Continuazione dell'esercizio

ii) Sia $P(0) \neq N^{\pm}$,
usiamo coord. sferiche $(\alpha, \delta) \in [0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$;
descrivere le possibili traiettorie.

Sol. ii)

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$$

$$\begin{cases} x = R \cos\delta \cos\alpha \\ y = R \cos\delta \operatorname{sen}\alpha \\ z = R \operatorname{sen}\delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\delta} \operatorname{sen}\delta \cos\alpha - R\dot{\alpha} \cos\delta \operatorname{sen}\alpha \\ \dot{y} = -R\dot{\delta} \operatorname{sen}\delta \cos\alpha + R\dot{\alpha} \cos\delta \cos\alpha \\ \dot{z} = R\dot{\delta} \cos\delta \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\alpha}^2 \cos^2\delta + \dot{\delta}^2)$$

$$V = mgR \operatorname{sen}\delta$$

L non dipende da α, $L = \tilde{L}_2 + \tilde{L}_0$

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = mR^2 \dot{\alpha} \cos^2\delta, \quad p_\alpha = c$$

$$\dot{\alpha} = \frac{c}{m R^2 \cos^2 \delta}$$

$$L_R^{(c)} = \left. \left(\tilde{L}_0 - \tilde{L}_2 \right) \right|_{\dot{\alpha} = c/(m R^2 \cos^2 \delta)}$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\delta}^2 - m g R \operatorname{sen} \delta - \frac{1}{2} m \cancel{R^2} \cancel{\cos^2} \delta \frac{c^2}{m^2 R^{\cancel{4}\,2} \cos^{\cancel{4}\,2} \delta}$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\delta}^2 - m g R \operatorname{sen} \delta - \frac{1}{2} \frac{c^2}{m R^2 \cos^2 \delta}$$

$$V_{eff}^{(c)}(\delta) = m g R \operatorname{sen} \delta + \frac{1}{2} \frac{c^2}{m R^2 \cos^2 \delta}$$

$$\frac{d V_{eff}^{(c)}(\delta)}{d \delta} = m g R \cos \delta + \frac{c^2}{m R^2} \frac{\tan \delta}{\cos^2 \delta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \delta} \Big(\underbrace{m g R}_{= A} \cos^3 \delta + \underbrace{\frac{c^2}{m R^2}}_{= B} \tan \delta \Big)$$

$$\longrightarrow \quad A \cos^3 \delta = - B \tan \delta$$

1) $B \neq 0$ (cioè $c \neq 0$)

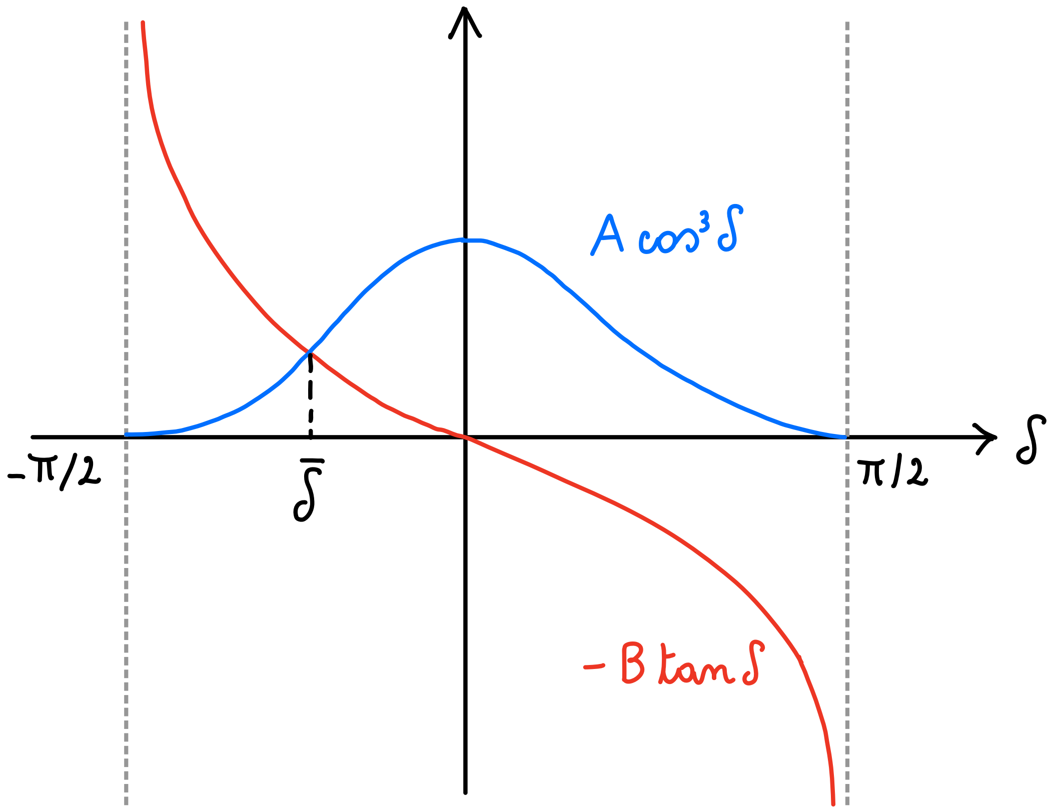
$$f(\delta) = \cos^3 \delta \qquad f(\pm \pi/2) = 0$$

