'eq. di H.-J. associata a

$$K = H \circ \psi^{-1} + K_0$$

Sol.

Ricordiamo che

$$H(p,q,t) = (1+t^2)^2 \left(|p|^2 - \frac{|q|^2}{q_1^2 q_2^2} \right) + \frac{2t}{1+t^2} p \cdot q$$

$$p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$q = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$$

Avevamo già visto che

$$K = H \circ \psi^{-1} + \frac{\partial S}{\partial t} = |P|^2 - \frac{|Q|^2}{Q_1^2 Q_2^2} =$$

$$P_1^2 + P_2^2 - \frac{1}{Q_1^2} - \frac{1}{Q_2^2}$$

dove $S(q, P, t) = \dfrac{q \cdot P}{1+t^2}$

Scriviamo l'equazione di H.-J. per la funzione caratteristica $W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_2}\right)^2 - \frac{1}{Q_1^2} - \frac{1}{Q_2^2} = e(\alpha)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Poniamo

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(Q_1, \alpha_1, \alpha_2) + W_2(Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 - \frac{1}{Q_1^2} - \frac{1}{Q_2^2} = e(\alpha)$$

e scriviamo le due equazioni

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial Q_i}\right)^2 - \frac{1}{Q_i^2} = \alpha_i \qquad i = 1, 2$$

$e(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2$, assumiamo per comodità $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$

$$\frac{\partial W_i}{\partial Q_i} = \sqrt{\alpha_i + \frac{1}{Q_i^2}} = \frac{1}{Q_i}\sqrt{1 + \alpha_i Q_i^2}$$

$Q_i \in \mathbb{R}^+$

(si era trovato che $Q = 9/(1+t^2)$)

$$W_i = \sqrt{\alpha_i} \int \frac{1}{Q_i}\sqrt{Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i}}\, dQ_i$$

$$z^2 = Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i} \qquad 2z\,dz = 2Q_i\,dQ_i$$

$$Q_i^2 = z^2 - \frac{1}{\alpha_i} \qquad \frac{dQ_i}{Q_i} = \frac{z}{z^2 - 1/\alpha_i}\,dz$$

$$\int \frac{1}{Q_i}\sqrt{Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i}}\;dQ_i = \int \frac{z^2}{z^2 - 1/\alpha_i}\,dz =$$

$$\int\left(1 + \frac{1/\alpha_i}{z^2 - 1/\alpha_i}\right)dz = \int dz + \frac{1}{\alpha_i}\int \frac{1}{z^2 - 1/\alpha_i}\,dz$$

$$= z + \frac{1}{\alpha_i}\left(\int \frac{1}{z - 1/\sqrt{\alpha_i}}\,dz - \int \frac{1}{z + 1/\sqrt{\alpha_i}}\,dz\right)\frac{\sqrt{\alpha_i}}{2}$$

$$= z + \frac{1}{2\sqrt{\alpha_i}} \log \frac{z - 1/\sqrt{\alpha_i}}{z + 1/\sqrt{\alpha_i}}$$

$$= z + \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \log \left(\frac{(z - 1/\sqrt{\alpha_i})^2}{z^2 - 1/\alpha_i}\right)^{1/2}$$

$$z = \sqrt{Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i}}$$

$$z^2 - 1/\alpha_i = Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\alpha_i} = Q_i^2$$

$$W_i(Q_i, \alpha_i) = \sqrt{\alpha_i}\left\{ \sqrt{Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i}} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \log\left(\frac{1}{Q_i}\left(\sqrt{Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \right) \right) \right\}$$

e

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) =$$

$$\sqrt{1 + \alpha_1 Q_1^2} + \log\left(\frac{1}{Q_1}\left(\sqrt{Q_1^2 + \frac{1}{\alpha_1}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \right) \right) +$$

$$\sqrt{1 + \alpha_2 Q_2^2} + \log\left(\frac{1}{Q_2}\left(\sqrt{Q_2^2 + \frac{1}{\alpha_2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \right) \right)$$

