Esercizio (28 gennaio 2020)

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) =$$
$$a I_1^2 + b I_2^2 + c I_3^2 + \varepsilon \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$ e $0 < \varepsilon \ll 1$

i) Trovare due integrali primi indipendenti come combinazioni lineari di I_1, I_2, I_3

Sol.

Scriviamo il sistema hamiltoniano definito da H_ε

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \varepsilon \operatorname{sen}(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3) \\ \dot{I}_2 = 2\varepsilon \operatorname{sen}(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3) \\ \dot{I}_3 = 3\varepsilon \operatorname{sen}(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3) \\ \dot{\varphi}_1 = 2a I_1 \\ \dot{\varphi}_2 = 2b I_2 \\ \dot{\varphi}_3 = 2c I_3 \end{cases}$$

Si vede che

$$\mathcal{J}_1 = 2I_1 - I_2 \quad (2\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0)$$
$$\mathcal{J}_2 = I_1 + I_2 - I_3 \quad (\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0)$$

sono due integrali primi in involuzione

$$\{J_1, J_2\} = 0$$

e indipendenti

$$\frac{\partial(J_1, J_2)}{\partial(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il rango di questa matrice è 2

ii) Determinare dei valori di a, b, c per cui esistono dei moti che non soddisfano il principio della media

Sol.

$$h(I) = a I_1^2 + b I_2^2 + c I_3^2$$

$$\omega = \frac{\partial h}{\partial I} = (2a I_1, 2b I_2, 2c I_3)$$

$$f(\varphi) = \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3) =$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{i(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3)} + e^{-i(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3)}\right)$$

$$f(\varphi) = \hat{f}_k e^{ik\cdot\varphi} + \hat{f}_{-k} e^{-ik\cdot\varphi}$$

con $k = (1, 2, 3)$

imponiamo la condizione di risonanza

$$\omega \cdot k = 0$$

$$2a I_1 + 4b I_2 + 6c I_3 = 0$$

e cerchiamo dei moti che la soddisfino

A tal fine è utile cercare un integrale primo che si scriva come combinazione lineare di I_1, I_2, I_3

Ad esempio

$$\mathcal{J} = I_1 + I_2 - I_3$$

è un integrale primo del campo vettoriale definito da H_ε

L'idea è allora di porre

$$\mathcal{J} = \lambda\, \omega \cdot k, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e di scegliere condizioni iniziali delle azioni tali che $\mathcal{J} = 0$ e quindi $\omega \cdot k = 0$

Poniamo

$$(2a, 4b, 6c) = \lambda (1, 1, -1)$$

e scegliamo per semplicità $\lambda = 1$; si ottiene

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad c = -\frac{1}{6}$$

Allora con questi valori di a, b, c, i moti con condizioni iniziali $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)$ qualsiasi e $I_1(0), I_2(0), I_3(0)$ tali che

$$I_1(0) + I_2(0) - I_3(0) = 0$$

mantengono la relazione di risonanza

$$\omega \cdot k = I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Scriviamo esplicitamente questi moti notiamo che

$$\dot{\varphi}_1 + 2\dot{\varphi}_2 + 3\dot{\varphi}_3 = 2\left(\frac{1}{2}\right)I_1 + 4\left(\frac{1}{4}\right)I_2$$

$$+ 6\left(-\frac{1}{6}\right)I_3 = I_1 + I_2 - I_3 = \mathcal{S} = 0$$

cioè l'angolo risonante

$$\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3 := \alpha$$

rimane costante

$$\begin{cases} I_1(t) = I_1(0) + \varepsilon t \operatorname{sen}\alpha \\ I_2(t) = I_2(0) + 2\varepsilon t \operatorname{sen}\alpha \\ I_3(t) = I_3(0) + 3\varepsilon t \operatorname{sen}\alpha \\ \varphi_1(t) = \varphi_1(0) + I_1(0)t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \operatorname{sen}\alpha \\ \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + \frac{1}{2}I_2(0)t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \operatorname{sen}\alpha \\ \varphi_3(t) = \varphi_3(0) - \frac{1}{3}I_3(0)t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

questi moti non soddisfano il principio della media

iii) Si assuma $a = b = c = 1$, determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\varepsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che $K_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Psi_\varepsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ε. Scrivere anche la forma normale non risonante