$$f'(\delta) = 3 (\cos \delta)^2 (- \operatorname{sen} \delta) = 0$$

per $\delta = 0$ e $\delta = \pm \pi/2$

ndo che per $\delta \in (-\pi/2, 0)$ si ha $f'(\delta) > 0$

e per $\delta \in (0, \pi/2)$ si ha $f'(\delta) < 0$

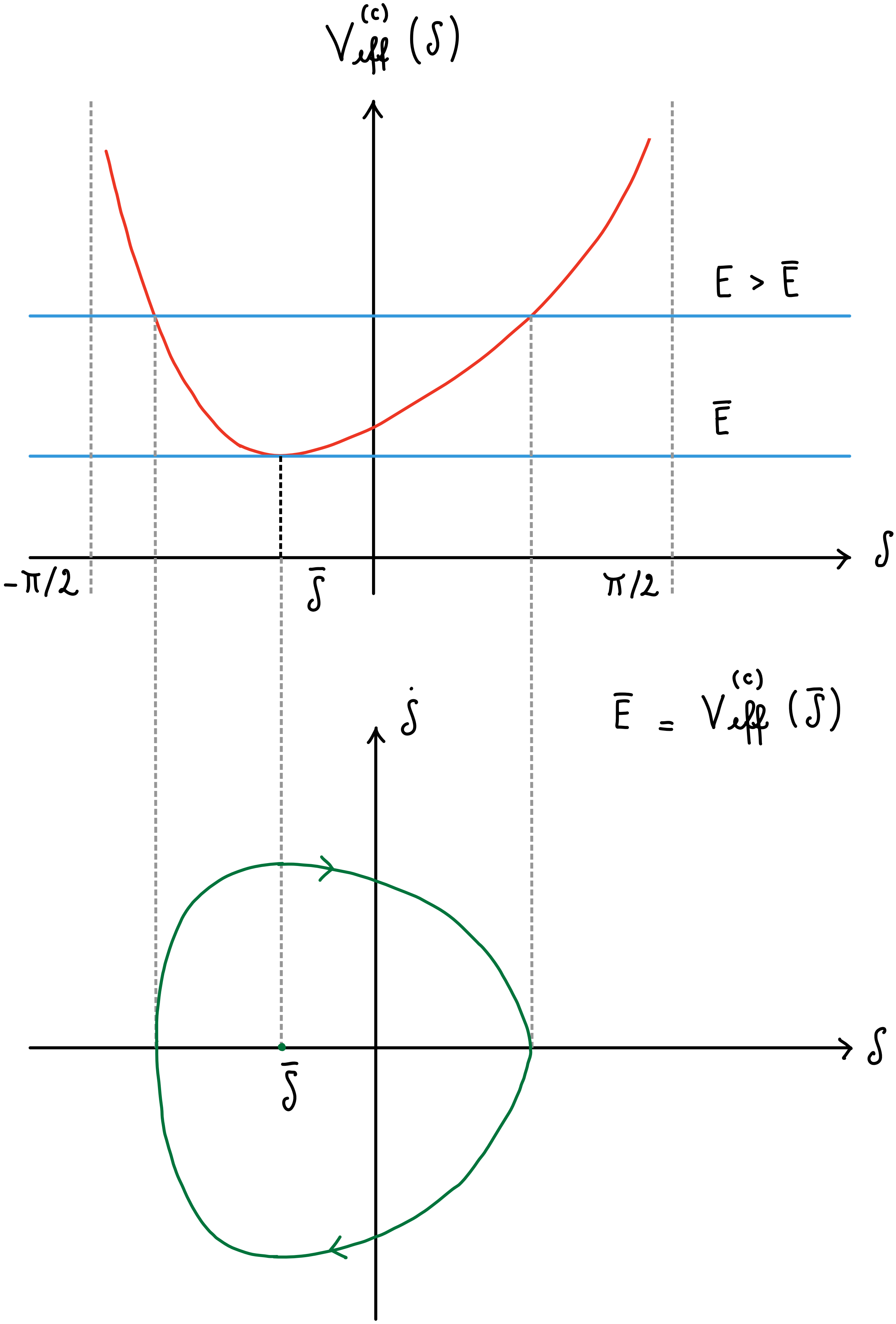


Esiste $\bar{\delta}$: $-\pi/2 < \bar{\delta} < 0$ t. c.

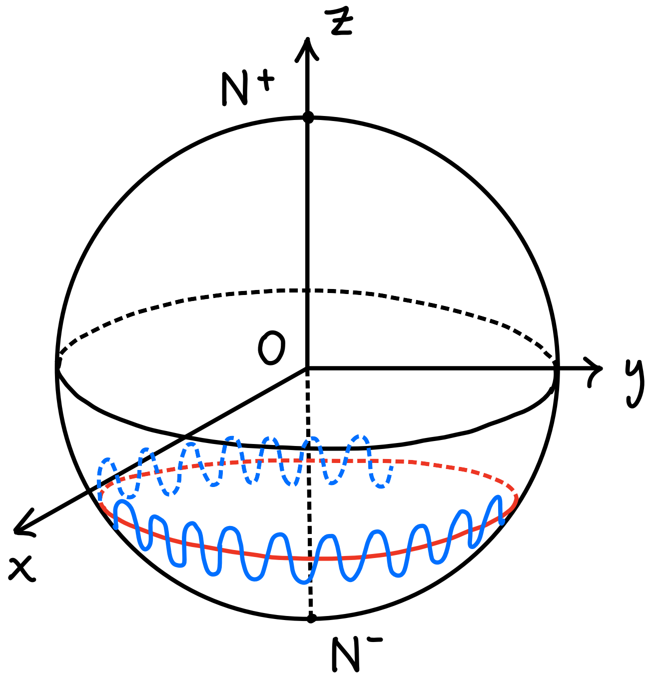
$$\frac{d V_{eff}^{(c)}}{d\delta}(\bar{\delta}) = 0$$