La funzione principale di Hamilton è

$$S(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) - t\, e(\alpha)$$

Notiamo infine che W è una buona funzione generatrice

$$\frac{\partial W_i}{\partial Q_i} = \frac{1}{Q_i}\sqrt{1 + \alpha_i Q_i^2}, \quad \frac{\partial^2 W_i}{\partial \alpha_i \partial Q_i} = \frac{Q_i}{2\sqrt{1 + \alpha_i Q_i^2}}$$

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \, \partial Q} = \frac{Q_1 Q_2}{4\sqrt{1+\alpha_1 Q_1^2}\sqrt{1+\alpha_2 Q_2^2}} \neq 0$$

Esercizio (18 dicembre 2014)

Consideriamo un'hamiltoniana della forma

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = H_2\left(H_1(p_1, q_1+q_2),\, p_2 - p_1,\, q_2\right)$$

$$p_1, p_2 \in \mathbb{R} \qquad q_1, q_2 \in \mathbb{R}^+$$

$$H_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad H_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

i) Si cerchi una trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\psi_1} (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^+)^2$$

per cui nelle nuove coordinate l'hamiltoniana H venga trasformata nell'hamiltoniana

$$K(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = K_2\left(K_1(P_1, Q_1),\, P_2,\, Q_2\right)$$

$$K_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad K_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Sol. Mostriamo due possibili risposte

a) Proviamo a porre

$$P_2 = p_2 - p_1 \qquad Q_1 = q_1 + q_2$$

$$P_1 = p_1 \qquad Q_2 = q_2$$

dato che con questa trasformazione avremmo

$$H \circ \psi_1^{-1} = K_2\left(K_1(P_1, Q_1), P_2, Q_2\right)$$

con $H = H_2\left(H_1(p_1, q_1+q_2), p_2 - p_1, q_2\right)$

Controlliamo che la trasformazione che abbiamo scritto sia canonica. A tal fine verifichiamo che siano preservate le parentesi di Poisson fondamentali

Teniamo a mente che

$$\{X,Y\} = \frac{\partial X}{\partial q_1}\frac{\partial Y}{\partial p_1} + \frac{\partial X}{\partial q_2}\frac{\partial Y}{\partial p_2} - \frac{\partial X}{\partial p_1}\frac{\partial Y}{\partial q_1} - \frac{\partial X}{\partial p_2}\frac{\partial Y}{\partial q_2}$$

$$\{Q_1, P_1\} = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 - 0 - 0 = 1$$

$$\{Q_1, P_2\} = 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 - 0 - 0 = 0$$

$$\{Q_1, Q_2\} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$$

$$\{P_1, P_2\} = 0 + 0 - 0 - 0 = 0$$

$$\{Q_2, P_2\} = 0 + 1 \cdot 1 - 0 - 0 = 1$$

$$\{Q_2, P_1\} = 0 + 1 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$$

poichè le parentesi di Poisson fondamentali sono conservate la trasformazione è canonica

b) Poniamo

$$\begin{cases} Q_1 = q_1 + q_2 \\ Q_2 = q_2 \end{cases}$$

e cerchiamo di completare questa trasformazione puntuale ad una trasformazione canonica. Lo possiamo fare in due modi:

A) cerchiamo una funzione generatrice $S(q, P)$

$$Q = A q \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = (Q_1, Q_2), \quad q = (q_1, q_2)$$

$$
\begin{cases}
Q_1 = \dfrac{\partial S}{\partial P_1} = q_1 + q_2 \\[2ex]
Q_2 = \dfrac{\partial S}{\partial P_2} = q_2
\end{cases}
$$

$P = (P_1, P_2)$

$$S = P \cdot A q = q^T A^T P = q \cdot A^T P$$

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} \,, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}$$

$p = (p_1, p_2)$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = A^T P \quad \text{e} \quad P = A^{-T} p$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = p_1$$

$$P_2 = p_2 - p_1$$

B) Sappiamo che se

$$Q = v(q)$$

allora possiamo completare questa trasformazione puntuale ad una trasformazione canonica con

$$\underline{P} = \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right)^{-1} p$$

