Esercizio (17 gennaio 2019)

Funzioni di Lagrange

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q^2 - V(q), \qquad V(q) = -\cos q$$

$q, \dot q \in \mathbb{R}$

Si consideri la sol. $\gamma(t)$ delle eq. di E.-L. per L con c.i.

$$q(0) = \frac{\pi}{3} \quad , \quad \dot q(0) = 1$$

Trovare $\bar t > 0$ t.c. in $(0, \bar t)$ non ci siano valori coniugati a $t = 0$

Sol.

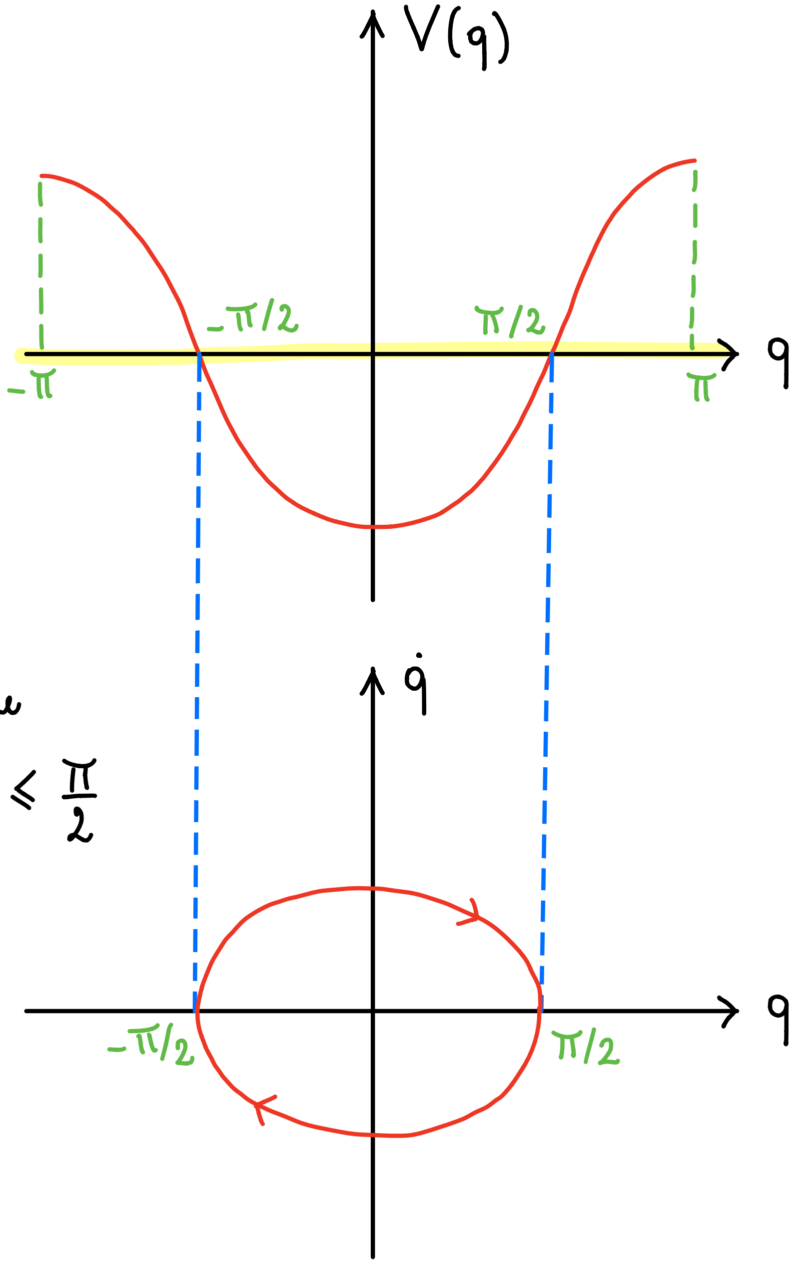
$$\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \dot q \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = \ddot q$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -V' \qquad -V' = -\operatorname{sen} q$$

$$E = \frac{1}{2}\dot q^2 + V = \frac{1}{2}\dot q^2 - \cos q$$

$$\bar E = E(\pi/3, 1) = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$E(q(t), \dot q(t)) = 0$$