Dal ritratto di fase riportato nella prossima pagina si vede che

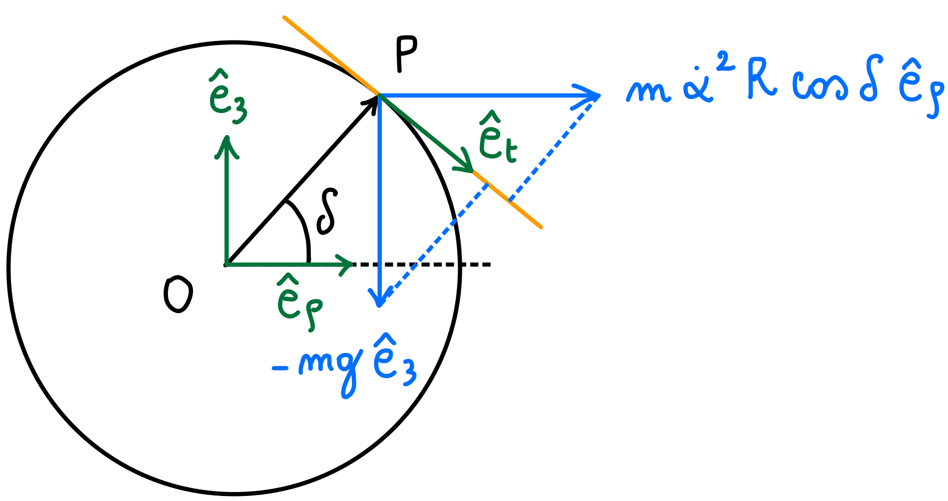
esiste un'orbita periodica con $\delta(t) = \bar{\delta}$ e poi esiste una famiglia di orbite quasi periodiche



Nello spazio delle configurazioni le traiettorie appaiono come segue



Diamo una spiegazione fisica dell'esistenza dell'orbita periodica. Consideriamo il piano che ad ogni istante contiene P e l'asse Oz. Rispetto ad un sistema di riferimento solidale a questo piano le forze che agiscono su m sono quella di gravità e quella centrifuga.



Proiettiamo tali forze lungo $\hat{e}_t$ e poniamo la somma delle due proiezioni uguale a 0

$$-mg\,\hat{e}_3\cdot\hat{e}_t + m\dot{\alpha}^2 R\cos\delta\,\hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_t = 0$$

$$mg\cos\delta + m\dot{\alpha}^2 R\cos\delta\,\mathrm{sen}\,\delta = 0$$

$$mg\cos\delta + \cancel{m}\cancel{R}\,\frac{c^2}{m^{\cancel{2}}R^{\cancel{4}\,3}\cos^{\cancel{4}\,3}\delta}\,\cancel{\cos}\delta\,\mathrm{sen}\,\delta = 0$$

$$\frac{1}{\cos^2\delta}\left(mg\cos^3\delta + \frac{c^2}{mR^3}\tan\delta\right) = 0$$

che è la stessa equazione scritta per trovare i punti critici di $V_{eff}^{(c)}(\delta)$.

2) $B = 0$ (cioè $c = 0$)

$$V_{eff}(\delta) = mgR\,\mathrm{sen}\,\delta$$

si ottiene la dinamica di un pendolo matematico di lunghezza R; il moto avviene lungo il meridiano definito dal piano contenente $P-O$ e Oz. A seconda della velocità iniziale potremo avere delle librazioni di δ o delle rotazioni di δ.

Esercizio (30 gennaio 2018)

Consideriamo un punto materiale P di massa m vincolato a muoversi sulla superficie di equazione

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2$$

soggetto ad una forza conservativa con energia potenziale

$$V(z) = -\frac{k^2}{1+z^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

i) Scrivere le equazioni di Eulero - Lagrange nelle coordinate cilindriche (z, θ) e trovare $\bar{\gamma}(t)$ nel caso $k > 1$ con c.i.

