Esercizio

Determinare le traiettorie del moto geodetico di un punto materiale di massa m sulla superficie

$$\begin{cases} x = r(z)\cos\varphi \\ y = r(z)\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad z \in \mathbb{R},\ \varphi \in S^1$$

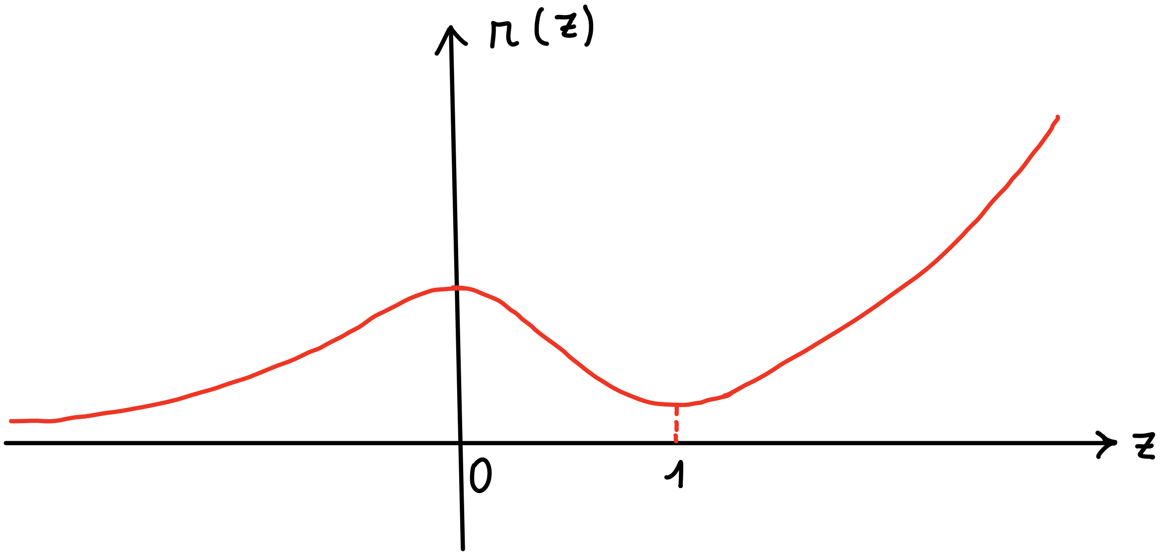
con $r(z) = (z^2 - 3z + 3)\, e^z$

Sol.

$$r'(z) = (2z-3)e^z + (z^2 - 3z + 3)e^z$$

$$= e^z(z^2 - z)$$

$r'(z) = 0$ se $z = 0$ e $z = 1$



$E = T + V$ energia

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = r'(z)\,\dot{z}\cos\varphi + r(z)(-\operatorname{sen}\varphi)\,\dot{\varphi} \\ \dot{y} = r'(z)\,\dot{z}\operatorname{sen}\varphi + r(z)(\cos\varphi)\,\dot{\varphi} \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{z}^2 \left[1 + (r'(z))^2 \right] + r^2(z)\,\dot{\varphi}^2 \right)$$

$V = 0$

$E = T(z, \dot{z}, \dot{\varphi})$ non dipende da φ

La variabile φ si dice ciclica.

Introduciamo la lagrangiana $L = T - V$,

si ha che anche L non dipende da φ.

Il momento associato a φ, definito da

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\,r^2(z)\,\dot{\varphi}$$

è un integrale primo del moto.

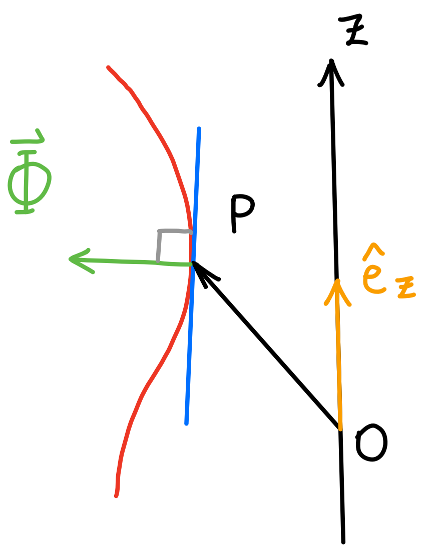
Infatti, scriviamo l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 .$$

Poiché $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ segue che

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \longrightarrow p_\varphi = c \quad \text{costante.}$$

La quantità p_φ è la componente del momento angolare lungo l'asse Oz. Verifichiamo che p_φ si conserva usando la 2ª eq. cardinale della dinamica (assumiamo che i vincoli siano ideali)



$$\vec{M}_0 = m(P-O) \times \vec{v}_P$$

$$\dot{\vec{M}}_0 = \vec{N}_0 - m\cancel{\vec{v}_0} \times \vec{v}_P \qquad (\vec{v}_0 = \vec{0})$$

$$\vec{N}_0 = (P-O) \times \vec{\Phi}$$

la direzione di $\vec{N}_0$ è perpendicolare a Oz

Quindi $\dot{\vec{M}}_0 \cdot \hat{e}_z = \vec{N}_0 \cdot \hat{e}_z = 0$, da cui

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{M}_0 \cdot \hat{e}_z\right) = 0$$