Sol.

$$H_\varepsilon = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \varepsilon \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3)$$

$$\omega = \frac{\partial h}{\partial I} = (2I_1, 2I_2, 2I_3)$$

$$f(\varphi) = \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3)$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{i(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3)} + e^{-i(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3)}\right)$$

$$f(\varphi) = \sum_{k \in K} \hat{f}_k e^{ik\cdot\varphi}$$

dove $K = \{(1,2,3), -(1,2,3)\}$

$$\hat{f}_{(1,2,3)} = \frac{1}{2}, \quad \hat{f}_{-(1,2,3)} = \frac{1}{2}$$

possiamo calcolare

$$W(\varphi, \tilde{I}) = \sum_{k \in K} \hat{W}_k(\tilde{I}) e^{ik\cdot\varphi}, \quad \text{con}$$

$$\hat{W}_{(1,2,3)} = -\frac{\hat{f}_{(1,2,3)}}{i\,2(\tilde{I}_1 + 2\tilde{I}_2 + 3\tilde{I}_3)} = -\frac{1}{4i(\tilde{I}_1 + 2\tilde{I}_2 + 3\tilde{I}_3)}$$

$$\hat{W}_{-(1,2,3)} = -\frac{\hat{f}_{-(1,2,3)}}{-i\,2(\tilde{I}_1 + 2\tilde{I}_2 + 3\tilde{I}_3)} = \frac{1}{4i(\tilde{I}_1 + 2\tilde{I}_2 + 3\tilde{I}_3)}$$

otteniamo $$W(\varphi, \tilde{I}) = -\frac{\operatorname{sen}(\varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3)}{2(\tilde{I}_1 + 2\tilde{I}_2 + 3\tilde{I}_3)}$$

e $S(\varphi, \tilde{I}; \varepsilon) = \varphi \cdot \tilde{I} + \varepsilon W(\varphi, \tilde{I})$

è la funzione generatrice cercata

La forma normale non risonante fino al primo ordine in ε è

$$K_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = \tilde{I}_1^2 + \tilde{I}_2^2 + \tilde{I}_3^2 + O(\varepsilon^2)$$

Esercizio (18 febbraio 2020)

Trovare un valore di $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tale che il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H(I, \varphi) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2 - I_3^2) - \varepsilon \cos(k \cdot \varphi)$$

con $I = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3$, $0 < \varepsilon \ll 1$, non soddisfi il principio della media al primo ordine in ε, descrivendo una famiglia di moti che lo viola

Sol.

Scriviamo il sistema hamiltoniano

$$\dot{I}_1 = -\varepsilon k_1 \operatorname{sen}(k \cdot \varphi)$$

$$\dot{I}_2 = -\varepsilon k_2 \operatorname{sen}(k \cdot \varphi)$$

$$\dot{I}_3 = -\varepsilon k_3 \operatorname{sen}(k \cdot \varphi)$$

$$\dot{\varphi}_1 = I_1$$

$$\dot{\varphi}_2 = I_2$$

$$\dot{\varphi}_3 = -I_3$$

il vettore delle frequenze è $\omega = \dfrac{\partial h}{\partial I}$,

$$h(I) = \frac{1}{2}\left(I_1^2 + I_2^2 - I_3^2\right)$$

$$\omega = (I_1, I_2, -I_3)$$

$$f(\varphi) = -\cos(k\cdot\varphi) = -\frac{1}{2}\left(e^{ik\cdot\varphi} + e^{-ik\cdot\varphi}\right)$$

Consideriamo la condizione di risonanza

$\omega \cdot k = 0$, cioè

$$k_1 I_1 + k_2 I_2 - k_3 I_3 = 0$$

Mostriamo questa volta due modi di procedere

1) Come nell'esercizio precedente:

Troviamo un integrale primo del moto dato dalla combinazione lineare di I_1, I_2, I_3; ad esempio

$$\frac{I_1}{k_1} + \frac{I_2}{k_2} - 2\frac{I_3}{k_3}$$

è un integrale primo. Ragionando come prima imponiamo che i due vettori

$$(k_1, k_2, -k_3)$$

$$\left(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, -\frac{1}{k_3}\right)$$

siano paralleli, abbiamo

$$\begin{cases} k_1^2 = \lambda \\ k_2^2 = \lambda \\ k_3^2 = 2\lambda \end{cases}$$

da cui troviamo $k_1^2 + k_2^2 = k_3^2$ che è soddisfatta per esempio da

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 4, \quad k_3 = 5$$

Dato che vogliamo che $\omega \cdot k = 0$ si conservi lungo il moto, imponiamo direttamente che la sua derivata temporale sia nulla

$$\dot{\omega} \cdot k = 0$$

$$k_1 \dot{I}_1 + k_2 \dot{I}_2 - k_3 \dot{I}_3 = 0$$

e usando le equazioni di Hamilton otteniamo

$$-\varepsilon\left(k_1^2 + k_2^2 - k_3^2\right) \operatorname{sen}(k \cdot \varphi) = 0$$

$$k_1^2 + k_2^2 = k_3^2$$

questa equazione è soddisfatta dalle terne pitagoriche, prendiamo

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 4, \quad k_3 = 5$$

Allora $\omega \cdot k = 3 I_1 + 4 I_2 - 5 I_3$

è un integrale primo; scegliendo condizioni iniziali $I_1(0), I_2(0), I_3(0)$ tali che

$$\mathcal{J} = 3I_1(0) + 4I_2(0) - 5I_3(0) = 0$$

la condizione di risonanza è mantenuta lungo il moto

Notiamo che inoltre si ha

$$3\dot{\varphi}_1 + 4\dot{\varphi}_2 + 5\dot{\varphi}_3 =$$

$$3I_1 + 4I_2 - 5I_3 = 0$$

cioè l'angolo risonante $3\varphi_1 + 4\varphi_2 - 5\varphi_3$ rimane costante

$$3\varphi_1(t) + 4\varphi_2(t) - 5\varphi_3(t) =$$

$$3\varphi_1(0) + 4\varphi_2(0) - 5\varphi_3(0) := \alpha$$

Scriviamo i moti

$$\begin{cases} I_1(t) = I_1(0) - 3\varepsilon t \operatorname{sen}\alpha \\ I_2(t) = I_2(0) - 4\varepsilon t \operatorname{sen}\alpha \\ I_3(t) = I_3(0) - 5\varepsilon t \operatorname{sen}\alpha \\ \varphi_1(t) = \varphi_1(0) + I_1(0)t - \frac{3}{2}\varepsilon t^2 \operatorname{sen}\alpha \\ \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + I_2(0)t - 2\varepsilon t^2 \operatorname{sen}\alpha \\ \varphi_3(t) = \varphi_3(0) - I_3(0)t + \frac{5}{2}\varepsilon t^2 \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

questi moti non soddisfano il principio della media

Esercizio (19 luglio 2019)

Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi)$$

con

$$h(I) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2$$

$$f(I,\varphi) = I_1 I_2 \left[\cos^2(\varphi_1-\varphi_2) + \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen} 2\varphi_2\right]$$

dove

$$I = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathbb{T}^2,$$

$$\omega_1 \omega_2 \neq 0, \quad \varepsilon \ll 1$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I,\varphi) \xrightarrow{\Psi_\varepsilon} (\tilde{I},\tilde{\varphi})$$

tale che $K_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Psi_\varepsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ε.

Scrivere inoltre la forma normale non risonante

Sol.

Abbiamo

$$\omega = \frac{\partial h}{\partial I} = (\omega_1, \omega_2) \neq 0$$

$$f(I,\varphi) = \sum_{k\in K} \hat{f}_k(I)\, e^{i\varphi\cdot k} =$$

$$I_1 I_2 \left[\cos^2(\varphi_1-\varphi_2) + \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen} 2\varphi_2\right]$$

$$\cos^2(\varphi_1-\varphi_2) = \left(\frac{e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2i(\varphi_1-\varphi_2)} + e^{-2i(\varphi_1-\varphi_2)} + 2\right)$$

$$\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi_1} - e^{-i\varphi_1}\right)$$

$$\operatorname{sen} 2\varphi_2 = \frac{1}{2i}\left(e^{i2\varphi_2} - e^{-i2\varphi_2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen} 2\varphi_2 = -\frac{1}{4}\left(e^{i(\varphi_1+2\varphi_2)} - e^{i(\varphi_1-2\varphi_2)} - e^{-i(\varphi_1-2\varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1+2\varphi_2)}\right)$$