$$z(0) = \sqrt{k-1}, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0$$

$$\dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{2}{m}}.$$

Sol. i)

$$\begin{cases} x = r(z)\cos\theta \\ y = r(z)\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad r(z) = \sqrt{1+z^2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = r'(z)\,\dot{z}\cos\theta - r(z)\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \dot{y} = r'(z)\,\dot{z}\,\mathrm{sen}\,\theta - r(z)\,\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m \left[(1 + (r'(z))^2)\, \dot{z}^2 + (r(z))^2 \dot{\theta}^2 \right]$$

$$L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k^2}{1+z^2}$$

$$L(z,\dot{z},\dot{\theta}) = T(z,\dot{z},\dot{\theta}) - V(z)$$

θ è una variabile ciclica

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m (r(z))^2 \dot{\theta} \,, \quad p_\theta = c$$

$$\dot{\theta} = \frac{c}{m(r(z))^2}$$

Lagrangiana ridotta

$$L_R^{(c)} = \left(\tilde{L}_0 - \tilde{L}_2 \right) \Big|_{\dot{\theta} = c/(m(r(z))^2)}$$

$$L_R^{(c)}(z,\dot{z}) = \frac{1}{2} m \left[1 + (r'(z))^2 \right] \dot{z}^2 + \frac{k^2}{1+z^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\cancel{m}\,(r(z))^2\,\frac{c^2}{m^{\cancel{2}}\,(r(z))^{\cancel{4}\,2}} =$$

$$\frac{1}{2}m\left[1+(r'(z))^2\right]\dot{z}^2 + \frac{k^2}{1+z^2} - \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{m\,(r(z))^2}$$

Calcoliamo l'espressione c dalle c.i.

$$c = m\,\underbrace{(r(0))^2}_{\substack{\parallel \\ 1+z^2(0) = 1+k-1 = k}}\,\dot{\theta}(0) = mk\sqrt{\frac{2}{m}} = k\sqrt{2m}$$

$$L_R(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}m\left[1+(r'(z))^2\right]\dot{z}^2 + \frac{k^2}{1+z^2}$$

$$-\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{k^2\,\cancel{2}\,\cancel{m}}{\cancel{m}\,(1+z^2)}$$

$$L_R(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}m\left[1+(r'(z))^2\right]\dot{z}^2$$

$$r(z) = \sqrt{1+z^2}$$

$$r'(z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$L_R(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}m\left(1+\frac{z^2}{1+z^2}\right)\dot{z}^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{1+2z^2}{1+z^2}\right)\dot{z}^2$$

introduco $\beta(z) = \dfrac{1+2z^2}{1+z^2}$

$$\frac{\partial L_R}{\partial \dot z} = m\beta(z)\dot z$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_R}{\partial \dot z}\right) = m\beta(z)\ddot z + m\dot z^2\beta'(z)$$

$$\beta'(z) = \frac{4z(1+z^2)-(1+2z^2)2z}{(1+z^2)^2} = \frac{2z}{(1+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial L_R}{\partial z} = \frac{1}{2}m\beta'(z)\dot z^2 = \frac{mz\dot z^2}{(1+z^2)^2}$$

Si ottiene

$$m\frac{1+2z^2}{1+z^2}\ddot z + \frac{2mz\dot z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{mz\dot z^2}{(1+z^2)^2}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{1+2z^2}{1+z^2}\ddot z = -\dfrac{mz\dot z^2}{(1+z^2)^2} \\ \\ z(0) = \sqrt{k-1} \qquad \dot z(0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione è $z(t) = \sqrt{k-1}$.

Si poteva giungere allo stesso risultato sfruttando la conservazione dell' energia.

Introduco l' hamiltoniana H attraverso la trasformata di Legendre

$$H(p_z, z) = \left[p_z \dot{z} - L_R(z, \dot{z}) \right] \Big|_{\dot{z} = f(p_z, z)}$$

$$p_z = \frac{\partial L_R}{\partial \dot{z}} = m \beta(z) \dot{z}$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m \beta(z)} \qquad (\beta(z) \neq 0)$$

$$H(p_z, z) = \frac{p_z^2}{m \beta(z)} - \frac{1}{2} m \beta(z) \frac{p_z^2}{m^2 \beta^2(z)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p_z^2}{m \beta(z)}$$

Notiamo che H (che coincide con l' energia meccanica del sistema) è un integrale primo del moto, allora

$$H(p_z(t), z(t)) = H(p_z(0), z(0)) = 0$$

infatti $p_z(0) = 0$ dato che $\dot{z}(0) = 0$.