notiamo che

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant q(t) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

equazione di Jacobi

$$-\frac{d(a(t)\dot{\eta})}{dt} + (c(t) - \dot{b}(t))\eta = 0$$

$$a(t) = \frac{1}{2} L_{\dot{q}\dot{q}}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \frac{1}{2} > 0$$

$$b(t) = \frac{1}{2} L_{q\dot{q}}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$$

$$c(t) = \frac{1}{2} L_{qq}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = -\frac{1}{2} \cos(\gamma(t))$$

$$L_{qq} = -V'' = -\cos q$$

$$-V = \cos q \qquad (-V)' = -\operatorname{sen} q$$

$$(-V)'' = -\cos q$$

$$-\frac{1}{2}\ddot{\eta} - \frac{1}{2}\cos(\gamma(t))\eta = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{\eta} = -\cos(\gamma(t))\eta \\ \dot{\eta}(0) = 1 \\ \eta(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{con } -\frac{\pi}{2} \leq \gamma(t) \leq \frac{\pi}{2}$$

Integrando si ha

$$\dot{\eta}(t) = 1 - \int_0^t \cos(\gamma(\tau))\eta(\tau)\,d\tau$$

$$\dot{\eta}(t) \geq 1 - \int_0^t \eta(\tau)\,d\tau \qquad 1$$

Consideriamo l'equazione $\ddot{z} = -z$ con c.i.

$\dot{z}(0) = 1$, $z(0) = 0$, che ha soluzione $z(t) = \operatorname{sen} t$.

Integrando si ha

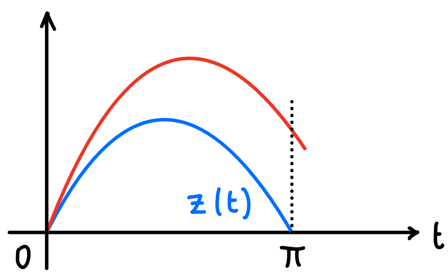
$$\dot{z}(t) = 1 - \int_0^t z(\tau)\,d\tau \qquad 2$$

Applichiamo il teorema del confronto (per esempio si veda il teorema 6.4 delle dispense di Paolo Baiti)

nell'intervallo $[0,\pi]$. Si ottiene subito

$$\eta(t) \geq z(t) = \operatorname{sen} t$$

per ogni $t \in (0,\pi]$



Nell'intervallo $(0,\bar{t})$ con $\bar{t} = \pi$ non esistono valori coniugati a $t = 0$

Esercizio

Per quali scelte di $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ la trasformazione

$$p = a\, I^{\alpha} \cos^{\beta}\varphi$$

$$q = b\, I^{\alpha} \operatorname{sen}^{\gamma}\varphi$$

è completamente canonica?

Sol.

(I è il momento coniugato a φ)

$$\{q,p\} = 1 \longrightarrow \frac{\partial q}{\partial \varphi}\frac{\partial p}{\partial I} - \frac{\partial q}{\partial I}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 1$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = a I^{\alpha} \beta (\cos\varphi)^{\beta-1} (-\operatorname{sen}\varphi)$$

$$\frac{\partial p}{\partial I} = \alpha a I^{\alpha-1} \cos^{\beta}\varphi$$

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = b I^{\alpha} \gamma (\operatorname{sen}\varphi)^{\gamma-1} (\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial q}{\partial I} = b \alpha I^{\alpha-1} \operatorname{sen}^{\gamma}\alpha$$

$$\alpha a I^{2\alpha-1} b \gamma (\cos\varphi)^{\beta+1} (\operatorname{sen}\varphi)^{\gamma-1} +$$

$$\alpha a I^{2\alpha-1} b \beta (\cos\varphi)^{\beta-1} (\operatorname{sen}\varphi)^{\gamma+1} = 1$$

$$\alpha a I^{2\alpha-1} b (\cos\varphi)^{\beta-1} (\operatorname{sen}\varphi)^{\gamma-1} (\gamma \cos^2\varphi +$$

$$\beta \operatorname{sen}^2\varphi) = 1$$

allora deve essere

$$\beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

dunque

$$\frac{1}{2} ab = 1 \quad , \quad ab = 2$$

scegliamo

$$a = \sqrt{2}\, c \quad , \quad b = \frac{2}{c\sqrt{2}} \qquad \text{con } c \text{ costante}$$

$$p = c\sqrt{2I}\cos\varphi$$

$$q = \frac{2}{c\sqrt{2}}\sqrt{I}\,\text{sen}\,\varphi = \frac{\sqrt{2I}}{c}\,\text{sen}\,\varphi$$