si può scrivere

$$f(I,\varphi) = \frac{I_1 I_2}{4}\left(2 + e^{2i(\varphi_1-\varphi_2)} + e^{-2i(\varphi_1-\varphi_2)} - e^{i(\varphi_1+2\varphi_2)} + e^{i(\varphi_1-2\varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1-2\varphi_2)} - e^{-i(\varphi_1+2\varphi_2)}\right)$$

possiamo definire l'insieme K

$$K = \{(0,0),\ \pm(2,-2),\ \pm(1,2),\ \pm(1,-2)\}$$

poi

$$\hat{f}_{(0,0)} = \frac{I_1 I_2}{2}$$

$$\hat{f}_{(2,-2)} = \frac{I_1 I_2}{4} = \hat{f}_{-(2,-2)}$$

$$\hat{f}_{(1,2)} = -\frac{I_1 I_2}{4} = \hat{f}_{-(1,2)}$$

$$\hat{f}_{(1,-2)} = \frac{I_1 I_2}{4} = \hat{f}_{-(1,-2)}$$

Troviamo la funzione $W(\varphi, \tilde{I})$

$$W(\varphi, \tilde{I}) = \sum_{k \in K \setminus \{(0,0)\}} \hat{W}_k(\tilde{I})\, e^{i k \cdot \varphi}$$

$$\hat{W}_{(2,-2)} = -\frac{\hat{f}_{(2,-2)}}{i(2\omega_1 - 2\omega_2)} = -\frac{I_1 I_2}{8i(\omega_1 - \omega_2)}$$

$\omega_1 \neq \omega_2$

$$\hat{W}_{-(2,-2)} = -\frac{\hat{f}_{-(2,-2)}}{-i(2\omega_1 - 2\omega_2)} = \frac{I_1 I_2}{8i(\omega_1 - \omega_2)}$$

$$\hat{W}_{(1,2)} = -\frac{\hat{f}_{(1,2)}}{i(\omega_1 + 2\omega_2)} = \frac{I_1 I_2}{4i(\omega_1 + 2\omega_2)}$$

$\omega_1 \neq -2\omega_2$

$$\hat{W}_{-(1,2)} = -\frac{\hat{f}_{-(1,2)}}{-i(\omega_1 + 2\omega_2)} = -\frac{I_1 I_2}{4i(\omega_1 + 2\omega_2)}$$

$$\hat{W}_{(1,-2)} = -\frac{\hat{f}_{(1,-2)}}{i(\omega_1 - 2\omega_2)} = -\frac{I_1 I_2}{4i(\omega_1 - 2\omega_2)}$$

$\omega_1 \neq 2\omega_2$

$$\hat{W}_{-(1,-2)} = - \frac{\hat{f}_{-(1,-2)}}{-i(\omega_1 - 2\omega_2)} = \frac{I_1 I_2}{4i(\omega_1 - 2\omega_2)}$$

si ha

$$W(\varphi, \tilde{I}) = -\frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{2} \left(\frac{\operatorname{sen}(2\varphi_1 - 2\varphi_2)}{2(\omega_1 - \omega_2)} - \frac{\operatorname{sen}(\varphi_1 + 2\varphi_2)}{\omega_1 + 2\omega_2} + \frac{\operatorname{sen}(\varphi_1 - 2\varphi_2)}{\omega_1 - 2\omega_2} \right)$$

e

$$S(\varphi, \tilde{I}) = \varphi \cdot \tilde{I} + \varepsilon W(\varphi, \tilde{I})$$

La forma normale non risonante è data da

$$K_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = h(\tilde{I}) + \varepsilon \hat{f}_{(0,0)}(\tilde{I}) + O(\varepsilon^2)$$

$$= \omega_1 \tilde{I}_1 + \omega_2 \tilde{I}_2 + \varepsilon \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{2} + O(\varepsilon^2)$$

con $\omega_1 \neq \omega_2$ e $\omega_1 \neq \pm 2\omega_2$

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ε nel caso $\omega_1 = \omega_2 = 1$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale troncata al primo ordine in ε

Sol.

