Esercizio

Determinare due funzioni non costanti $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tali che

$$P(p,q) = p f(p) + q$$

$$Q(p,q) = q g(q) + \frac{p^2}{2}$$

definiscano una trasformazione canonica univalente su $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Sol.

Imponiamo

$$\{Q, P\} = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = g + q g' \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = p$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = 1 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial p} = f + p f'$$

$$(g + q g')(f + p f') - p = 1$$

g è funzione di q, f è funzione di p

$$\begin{cases} g + qg' = c & (c \text{ è una costante}) \\ f + pf' = \dfrac{1+p}{c} \end{cases}$$

$$\underbrace{g + qg'}_{= (qg)'} = c$$

$$\rightarrow \quad qg = cq + a \quad \text{con } a \neq 0$$

$$g(q) = c + \frac{a}{q}$$

scegliamo $c = a = 1$ $\quad g(q) = 1 + \frac{1}{q}$

$$\underbrace{f + pf'}_{= (fp)'} = \frac{1+p}{c} = 1 + p$$

$$(fp)' = 1 + p \longrightarrow fp = p + \frac{p^2}{2} + b \quad (b \text{ costante})$$

$$f(p) = 1 + \frac{1}{2}p \qquad (b = 0)$$

un'altra scelta possibile è

$$f(p) = 1 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{p} \qquad (b = 1)$$

Esercizio (18 giugno 2019)

Consideriamo la trasformazione

$$\psi : (p, q, t) \longrightarrow (P, Q, t)$$

che dipende da $\alpha, \omega, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{cases} P = e^{-\alpha t} \left[p \cos(\omega t) + q \operatorname{sen}(\omega t) \right] \\ Q = e^{\alpha t} \left[\beta p \operatorname{sen}(\omega t) + \gamma q \cos(\omega t) \right] \end{cases}$$

i) Trovare tutti i valori di $\alpha, \omega, \beta, \gamma$ che rendono ψ canonica univalente

Sol.

$$\{Q, P\} = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = e^{\alpha t} \gamma \cos(\omega t) \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = e^{\alpha t} \beta \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega t) \qquad \frac{\partial P}{\partial p} = e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$$

$$e^{\alpha t} \gamma \cos(\omega t)\, e^{-\alpha t} \cos(\omega t) -$$

$$e^{\alpha t} \beta \operatorname{sen}(\omega t)\, e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega t) = 1$$

$$\gamma \cos^2(\omega t) - \beta \, \mathrm{sen}^2(\omega t) = 1$$

$$\beta = -1 \,, \; \gamma = 1 \,, \quad \omega, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Con questa scelta dei parametri la trasformazione a tempo bloccato

$$\begin{cases} P = e^{-\alpha \bar{t}} \left[p \cos(\omega \bar{t}) + q \, \mathrm{sen}(\omega \bar{t}) \right] \\ Q = e^{\alpha \bar{t}} \left[-p \, \mathrm{sen}(\omega \bar{t}) + q \cos(\omega \bar{t}) \right] \end{cases}$$

è canonica con valenza 1

Poichè l'insieme di definizione di p, q è semplicemente connesso segue che ψ è canonica univalente

ii) Per i valori di ω, β, γ trovati e per $\alpha = 1$ estendere ψ ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso

$$\tilde{\psi} : (p, e, q, t) \longrightarrow (P, \mathcal{E}, Q, t)$$

dove P, Q sono definite da ψ e $\mathcal{E}, e$ sono i momenti coniugati al tempo

Sol.

$$\mathcal{E} = e - H_0$$

con $H_0 = K_0 \circ \psi$ e

K_0 è la funz. hamiltoniana relativa al campo vettoriale

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} = X_{K_0}$$

con

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Phi} (P, Q)$$

Considerando che

$$\begin{cases} P = e^{-t}\left[p\cos(wt) + q\,\mathrm{sen}(wt)\right] \\ Q = e^{t}\left[-p\,\mathrm{sen}(wt) + q\cos(wt)\right] \end{cases}$$

si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Big(-e^{-t}\left[p\cos(wt) + q\,\mathrm{sen}(wt)\right] +$$

$$e^{-t}\left[-wp\,\mathrm{sen}(wt) + wq\cos(wt)\right],\ e^{t}\left[-p\,\mathrm{sen}(wt) +\right.$$