Esercizio

Consideriamo la trasformazione

$$I = \frac{1}{2w}(p^2 + w^2q^2)$$

$$\varphi = \arctan\frac{wq}{p}$$

i) Si dimostri che è completamente canonica

Sol. i)

1 $$\{\varphi, I\} = 1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial I}{\partial p} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial I}{\partial q} = 1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{1}{1 + \frac{w^2q^2}{p^2}}\frac{w}{p} = \frac{pw}{p^2 + w^2q^2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial q} = \frac{w^2 2q}{2w} = wq$$

$$\frac{\partial I}{\partial p} = \frac{p}{w}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{1}{1+\frac{w^2q^2}{p^2}}\left(-\frac{wq}{p^2}\right) = -\frac{wq}{p^2+w^2q^2}$$

$$\frac{p\cancel{w}}{p^2+w^2q^2}\,\frac{p}{\cancel{w}} - \left(-\frac{wq}{p^2+w^2q^2}\right)wq =$$

$$\frac{p^2+w^2q^2}{p^2+w^2q^2} = 1 \quad \checkmark$$

2 La matrice jacobiana della trasformazione è simplettica

$$(p,q) \xrightarrow{\psi} (I,\varphi)$$

$$x = (p,q)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^T J \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = J \qquad \text{con } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial p} & \frac{\partial I}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/w & wq \\ -\frac{wq}{p^2+w^2q^2} & \frac{pw}{p^2+w^2q^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ \frac{\partial I}{\partial q} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial p} & \frac{\partial I}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial p} & \frac{\partial I}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial p} & -\frac{\partial \varphi}{\partial q} \\ \frac{\partial I}{\partial p} & \frac{\partial I}{\partial q} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^T J \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial I}{\partial p}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)} + \cancel{\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial I}{\partial p}} & \overbrace{\frac{\partial I}{\partial p}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial I}{\partial q}}^{=\{I,\varphi\} = -1} \\ \underbrace{\frac{\partial I}{\partial q}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial I}{\partial p}}_{=\{\varphi, I\} = 1} & \cancel{\frac{\partial I}{\partial q}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)} + \cancel{\frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial I}{\partial q}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ V

3 Condizione di Lie

cerchiamo una funzione $F(p,q)$ t.c.

$$I\, d\varphi - p\, dq = dF,$$

scriviamo $I\, d\varphi$

$$\frac{1}{2\cancel{w}}\cancel{(p^2+w^2q^2)}\left(\underbrace{\frac{p\cancel{w}}{\cancel{p^2+w^2q^2}}}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{\partial\varphi}{\partial q}}}dq+\underbrace{\left(-\frac{q\cancel{w}}{\cancel{p^2+w^2q^2}}\right)}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{\partial\varphi}{\partial p}}}dp\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(p\,dq-q\,dp)$$

allora

$$\frac{1}{2}(p\,dq-q\,dp)-p\,dq=-\frac{1}{2}(p\,dq+q\,dp)$$

e $F(p,q)=-\frac{1}{2}pq$ ✓

ii) Se ne determini una funzione generatrice $S(p,\varphi)$

Sol. ii)

Consideriamo le equazioni

$$q=\frac{\partial S}{\partial p}(p,\varphi) \qquad I=\frac{\partial S}{\partial \varphi}(p,\varphi)$$