Nel nostro caso $\quad \dfrac{\partial v}{\partial q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Notiamo che l'hamiltoniana K coniugata ad H tramite ψ_1 avrà la forma desiderata:

$$K(\underline{P}_1, \underline{P}_2, Q_1, Q_2) = K_2(K_1(\underline{P}_1, Q_1), \underline{P}_2, Q_2)$$

ii) Assumiamo che

$$H_1(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2},$$

$$H_2(x,y,z) = x + z\sqrt{y^2+z^2};$$

usare il metodo di H-J. per trovare una funzione generatrice di una trasformazione canonica

$$(\underline{P}_1, \underline{P}_2, Q_1, Q_2) \xrightarrow{\psi_2} (\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2)$$

tale che η_1, η_2 siano costanti del moto della forma

$$\eta_j = F(\underline{P}_j, Q_j), \quad j = 1,2$$

per la stessa funzione $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Sol.

$$H_1(p_1, q_1+q_2) = (q_1+q_2)\sqrt{p_1^2+(q_1+q_2)^2}$$

$$H_2(H_1(p_1,q_1+q_2), p_2-p_1, q_2) =$$

$$(q_1+q_2)\sqrt{p_1^2+(q_1+q_2)^2} + q_2\sqrt{q_2^2+(p_2-p_1)^2}$$

$$K_2(K_1(P_1,Q_1), P_2, Q_2) = Q_1\sqrt{P_1^2+Q_1^2} + Q_2\sqrt{P_2^2+Q_2^2}$$

Introduciamo la funzione caratteristica di Hamilton

$$W(Q_1,Q_2,\eta_1,\eta_2) = W_1(Q_1,\eta_1,\eta_2) + W_2(Q_2,\eta_1,\eta_2)$$

e scriviamo l'equazione di H.-J. per K

$$Q_1\sqrt{\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 + Q_1^2} + Q_2\sqrt{\left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 + Q_2^2} = e(\eta_1,\eta_2)$$

Ponendo $e(\eta_1,\eta_2) = \eta_1+\eta_2$ possiamo scrivere le due equazioni

$$Q_i\sqrt{\left(\frac{\partial W_i}{\partial Q_i}\right)^2 + Q_i^2} = \eta_i, \quad i = 1,2$$

(ricordiamo che $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^+$ e quindi si ha $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^+$)

e riconosciamo che

$$\eta_j = F(P_j, Q_j) \quad \text{con}$$

$$F(P_j, Q_j) = Q_i \sqrt{P_i^2 + Q_i^2}$$

come richiesto

Procediamo cercando di trovare $W(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2)$

$$Q_i^2 \left[\left(\frac{\partial W_i}{\partial Q_i} \right)^2 + Q_i^2 \right] = \eta_i^2$$

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial Q_i} \right)^2 + Q_i^2 = \frac{\eta_i^2}{Q_i^2}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial Q_i} = \frac{\sqrt{\eta_i^2 - Q_i^4}}{Q_i}$$

$$W_i = \int \frac{\sqrt{\eta_i^2 - Q_i^4}}{Q_i} \, dQ_i$$

poniamo $\xi = Q_i^4 \qquad d\xi = 4 Q_i^3 \, dQ_i$

$$\rightarrow \frac{d\xi}{\xi} = 4 \frac{dQ_i}{Q_i}$$

$$\int \frac{\sqrt{\eta_i^2 - Q_i^4}}{Q_i} \, dQ_i = \int \frac{\sqrt{\eta_i^2 - \xi}}{4\xi} \, d\xi$$

$$z = \sqrt{\eta_i^2 - \xi} \longrightarrow \xi = \eta_i^2 - z^2$$

$$dz = -\frac{1}{2z} d\xi$$

$$\int \frac{\sqrt{\eta_i^2 - \xi}}{4\xi} d\xi = \int \frac{z(-2z)}{4(\eta_i^2 - z^2)} dz =$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{z^2}{\eta_i^2 - z^2} dz = -\frac{1}{2}\int \frac{z^2 + \eta_i^2 - \eta_i^2}{\eta_i^2 - z^2} dz$$

$$= \frac{1}{2}\int dz - \frac{1}{2}\eta_i^2 \int \frac{1}{\eta_i^2 - z^2} dz =$$

$$\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\eta_i^2 \left(\int \frac{dz}{\eta_i - z} + \int \frac{dz}{\eta_i + z} \right) \frac{1}{2\eta_i} =$$