$$\left.q\cos(wt)\right] + e^{t}\left[-pw\cos(wt) - qw\,\mathrm{sen}(wt)\right]\Big)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} = \Big(-e^{-t}\frac{P}{e^{-t}} + w\,e^{-t}\frac{Q}{e^{t}},$$

$$e^{t}\frac{Q}{e^{t}} - w\,e^{t}\frac{P}{e^{-t}}\Big)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} = \left(-P + e^{-2t} w Q ,\ Q - w e^{2t} P \right)$$

$$\begin{cases} \dot{P} = -P + e^{-2t} w Q = -\dfrac{\partial K_0}{\partial Q} \\ \dot{Q} = Q - w e^{2t} P = \dfrac{\partial K_0}{\partial P} \end{cases}$$

integrando la seconda equazione si ha

$$K_0(P, Q, t) = PQ - \frac{1}{2} w e^{2t} P^2 + f(Q,t)$$

e integrando la prima equazione si ha

$$K_0(P,Q,t) = PQ - \frac{1}{2} w e^{-2t} Q^2 + g(P,t)$$

da cui

$$K_0(P,Q,t) = PQ - \frac{1}{2} w e^{-2t} Q^2 - \frac{1}{2} w e^{2t} P^2$$

e

$$H_0(p,q,t) = K_0 \circ \psi^{-1} = -p^2 \cos(wt) \operatorname{sen}(wt)$$

$$+ pq \left(\cos^2(wt) - \operatorname{sen}^2(wt) \right) + q^2 \cos(wt) \operatorname{sen}(wt)$$

$$- \frac{1}{2} w (p^2 + q^2)$$

infatti $\begin{pmatrix} e^t P \\ e^{-t} Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(wt) & -\operatorname{sen}(wt) \\ \operatorname{sen}(wt) & \cos(wt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$$H_0 = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\omega t)\,(q^2 - p^2) + pq\cos(2\omega t)$$
$$- \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2)$$

La trasformazione canonica estesa $\tilde{\psi}$ è

$$\begin{cases} P = e^{-t}\left[p\cos(\omega t) + q \operatorname{sen}(\omega t)\right] \\ \mathcal{E} = e - H_0 = e - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t)(q^2 - p^2) \\ \qquad\qquad - pq\cos(2\omega t) + \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2) \\ Q = e^{t}\left[-p \operatorname{sen}(\omega t) + q\cos(\omega t)\right] \\ t = t \end{cases}$$

<u>Esercizio</u>

Completare la relazione

$$Q = q^2 + p(1 + t^2)$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (p, q, t) \xrightarrow{\psi} (P, Q, t)$$

Sol.

Cerchiamo una funzione generatrice $S(q, Q, t)$

$$\begin{cases} p = S_q = \dfrac{\partial S}{\partial q} \\ \\ P = -S_Q = -\dfrac{\partial S}{\partial Q} \end{cases}$$

$$p = \frac{Q - q^2}{1+t^2} \longrightarrow \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{Q - q^2}{1+t^2}$$

integrando, pongo

$$S(q, Q, t) = \frac{Qq}{1+t^2} - \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}\left(Qq - \frac{1}{3}q^3\right)$$

dato che

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial q} = \frac{1}{1+t^2} \neq 0$$

$S(q, Q, t)$ è una buona funzione generatrice

Proseguiamo

$$P = -\frac{\partial S}{\partial Q} = -\frac{q}{1+t^2}$$

Le trasformazioni ψ e ψ^{-1} sono quindi

$$\begin{cases} P = -\dfrac{q}{1+t^2} \\ \\ Q = q^2 + p\,(1+t^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} q = -P\,(1+t^2) \\ \\ p = \dfrac{Q}{1+t^2} - P^2\,(1+t^2) \end{cases}$$

ii) Estendere tale trasformazione ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso

Sol. Proponiamo due soluzioni

a)

$$\mathcal{E}(p,e,q,t) = e - \frac{\partial S}{\partial t}\left(q, Q(p,q,t), t\right)$$

$$S(q,Q,t) = \frac{1}{1+t^2}\left(Qq - \frac{1}{3}q^3\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}\left(Qq - \frac{1}{3}q^3\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} \circ \psi = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}\left[q^3 + pq\,(1+t^2) - \frac{1}{3}q^3\right]$$

$$= -\frac{2t}{(1+t^2)^2}\left[\frac{2}{3}q^3 + pq\,(1+t^2)\right]$$

$$\mathcal{E}(p,e,q,t) = e + \frac{2t}{(1+t^2)^2}\left[\frac{2}{3}q^3 + pq\,(1+t^2)\right]$$