Segue che $p_z(t) = 0$, cioè $\dot{z}(t) = 0$

e $z(t) = z(0) = \sqrt{k-1}$.

Determiniamo ora $\theta(t)$

$$m\dot{\theta}(1+z^2) = c = k\sqrt{2m}$$

$$m\dot{\theta}(1+k-1) = k\sqrt{2m}$$

$$mk\dot{\theta} = k\sqrt{2m}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{m}} \longrightarrow \theta(t) = \sqrt{\frac{2}{m}}\, t$$

La soluzione cercata è

$$\bar{\gamma}(t) = (\bar{z}(t), \bar{\theta}(t)) = \left(\sqrt{k-1}, \sqrt{\frac{2}{k}}\, t\right)$$

ii) $\bar{z}(t)$ ha valori coniugati a $t_0 = 0$ per $t > 0$?

(rispondere usando la lagrangiana $L_R(z,\dot{z})$

che si ottiene eliminando θ nelle equazioni)

Sol. ii)

Si chiede di usare la lagrangiana ridotta

$$L_R(z,\dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\frac{1+2z^2}{1+z^2}\right)\dot{z}^2$$

Consideriamo il problema di Cauchy

$$
\begin{cases}
-\dfrac{d\left(a(t)\,\dot{\eta}\right)}{dt} + \left(c(t) - \dot{b}(t)\right)\eta = 0 \\[2ex]
\eta(0) = 0 \\[1ex]
\dot{\eta}(0) = 1
\end{cases}
$$

$$
a(t) = \frac{1}{2} L_{R,\dot{z}\dot{z}}\left(\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{1 + 2(\bar{z}(t))^2}{1 + (\bar{z}(t))^2}\right)
$$

$$
= \frac{m}{2}\left(\frac{1 + 2k - 2}{k}\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{2k-1}{k}\right) > 0 \quad (k > 1)
$$

la condizione di Legendre stretta è soddisfatta

$$
b(t) = \frac{1}{2} L_{R,z\dot{z}}\left(\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)\right) = 0
$$

$$
c(t) = \frac{1}{2} L_{R,zz}\left(\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)\right) = 0
$$

Risulta

$$
-\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\,\frac{2k-1}{k}\,\dot{\eta}\right) = 0
$$

$$
\ddot{\eta} = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \dot{\eta}(0) = 1
$$

$\eta(t) = t$, poichè per $t > 0$ si ha $\eta(t) > 0$

non ci sono valori coniugati a $t_0 = 0$

per $t > 0$.

iii) Dire se per $k = 0$ esistono soluzioni con

c. i. $z(0) > 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 1$ tali che

$z(t) \longrightarrow -\infty$, $t \longrightarrow +\infty$

Sol. iii)

Mostriamo due modi di rispondere

1) Usiamo l' integrale di Clairaut

$$\mathcal{C} = \frac{m\,(P-O) \times \vec{v} \cdot \hat{e}_3}{|\vec{v}|},$$

il numeratore è costante perchè è la componente

del momento angolare di P rispetto ad O

lungo la direzione di Oz ;