La forma normale risonante è in generale data da

$$K_\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = h(\tilde{I}) + \varepsilon\, g(\tilde{I},\tilde{\varphi}) + O(\varepsilon^2)$$

dove

$$g(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \sum_{k\in K,\ k \parallel k^*} f_k(\tilde{I})\, e^{ik\cdot\tilde{\varphi}}$$

Ricordando che

$$K = \{(0,0),\ \pm(2,-2),\ \pm(1,2),\ \pm(1,-2)\}$$

abbiamo $k^* = (2,-2)$ e

$$\begin{aligned} g(\tilde{I},\tilde{\varphi}) &= \hat{f}_{(0,0)} + \hat{f}_{(2,-2)}\, e^{i(2\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2)} \\ &\quad + \hat{f}_{-(2,-2)}\, e^{-i(2\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2)} \\ &= \frac{\tilde{I}_1\tilde{I}_2}{2} + \frac{\tilde{I}_1\tilde{I}_2}{4}\, e^{i(2\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2)} \\ &\quad + \frac{\tilde{I}_1\tilde{I}_2}{4}\, e^{-i(2\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2)} \end{aligned}$$

$$g(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \frac{\tilde{I}_1\tilde{I}_2}{2}\left(1 + \cos(2\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2)\right)$$

La forma normale risonante troncata al primo ordine in ε diventa

$$K^*_\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \varepsilon\, \frac{\tilde{I}_1\tilde{I}_2}{2}\left(1 + \cos(2\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2)\right)$$

scriviamo il sistema hamiltoniano associato

$$\begin{cases} \dot{\tilde{I}}_1 = \varepsilon \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \,\mathrm{sen}\,(2\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2) \\ \dot{\tilde{I}}_2 = -\varepsilon \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \,\mathrm{sen}\,(2\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2) \\ \dot{\tilde{\varphi}}_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \tilde{I}_2 \left(1 + \cos(2\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2)\right) \\ \dot{\tilde{\varphi}}_2 = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \tilde{I}_1 \left(1 + \cos(2\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2)\right) \end{cases}$$

due integrali primi per questo campo vettoriale sono

$$J_1 = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2$$

$$J_2 = K_\varepsilon^*(\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

J_1, J_2 sono in involuzione, infatti

$$\{J_1, J_2\} = -\frac{\partial K_\varepsilon^*}{\partial \tilde{\varphi}_1} - \frac{\partial K_\varepsilon^*}{\partial \tilde{\varphi}_2} = \dot{\tilde{I}}_1 + \dot{\tilde{I}}_2 = 0$$

e in generale sono indipendenti

$$\frac{\partial(J_1, J_2)}{\partial(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial K_\varepsilon^*}{\partial \tilde{I}_1} & \frac{\partial K_\varepsilon^*}{\partial \tilde{I}_2} & \frac{\partial K_\varepsilon^*}{\partial \tilde{\varphi}_1} & \frac{\partial K_\varepsilon^*}{\partial \tilde{\varphi}_2} \end{pmatrix}$$

non sono indipendenti se $\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2$ e almeno una delle seguenti condizioni è soddisfatta

$$\tilde{I}_1 = 0, \quad \tilde{I}_2 = 0, \quad \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2 + n\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Esercizio (17 gennaio 2019)

Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = I_1 + I_2 + \varepsilon\left(I_1^2 + I_2^2\right)\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

con $0 < \varepsilon \ll 1$, $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$

i) Trovare due integrali primi del sistema hamiltoniano (in involuzione e indipendenti)

Sol.

Scriviamo il sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot I_1 = \varepsilon\left(I_1^2 + I_2^2\right)\operatorname{sen}(2\varphi_1 - 2\varphi_2) \\ \dot I_2 = -\varepsilon\left(I_1^2 + I_2^2\right)\operatorname{sen}(2\varphi_1 - 2\varphi_2) \\ \dot\varphi_1 = 1 + 2\varepsilon I_1 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \dot\varphi_2 = 1 + 2\varepsilon I_2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases}$$

due integrali primi sono

$$\mathcal{J}_1 = I_1 + I_2$$

$$\mathcal{J}_2 = H_\varepsilon(I, \varphi)$$

$$\{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2\} = \dot I_1 + \dot I_2 = 0$$

$$\frac{\partial(J_1, J_2)}{\partial(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial I_1} & \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial I_2} & \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varphi_2} \end{pmatrix}$$

non sono indipendenti se $I_1 = I_2$ e almeno una delle seguenti condizioni è soddisfatta (o entrambe)