$\varphi=\arctan\frac{wq}{p}$ da cui $q=\frac{p}{w}\tan\varphi$

e quindi $\frac{\partial S}{\partial p}=\frac{p}{w}\tan\varphi$

sostituendo $q(p,\varphi)$ scritta sopra in

$$I = \frac{1}{2\omega}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

si ha

$$I = \frac{1}{2\omega}\left(p^2 + \omega^2 \frac{p^2}{\omega^2}\tan^2\varphi\right)$$

$$I = \frac{p^2}{2\omega}(1 + \tan^2\varphi)$$

quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \varphi} = \dfrac{p^2}{2\omega^2}(1 + \tan^2\varphi) \quad * \\ \dfrac{\partial S}{\partial p} = \dfrac{p}{\omega}\tan\varphi \end{cases}$$

integrando trovo

$$S(p,\varphi) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{\omega}\tan\varphi + f(\varphi)$$

derivo rispetto a φ

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{\omega}(1 + \tan^2\varphi) + f'(\varphi)$$

confronto con *

scelgo $f = 0$

$$S(p,\varphi) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{\omega}\tan\varphi$$

verifico che

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p \partial \varphi} = \frac{p}{\omega}\left(1+\tan^2\varphi\right) \neq 0 \quad \text{per } p \neq 0.$$

Esercizio

Si scriva la funzione generatrice $S(I,q)$ della trasformazione (che è l'inversa di quella dell'esercizio precedente)

$$\begin{cases} p = \sqrt{2I\omega}\,\cos\varphi & * \\ q = \sqrt{\dfrac{2I}{\omega}}\,\operatorname{sen}\varphi & * \end{cases}$$

Sol.

$$\frac{\partial S}{\partial I} = \varphi\,, \qquad \frac{\partial S}{\partial q} = p$$

dalla seconda relazione ($*$) otteniamo

$$\operatorname{sen}\varphi = q\sqrt{\frac{\omega}{2I}} \longrightarrow \varphi = \operatorname{arcsen}\left(q\sqrt{\frac{\omega}{2I}}\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial I} = \operatorname{arcsen}\left(q\sqrt{\frac{\omega}{2I}}\right)$$

cerchiamo di scrivere p come funzione di q, I :

prima trovo

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{q^2 w}{2I}}$$

che sostituisco in (*)

$$p = \sqrt{2Iw}\sqrt{1 - \frac{q^2 w}{2I}} = \sqrt{2Iw - w^2 q^2}$$

Considero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2Iw - w^2 q^2} \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial I} = \operatorname{arcsen}\left(q\sqrt{\dfrac{w}{2I}}\right) \end{cases} \quad *$$

intigrando ottengo

$$S(I,q) = \int_0^q \sqrt{2Iw - w^2x^2}\,dx + f(I)$$

derivo rispetto ad I

$$\frac{\partial S}{\partial I} = \int_0^q \underbrace{\frac{\partial}{\partial I}\left(\sqrt{2Iw - w^2x^2}\right)}_{\displaystyle = \frac{2w}{2\sqrt{2Iw - w^2x^2}}} dx + f'(I) =$$

$$= \frac{w}{\sqrt{2Iw}} \int_0^q \frac{1}{\sqrt{1 - wx^2/(2I)}} \, dx + f'(I)$$

$$= \arcsin\left(\sqrt{\frac{w}{2I}}\, q\right) + f'(I)$$

confrontando questa espressione con quella riportata in (*) vediamo che f deve essere costante, scegliamo $f = 0$, da cui

$$S(I,q) = \int_0^q \sqrt{2Iw - w^2x^2}\, dx$$

Esercizio

Si consideri la trasformazione di coordinate

$$(p,q,t) \xrightarrow{\psi} (P,Q,t)$$

con $p,q \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, $P = R_t p$, $Q = R_t q$,

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

i) dimostrare che ψ è canonica

Sol. i)

Condizione di Lie: cerchiamo

$$G = G(p,q,t) \quad e \quad \alpha \neq 0 \quad t.c.$$

$$P \cdot \delta Q - \alpha p \cdot \delta q = \delta G$$

dove δ indica il differenziale a tempo bloccato

$$R_t p \cdot R_t \delta q - \alpha p \cdot \delta q = p \cdot \delta q - \alpha p \cdot \delta q$$

$$= (1-\alpha) p \cdot dq$$

per $\alpha = 1$ otteniamo

$$P \cdot \delta Q - p \cdot \delta q = 0$$

Essendo soddisfatta la cond. di Lie e dato che (p,q) sono definite in $\mathbb{R}^2$ possiamo concludere che ψ è una trasformazione canonica

ii) Estendere ψ ad una trasformazione canonica

$$(p, e, q, t) \xrightarrow{\tilde{\psi}} (P, \mathcal{E}, Q, t)$$

dove P, Q sono definite da ψ

$e, \mathcal{E} \in \mathbb{R}$ sono le nuove variabili coniugate al tempo

Sol. ii)