$$\frac{1}{2}z - \frac{\eta_i}{4} \log \frac{\eta_i + z}{\eta_i - z} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{ z - \eta_i \log \left(\frac{(\eta_i + z)(\eta_i + z)}{(\eta_i - z)(\eta_i - z)} \right)^{1/2} \right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left(z - \eta_i \log \frac{\eta_i + z}{(\eta_i^2 - z^2)^{1/2}} \right)$$

$$\left(z = \sqrt{\eta_i^2 - \xi} \qquad \xi = Q_i^4 \right)$$

$$W = W_1 + W_2$$

$$W(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2) =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\eta_1^2 - Q_1^4} - \frac{\eta_1}{2}\log\frac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 - Q_1^4}}{Q_1^2}$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{\eta_2^2 - Q_2^4} - \frac{\eta_2}{2}\log\frac{\eta_2 + \sqrt{\eta_2^2 - Q_2^4}}{Q_2^2}$$

Notiamo infine che

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial Q_i} = \frac{\sqrt{\eta_i^2 - Q_i^4}}{Q_i}\right) \qquad \frac{\partial^2 W_i}{\partial \eta_i \partial Q_i} = \frac{\eta_i}{Q_i\sqrt{\eta_i^2 - Q_i^4}}$$

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial Q} = \frac{\eta_1 \eta_2}{Q_1 Q_2 \sqrt{\eta_1^2 - Q_1^4}\sqrt{\eta_2^2 - Q_2^4}} \neq 0$$

in quanto $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^+$

Esercizio Problema di Keplero in un campo di forza costante

(noto anche come problema di Stark)

Consideriamo il moto di un punto materiale di massa m

soggetto ad una forza conservativa derivata dall'energia potenziale

$$V(x,y,z) = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + Fx$$

Mostrare che le coordinate paraboliche $(u, v, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$,

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad y = uv \operatorname{sen}\phi, \quad z = uv\cos\phi$$

sono variabili separabili per l'equazione di H.-J. relativa a questo sistema meccanico

Sol.

Notiamo che $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\vec{F} = -\nabla V(x,y,z) = -\frac{k}{\rho^3}(x,y,z)^T - F(1,0,0)^T$$

Scriviamo le equazioni di Hamilton in coordinate cartesiane

Introduciamo i momenti coniugati a x, y, z

$$T(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \, , \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

$$p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$H(p_x, p_y, p_z, x, y, z) =$$

$$\frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + Fx$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= -\nabla V = \vec{F} \\ \dot{x} &= p_x/m \\ \dot{y} &= p_y/m \\ \dot{z} &= p_z/m \end{aligned}\right\} \text{equazioni di Hamilton} \qquad \longrightarrow m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$$

$$\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})^T$$

$$\begin{cases} \dot{x} = u\dot{u} - v\dot{v} \\ \dot{y} = \dot{u}v \operatorname{sen}\phi + u\dot{v}\operatorname{sen}\phi + uv\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{z} = \dot{u}v\cos\phi + u\dot{v}\cos\phi - uv\dot{\phi}\operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{u}^2v^2 + u^2\dot{v}^2 + u^2v^2\dot{\phi}^2 + \cancel{2u\dot{u}v\dot{v}} \right.$$

$$\left. + u^2\dot{u}^2 + v^2\dot{v}^2 - \cancel{2u\dot{u}v\dot{v}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{u}^2(u^2+v^2) + \dot{v}^2(u^2+v^2) + u^2v^2\dot{\phi}^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} m \left[(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)(u^2 + v^2) + u^2 v^2 \dot{\phi}^2 \right]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4} (u^2 - v^2)^2 + u^2 v^2 =$$

$$\frac{1}{4} (u^2 + v^2)^2$$

$$V(u, v) = -\frac{2k}{u^2 + v^2} + F\left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)$$

$$p_u = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = m \dot{u} (u^2 + v^2) \longrightarrow \dot{u} = \frac{p_u}{m(u^2 + v^2)}$$