il denominatore è costante perchè essendo

$k = 0$ si ha che l'energia meccanica coincide con

l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 .$$

Consideriamo la superficie su cui si muove il punto

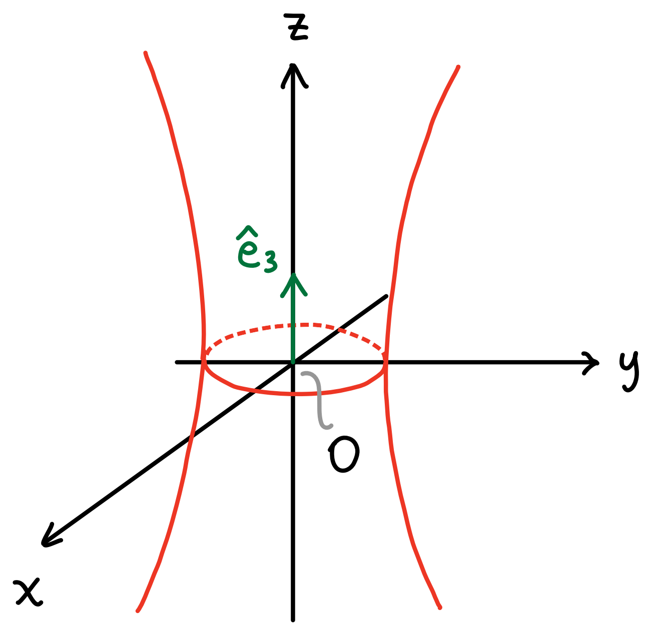
$r(z) = \sqrt{1+z^2}$

$r(0) = 1$

$r(z) > 1$ se $z \neq 0$

$r'(z) = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}} = 0$

per $z = 0$



Riscriviamo $\mathcal{C}$ come segue

$\mathcal{C}(z) = m\,\hat{e}_3 \times (P-O) \cdot \hat{t}$

con $\hat{t} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$\mathcal{C}(z) = m\,r(z)\,\hat{u} \cdot \hat{t}$ dove $r(z)\,\hat{u} = \hat{e}_3 \times (P-O)$

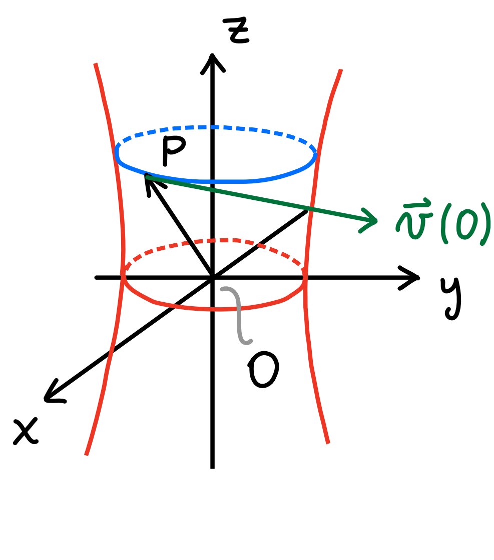
All' istante iniziale dato che $\dot{z}(0) = 0$ si ha

$\vec{v}(0) \perp \hat{e}_3$ e

$\vec{v}(0) \perp P-O$

perciò $\hat{t} \parallel \hat{u}$

all' istante iniziale



Otteniamo

$$\mathcal{C} = m r(z(t))\, \hat{u}(t) \cdot \hat{t}(t) =$$

$$m r(z_0)$$

con $z_0 = z(0) > 0$

Assumiamo che ad un certo istante si abbia $z = 0$, allora deve essere

$$r(0) \underbrace{\cos(\alpha(0))}_{\hat{u}(0) \cdot \hat{t}(0)} = r(z_0) > 1 ,$$

ma $r(0) = 1$, quindi

$$\cos(\alpha(0)) > 1$$

che è impossibile.

2) Consideriamo l'energia meccanica

$$E(z, \dot{z}) = \frac{m}{2} \left(\frac{1 + 2z^2}{1 + z^2} \right) \dot{z}^2 + \frac{c^2}{2m(1+z^2)}$$