Dato che ψ è canonica, deve essere

$$\mathcal{E}(p,e,q,t) = e - H_0(p,q,t)$$

con $H_0 = K_0 \circ \psi$

e K_0 funzione hamiltoniana di $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1}$, dove

$$(p,q,t) \xrightarrow{\Phi} (P,Q)$$

Se $S = S(q,P,t)$ è una funzione generatrice di ψ, allora si ha

$$H_0(p,q,t) = \frac{\partial S}{\partial t}(q, P(p,q,t), t),$$

e quindi $\mathcal{E} = e - \frac{\partial S}{\partial t}$

1 Proviamo a trovare $\mathcal{E}$ attraverso una funzione generatrice $S(q,P,t)$:

$$\begin{cases} Q = \dfrac{\partial S}{\partial P} = R_t q \\[2ex] p = \dfrac{\partial S}{\partial q} = R_t^T P \end{cases}$$

intigrando la prima relazione si ha

$$S(q, P, t) = R_t q \cdot P + f(q, t)$$

intigrando la seconda si ha

$$S(q, P, t) = \overbrace{R_t^T P \cdot q}^{= R_t q \cdot P} + g(P, t)$$

Segue che $S(q, P, t) = R_t q \cdot P$

$$\frac{\partial (R_t q)}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\, t & -\cos t \\ \cos t & -\text{sen}\, t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -q_1 \text{sen}\, t - q_2 \cos t \\ q_1 \cos t - q_2 \text{sen}\, t \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial (R_t q)}{\partial t} \cdot P = P_1 (-q_1 \text{sen}\, t - q_2 \cos t) + P_2 (q_1 \cos t - q_2 \text{sen}\, t)$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, P(p, q, t), t) =$$

$$(p_1 \cos t - p_2 \text{sen}\, t)(-q_1 \text{sen}\, t - q_2 \cos t) +$$

$$(p_1 \text{sen}\, t + p_2 \cos t)(q_1 \cos t - q_2 \text{sen}\, t) =$$

$$-p_1 q_1 (\cancel{\text{sen}\, t} \cos t) - p_1 q_2 \cos^2 t + p_2 q_1 \text{sen}^2 t +$$

$$p_2 q_2 (\cancel{\operatorname{sen} t} \cos t) + p_1 q_1 (\cancel{\operatorname{sen} t} \cos t) - p_1 q_2 \operatorname{sen}^2 t +$$

$$p_2 q_1 \cos^2 t - p_2 q_2 (\cancel{\operatorname{sen} t} \cos t) =$$

$$p_2 q_1 - p_1 q_2$$

$$\mathcal{E}(p, e, q, t) = e - (p_2 q_1 - p_1 q_2)$$

Potevamo evitare diversi conti notando che

$$\frac{\partial R_t}{\partial t} = R_t J, \quad \text{con} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, P, t) = P \cdot R_t J q$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, P(p,q,t), t) = R_t p \cdot R_t J q =$$

$$p^T \underbrace{R_t^T R_t}_{= I} J q$$

$$= p^T J q = p \cdot \underbrace{J q}_{=} = p_2 q_1 - q_2 p_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo trovato che

$$\frac{\partial S}{\partial t}(p, q, t) = p_2 q_1 - q_2 p_1$$

2 Proviamo ora a ricavare l'espressione di $\mathcal{E}(p,e,q,t)$ dalla relazione

$$\mathcal{E}(p,e,q,t) = e - H_0(p,q,t)$$

$$H_0 = K_0 \circ \psi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1}$$

$$\Phi = (R_t p, R_t q)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (R_t J p, R_t J q) \quad e$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} = (R_t J R_t^T P, R_t J R_t^T Q)$$