$$p_v = \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} = m \dot{v} (u^2 + v^2) \longrightarrow \dot{v} = \frac{p_v}{m(u^2 + v^2)}$$

$$p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m u^2 v^2 \dot{\phi} \longrightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m u^2 v^2}$$

$$H(p_u, p_v, p_\phi, u, v) = \frac{1}{2} \cancel{m} \left(\cancel{(u^2 + v^2)} \frac{p_u^2 + p_v^2}{m^{\cancel{2}} (u^2 + v^2)^{\cancel{2}}} + \right.$$

$$\left. \cancel{u^2 v^2} \frac{p_\phi^2}{m^{\cancel{2}} u^{\underset{2}{\cancel{4}}} v^{\underset{2}{\cancel{4}}}} \right) - \frac{2k}{u^2 + v^2} + F\left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{p_u^2 + p_v^2}{m(u^2 + v^2)} + \frac{p_\phi^2}{m u^2 v^2} \right) - \frac{2k}{u^2 + v^2} + F\left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)$$

Assumiamo che la funzione caratteristica W

dell'equazione di H.-J. abbia la forma

$$W(u,v,\phi,\alpha) = W_u(u,\alpha) + W_v(v,\alpha) + W_\phi(\phi,\alpha)$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ nuovi momenti

L'equazione di H.-J. diventa

$$\frac{1}{2m(u^2+v^2)}\left[\left(\frac{\partial W_u}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_v}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{1}{2mu^2v^2}\left(\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi}\right)^2$$

$$-\frac{2k}{u^2+v^2} + F\left(\frac{u^2-v^2}{2}\right) = e(\alpha)$$

Notiamo che ϕ è una variabile ciclica, quindi p_ϕ è costante.

Poniamo $\alpha_1 = p_\phi$, cioè

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} = p_\phi = \alpha_1 \qquad 1$$

da cui otteniamo $W_\phi = \phi\alpha_1$

Ora moltiplichiamo l'equazione per u^2+v^2

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_u}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_v}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{\alpha_1^2}{2m}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right) -$$

$$2K + F\left(\frac{u^4 - v^4}{2}\right) = e(\alpha)\,(u^2 + v^2)$$

Possiamo scrivere le due equazioni differenziali

2 $$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_u}{\partial u}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{2m\,u^2} - K + \frac{F}{2}u^4 - e(\alpha)\,u^2 = e_1(\alpha)$$

3 $$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_v}{\partial v}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{2m\,v^2} - K - \frac{F}{2}v^4 - e(\alpha)\,v^2 = -\,e_1(\alpha)$$

dove si richiede che $\det \frac{\partial(e, e_1, \alpha_1)}{\partial \alpha} \neq 0$.

Abbiamo quindi scritto un sistema di 3 equazioni differenziali ordinarie (1, 2, 3) a partire dall'eq. di H.-J.

Esercizio (8 giugno 2018)

Consideriamo una funzione regolare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$H(p,q) = f\left((p_1 + q_2)^2 + q_1^2,\ p_2 + q_1,\ q_2\right)$$

$p = (p_1, p_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $q \in (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$

i) Trovare

$$(p,q) \xrightarrow{\psi} (P, Q)$$

t.c. P, Q siano separabili per l'equazione di H.-J.

per la hamiltoniana $K = H \circ \psi^{-1}$

Sol.

Poniamo

$$\begin{cases} P_1 = p_1 + q_2 \\ P_2 = p_2 + q_1 \end{cases}$$

e completiamo queste relazioni ad una trasformazione canonica usando una funzione generatrice $S(q,P)$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad p_1 = P_1 - q_2, \quad p_2 = P_2 - q_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = P_1 - q_2 \longrightarrow S(q,P) = P_1 q_1 - q_1 q_2 + h(q_2, P)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_2} = P_2 - q_1 \longrightarrow S(q,P) = P_2 q_2 - q_1 q_2 + g(q_1, P)$$

Scegliamo

$$S(q,P) = P_2 q_2 + P_1 q_1 - q_1 q_2$$

e notiamo che è una buona funzione generatrice

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = q_1$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = q_2$$

$$\begin{cases} P_1 = p_1 + q_2 \\ P_2 = p_2 + q_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_1 = q_1 \\ Q_2 = q_2 \end{cases}$$