b)

$$\mathcal{E}(p,e,q,t) = e - H_0(p,q,t)$$

chiamo Φ la trasformazione

$$(p,q,t) \xrightarrow{\Phi} (P,Q)$$

$$P = -\frac{q}{1+t^2}, \qquad Q = q^2 + p(1+t^2)$$

$$\left(p = \frac{Q}{1+t^2} - P^2(1+t^2) \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(\frac{2tq}{(1+t^2)^2}, 2pt \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} = \left(\frac{2t}{(1+t^2)^{\cancel{2}}}(-P)\cancel{(1+t^2)}, \right.$$

$$\left. 2t\left(\frac{Q}{1+t^2} - P^2(1+t^2) \right) \right)$$

Ora scriviamo X_{K_0}:

$$\begin{cases} \dot{P} = -\dfrac{2tP}{1+t^2} = -\dfrac{\partial K_0}{\partial Q} \\[2ex] \dot{Q} = \dfrac{2t}{1+t^2} Q - 2t(1+t^2)P^2 = \dfrac{\partial K_0}{\partial P} \end{cases}$$

Integrando la prima equazione si ha

$$K_0 = \frac{2tPQ}{1+t^2} + f(P,t)$$

e integrando la seconda si ha

$$K_0 = \frac{2tPQ}{1+t^2} - \frac{2}{3}t(1+t^2)P^3 + g(Q,t)$$

$$K_0 = \frac{2t}{1+t^2}PQ - \frac{2}{3}t(1+t^2)P^3$$

$$H_0 = K_0 \circ \psi =$$

$$\frac{2t}{1+t^2}\left(-\frac{q^3}{1+t^2} - pq\right) - \frac{2}{3}t\cancel{(1+t^2)}\left(-\frac{q^3}{(1+t^2)^{\cancel{3}\,2}}\right) =$$

$$\frac{2t}{1+t^2}\left(-\frac{2}{3}\frac{q^3}{1+t^2} - pq\right)$$

$$\mathcal{E}(p,e,q,t) = e + \frac{2t}{(1+t^2)^2}\left[\frac{2}{3}q^3 + pq(1+t^2)\right]$$

Esercizio
Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \qquad V(q) = q^2 \log q$$

con $q > 0$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

i) Tracciare il ritratto di fase delle equazioni di Eulero-Lagrange per L.

ii) Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = e^{-1/2}, \qquad \dot{\bar{\gamma}}(0) = (1/e - 1/3)^{1/2}$$

è una funzione periodica tale che

$$\bar{\gamma}(t) > 1/e, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

iii) Mostrare che esiste un valore τ_* del tempo t per cui $\bar{\gamma}(t)$ non può essere un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^{\tau_*} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt.$$

i)

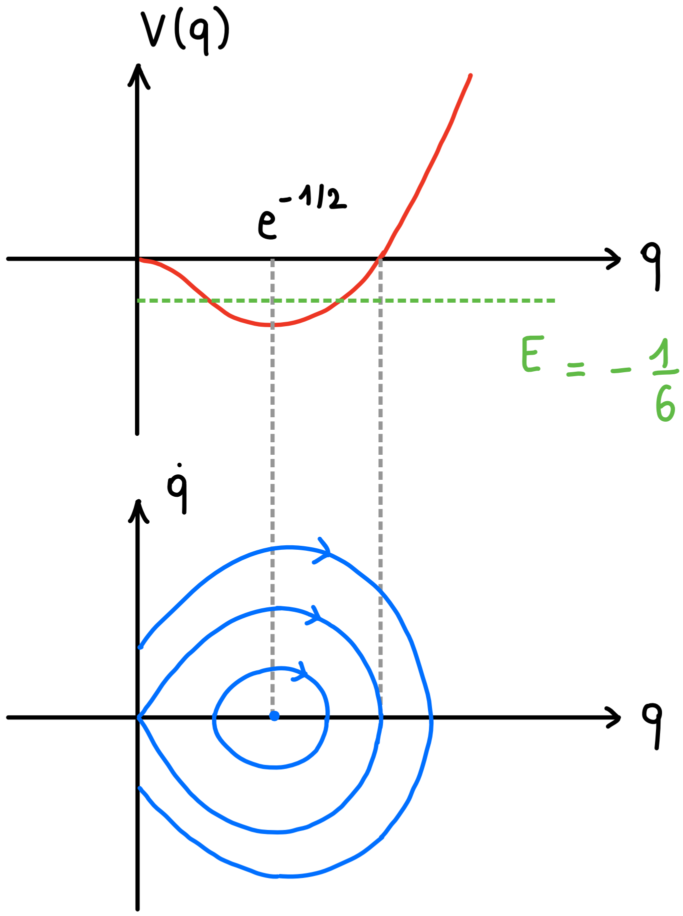
$$\lim_{q \to 0^+} q^2 \log q = 0$$

$$\lim_{q \to +\infty} q^2 \log q = +\infty$$

calcoliamo $V'(q)$:

$$V'(q) = 2q\log q + q$$

$$V'(q) = 0 \quad \text{per} \quad \log q = \frac{1}{2} \longrightarrow q = e^{-1/2}$$



ii) Calcoliamo il valore dell'energia meccanica che è una quantità conservata lungo il moto

$$E(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + V(q)$$

$$\bar{E}(\bar{\gamma}(0),\dot{\bar{\gamma}}(0)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}$$

notando che

$$V(e^{-1/2}) = \frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}\right) < \bar{E} < 0$$

posso dire dal ritratto di fase che $\bar{\gamma}(t)$ è una funzione periodica; inoltre

$$V\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2} > -\frac{1}{6}$$

perciò dato che $\frac{1}{e} < \frac{1}{\sqrt{e}}$ possiamo affermare che

$$\bar{\gamma}(t) > \frac{1}{e} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

iii)

Vogliamo considerare la soluzione dell'equazione di Jacobi

$$-\frac{d}{dt}(a(t)\dot\eta) + (c(t) - \dot b(t))\eta = 0$$

con condizioni iniziali

$$\eta(0) = 0 \ , \quad \dot\eta(1) = 0$$

e mostrare che esiste $\tau^* > 0$ tale che $\eta(\tau^*) = 0$

$$L_{\dot q} = \dot q \qquad L_q = -V' = -2q\log q - q$$

$$a(t) = \frac{1}{2}L_{\dot q\dot q}(\bar\gamma(t), \dot{\bar\gamma}(t)) = \frac{1}{2} > 0$$

$$b(t) = \frac{1}{2}L_{q\dot q}(\bar\gamma(t), \dot{\bar\gamma}(t)) = 0$$

$$c(t) = \frac{1}{2}L_{qq}(\bar\gamma(t), \dot{\bar\gamma}(t)) = -\frac{1}{2}V''(\bar\gamma(t))$$

$$-\frac{1}{2}\left(2\log\bar\gamma(t) + 2 + 1\right) = -\frac{3}{2} - \log\bar\gamma(t)$$

$$-\frac{1}{2}\ddot\eta - \left(\frac{3}{2} + \log\bar\gamma(t)\right)\eta = 0$$

$$\ddot{\eta} = -(3 + 2\log \bar{\gamma}(t))\eta$$

poichè $\bar{\gamma}(t) > \frac{1}{e}$ si ha

$$3 + 2\log \bar{\gamma}(t) > 3 + 2\log \frac{1}{e} = 1$$

Considero il problema di Cauchy

$$\ddot{\xi} = -\xi, \quad \xi(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = 1$$

che ha soluzione $\xi(t) = \operatorname{sen} t$

Considero allora i due sistemi

$$\begin{cases} \ddot{\eta} = -(3 + 2\log \bar{\gamma}(t))\eta \\ \dot{\eta}(0) = 1 \\ \eta(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = -\xi \\ \dot{\xi}(0) = 1 \\ \xi(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{con soluzione } \xi(t) = \operatorname{sen} t$$

Integrando si ha

$$\dot{\eta}(t) = 1 - \int_0^t (3 + 2\log \gamma(\tau))\eta(\tau)\, d\tau$$

$$\dot{\eta}(t) < 1 - \int_0^t \eta(\tau)\, d\tau \qquad 1$$

e

$$\dot{\xi}(t) = 1 - \int_0^t \xi(\tau)\, d\tau \qquad 2$$

Dal teorema del confronto (per esempio si veda il teorema 6.4 delle dispense di Paolo Baiti) applicato considerando l'intervallo $[0,\pi]$ si ha che

$$\eta(t) < \xi(t) = \operatorname{sen} t$$

per ogni $t \in (0,\pi]$.

Concludiamo che esiste $\tau^* < \pi$ tale che $\eta(\tau^*) = 0$.