poiché R_t è una matrice simplettica $\forall t \in \mathbb{R}$, dato che ψ è canonica, vale

$$R_t J R_t^T = R_t^T J R_t = J$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} = (JP, JQ)$$

$$\begin{cases} \dot{P} = JP = -\dfrac{\partial K_0}{\partial Q} \\ \dot{Q} = JQ = \dfrac{\partial K_0}{\partial P} \end{cases}$$

segue che $K_0 = P \cdot JQ$

$$H_0 = K_0 \circ \psi = R_t p \cdot J R_t q$$

$$= p^T R_t^T J R_t q = p \cdot J q$$

$$\mathcal{E}(p,e,q,t) = e - H_0(p,q,t) =$$

$$e - (p_2 q_1 - q_2 p_1) =$$

$$e - p_2 q_1 + q_2 p_1$$

iii) Scrivere il campo vettoriale

$$X = (-|q|^{-3} q, 0, p, 1)^T$$

nelle nuove variabili $(P, \mathcal{E}, Q, t)$

Sol. iii)

$$\tilde{\psi}^* X = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} X \circ \tilde{\psi}^{-1}$$

con $\tilde{x} = (p, e, q, t)$

ricordiamo le relazioni

$$P = R_t p, \quad Q = R_t q \quad e$$

$$\mathcal{E} = e - q_1 p_2 + q_2 p_1$$

Calcoliamo prima $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}} = \begin{pmatrix} R_t & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & O_2 & R_t J p \\ q_2 \quad -q_1 & 1 & -p_2 \quad p_1 & 0 \\ O_2 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & R_t & R_t J q \\ 0 \quad\; 0 & 0 & 0 \quad\; 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}} X =$$

$$\begin{pmatrix} R_t & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & O_2 & R_t J p \\ q_2 \quad -q_1 & 1 & -p_2 \quad p_1 & 0 \\ O_2 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & R_t & R_t J q \\ 0 \quad\; 0 & 0 & 0 \quad\; 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -|q|^{-3} q \\ 0 \\ p \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -R_t q / |q|^3 + R_t J p \\ -|q|^{-3} (q_1 q_2 - q_2 q_1) - p_2 p_1 + p_1 p_2 \\ R_t p + R_t J q \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} X \circ \psi^{-1} = \begin{pmatrix} -R_t R_t^T Q / |Q|^3 + R_t \mathcal{J} R_t P \\ 0 \\ R_t R_t^T P + R_t \mathcal{J} R_t^T Q \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -Q/|Q|^3 + \mathcal{J} P \\ 0 \\ P + \mathcal{J} Q \\ 1 \end{pmatrix}$$

si può notare che questo è il campo vettoriale hamiltoniano corrispondente a

$$\tilde{K}(P, \mathcal{E}, Q, t) = \tilde{H} \circ \tilde{\psi}^{-1}$$

con $\tilde{H} = H + e$, $\quad H(p,q) = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{|q|}$

$$\tilde{H} = e + \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{|q|}$$

per verificare questa affermazione procediamo come segue

$$\mathcal{E}(p,e,q,t) = e - (p_2 q_1 - q_2 p_1)$$

$$e = \mathcal{E} + p \cdot J q = \mathcal{E} + R_t^T P \cdot J R_t^T Q$$

$$= \mathcal{E} + \underbrace{P^T R_t}_{=p} J \underbrace{R_t^T Q}_{=q}$$

$$= \mathcal{E} + P \cdot J Q$$

$$\underbrace{\tilde{H} \circ \tilde{\psi}^{-1}}_{=\tilde{K}} = \mathcal{E} + \underbrace{P \cdot J Q}_{= -Q^T J P = -Q \cdot J P} + \frac{1}{2}|P|^2 - \frac{1}{|Q|}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial Q} = J P - \frac{Q}{|Q|^3}$$

$$\frac{\partial |Q|^{-1}}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q}\left((Q_1^2 + Q_2^2)^{-1/2}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2)^{-3/2}\, 2Q = -Q/|Q|^3$$

$$\dot{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial t} = 0,$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial P} = J Q + P, \qquad \dot{t} = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \mathcal{E}} = 1$$