La nuova hamiltoniana diventa

$$K(P,Q) = f\left(P_1^2 + Q_1^2, P_2, Q_2\right)$$

Per rispondere alla domanda si può anche verificare che la trasformazione sia canonica. In effetti la matrice jacobiana

$$\frac{\partial \psi}{\partial (p,q)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è simplettica, cioè

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial (p,q)}\right)^T J \, \frac{\partial \psi}{\partial (p,q)} = J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(provate a verificarlo)

ii) Trovare le soluzioni del sistema hamiltoniano per H con c. i.

$$p_1(0) = -1, \quad p_2(0) = 0, \quad q_1(0) = 1, \quad q_2(0) = 1$$

ed

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x + yz$$

Sol.

Si ha

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\left[(p_1+q_2)^2 + q_1^2\right] + (p_2+q_1)q_2$$

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = -q_1 - q_2 \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} = -p_1 - q_2 - p_2 - q_1 \\ \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 + q_2 \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = q_2 \end{cases}$$

Anziché risolvere questo sistema con le c. i. date, consideriamo il sistema hamiltoniano associato a K

$$K(P,Q) = \frac{1}{2}\left(P_1^2 + Q_1^2\right) + P_2 Q_2$$

$$\dot{P}_1 = -Q_1, \quad \dot{P}_2 = -P_2$$

$$\dot{Q}_1 = P_1 , \quad \dot{Q}_2 = Q_2$$

$$P_1(0) = p_1(0) + q_2(0) = -1 + 1 = 0$$

$$P_2(0) = p_2(0) + q_1(0) = 0 + 1 = 1$$

$$Q_1(0) = q_1(0) = 1$$

$$Q_2(0) = q_2(0) = 1$$

quindi

$Q_2(t) = e^t , \quad P_2(t) = e^{-t}$, e

$$(\ddot{Q}_1 = -Q_1)$$

$$Q_1(t) = \cos t , \quad P_1(t) = -\operatorname{sen} t$$

$$\begin{cases} q_1(t) = Q_1(t) = \cos t \\ q_2(t) = Q_2(t) = e^t \\ p_1(t) = P_1(t) - Q_2(t) = -\operatorname{sen} t - e^t \\ p_2(t) = P_2(t) - Q_1(t) = e^{-t} - \cos t \end{cases}$$

iii) Calcolare un integrale completo dell'equazione di H.-J. associata a $K = H \circ \psi^{-1}$

Sol.

Scriviamo subito per $W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)^2 + Q_1^2\right] + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_2}\right) Q_2 = e(\alpha)$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

Poniamo

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(Q_1, \alpha_1, \alpha_2) + W_2(Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

e scriviamo le due equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 + \frac{1}{2} Q_1^2 = \alpha_1 \\ \frac{\partial W_2}{\partial Q_2} Q_2 = \alpha_2 \end{cases}$$

con $\alpha_1 + \alpha_2 = e(\alpha)$

$$\begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial Q_1} = \sqrt{2\alpha_1 - Q_1^2} \\ \frac{\partial W_2}{\partial Q_2} = \frac{\alpha_2}{Q_2} \longrightarrow W_2 = \alpha_2 \log Q_2 \end{cases}$$

$Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^+$

$$W_1 = \int \sqrt{2\alpha_1 - Q_1^2}\, dQ_1 = \sqrt{2\alpha_1} \underbrace{\int \sqrt{1 - \frac{Q_1^2}{2\alpha_1}}\, dQ_1}$$

$x = Q_1 / \sqrt{2\alpha_1}$

$$\sqrt{2\alpha_1} \int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$\longrightarrow \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x \right)$$

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \left(\frac{Q_1}{\sqrt{2\alpha_1}} \sqrt{1 - \frac{Q_1^2}{2\alpha_1}} + \operatorname{arcsen} \frac{Q_1}{\sqrt{2\alpha_1}} \right)$$

$$+ \alpha_2 \log Q_2$$

Infine, notiamo che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\, \partial Q} = \frac{1}{Q_2 \sqrt{2\alpha_1 - Q_1^2}} \neq 0$$