1) $I_1 = I_2 = 0$, 2) $\varphi_1 = \varphi_2 + n\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ e $I_1 = I_2$

ii) Trovare una trasformazione canonica

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{\Psi} (J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$$

con $J_j = J_j(I_1, I_2)$, $\theta_j = \theta_j(\varphi_1, \varphi_2)$ funzioni lineari omogenee, $j = 1, 2$, tale che θ_1 sia ciclica nella funzione di Hamilton per la dinamica nelle nuove variabili

Sol.

Imponiamo la trasformazione puntuale

$$\begin{cases} \theta_1 = \varphi_1 \\ \theta_2 = \varphi_1 - \varphi_2 \end{cases}$$

che poi estendiamo ai momenti; scriviamo

$$\theta = A\varphi$$

con $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'estensione ai momenti è data da

$$\mathcal{J} = A^{-T} I$$

con $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)^T$, $I = (I_1, I_2)^T$ e

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-T} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1 = I_1 + I_2 \\ \mathcal{J}_2 = -I_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 \\ I_2 = -\mathcal{J}_2 \end{cases}$$

La funzione di Hamilton $K_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \psi^{-1}$ è

$$K_\varepsilon = \mathcal{J}_1 + \varepsilon \left(\mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 + 2\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_2^2 \right) \cos^2\theta_2$$

$$= \mathcal{J}_1 + \varepsilon \left(\mathcal{J}_1^2 + 2\mathcal{J}_2^2 + 2\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 \right) \cos^2\theta_2$$

θ_1 è ciclica e $\mathcal{J}_1 = I_1 + I_2$ è un integrale primo

iii) Date le condizioni iniziali

$I_1(0) = 1$, $I_2(0) = -1$,

$\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$

mostrare che le azioni I_1, I_2 sono funzioni monotone del tempo t per $t \geqslant 0$

Sol.

Scriviamo il sistema hamiltoniano per K_ε

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = 0 \\ \dot{J}_2 = \varepsilon\,(J_1^2 + 2J_2^2 + 2J_1J_2)\operatorname{sen} 2\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 = 1 + \varepsilon\,(2J_1 + 2J_2)\cos^2\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = \varepsilon\,(2J_1 + 4J_2)\cos^2\theta_2 \end{cases}$$

$$J_1 = I_1(0) + I_2(0) = 0$$

$$J_2(0) = -I_2(0) = 1$$

$$\theta_1(0) = \varphi_1(0) = 0$$

$$\theta_2(0) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = 0$$

riscriviamo il sistema hamiltoniano ponendo $J_1 = 0$

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = 0 \\ \dot{J}_2 = 2\varepsilon J_2^2 \operatorname{sen} 2\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 = 1 + 2\varepsilon J_2 \cos^2\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = 4\varepsilon J_2 \cos^2\theta_2 \end{cases}$$

e consideriamo il sottosistema

$$\begin{cases} \dot{J}_2 = 2\varepsilon J_2^2 \operatorname{sen} 2\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = 4\varepsilon J_2 \cos^2\theta_2 \end{cases}$$

notiamo che le rette $\theta_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $J_2 = 0$, sul piano (θ_2, J_2), rappresentano di punti di equilibrio del sistema

$\theta_2(t)$ sarà una funzione strettamente crescente per $t \geq 0$ che tende a $\frac{\pi}{2}$ per $t \to +\infty$

($\dot{\theta}_2 = 0$ solo in corrispondenza di un punto di equilibrio)

Notiamo che $\mathcal{S}_2 \cos\theta_2$ è un integrale primo e dalle c.i. si ha

$$\mathcal{S}_2 = \frac{1}{\cos\theta_2},$$

allora $\mathcal{S}_2(t)$ è una funzione strettamente crescente per $t > 0$

infine dato che $I_2 = -\mathcal{S}_2$ e $I_1 = \mathcal{S}_2$

possiamo concludere che I_1, I_2 sono monotone per $t \geq 0$