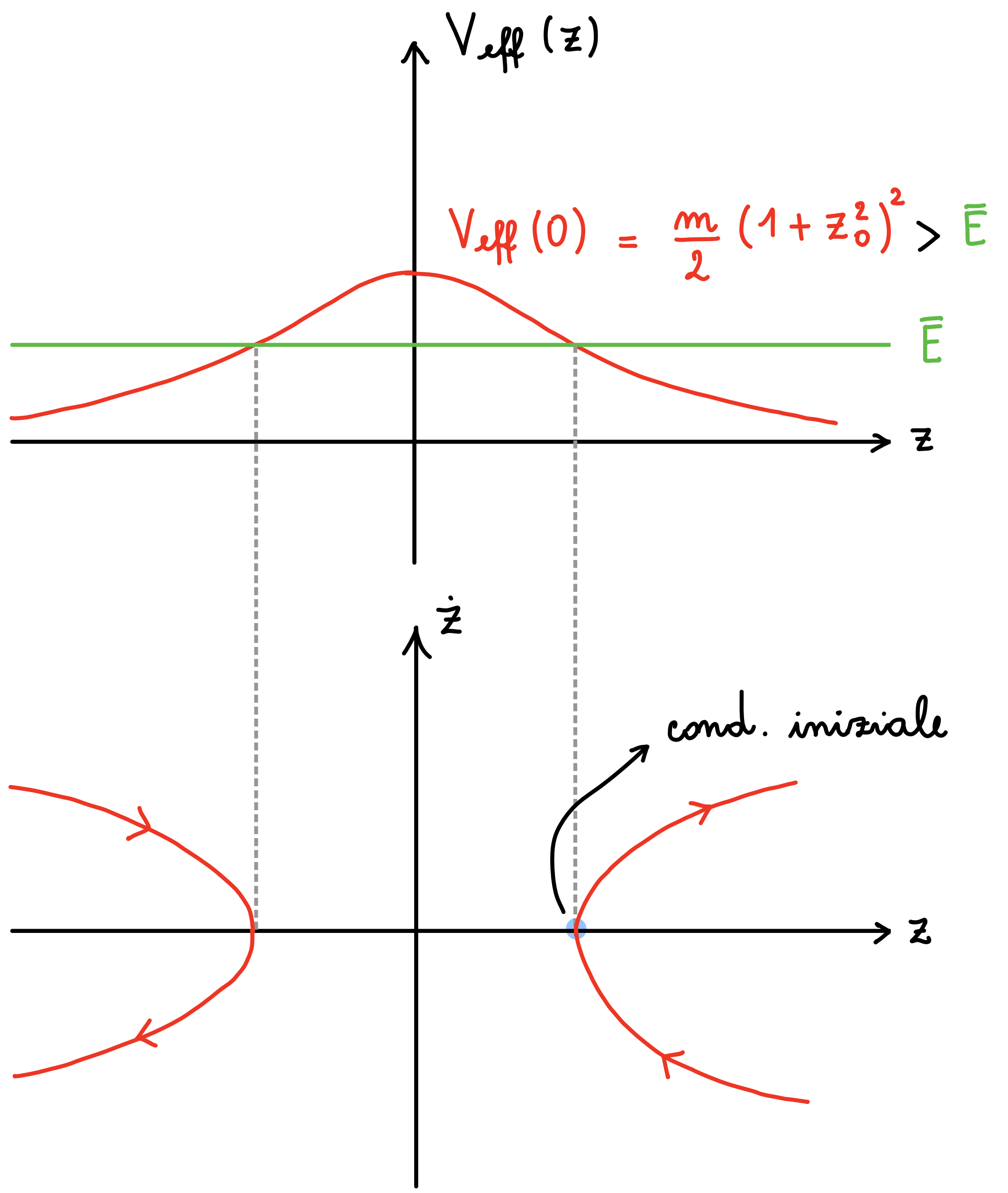
e calcoliamone l'espressione in funzione delle c.i.

$$c = m(1 + z_0^2) \qquad (\dot{\theta}(0) = 1)$$

$$\bar{E} = \frac{m^2 (1+z_0^2)^2}{2m(1+z_0^2)} = \frac{m}{2}(1+z_0^2) > 0$$

Introduciamo la funzione $V_{eff}(z)$

$$V_{eff}(z) = \frac{c^2}{2m(1+z^2)} = \frac{m}{2}\frac{(1+z_0^2)^2}{1+z^2}$$



Si conclude che non esistono soluzioni tali che

$z(t) \longrightarrow -\infty$ per $t \longrightarrow +\infty$.