$M_z = \vec{M}_0 \cdot \hat{e}_z$ è un integrale primo, la sua espressione è data da

$$M_z \underset{\substack{\uparrow \\ \text{abbiamo usato}}}{=} m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m r^2(z)\dot{\varphi}$$

$$P - O = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3$$

$$\vec{v}_P = \dot{x}\hat{e}_1 + \dot{y}\hat{e}_2 + \dot{z}\hat{e}_3$$

Tornando all'esercizio

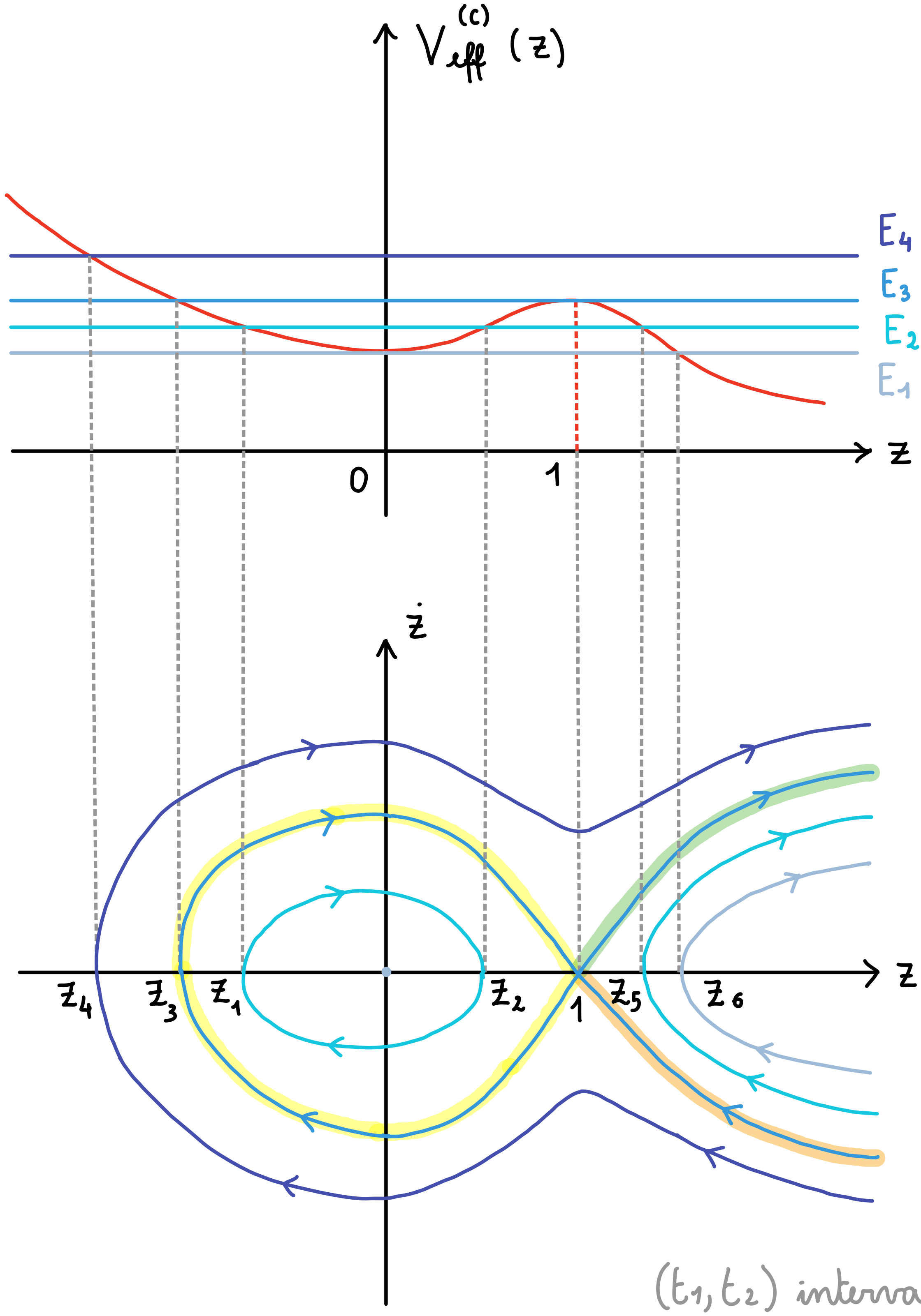
$$P_\varphi = c = m r^2(z)\dot{\varphi} \longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{c}{m r^2(z)}$$

$$E(z,\dot{\varphi},\dot{z}) = \frac{m}{2}\left[1 + (r'(z))^2\right]\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}\,\cancel{r^2(z)}\,\frac{c^2}{m^{\cancel{2}}\, r^{\cancel{4}\,2}(z)} =$$

$$E(z,\dot{\varphi},\dot{z}) = \frac{m}{2}\left[1 + (r'(z))^2\right]\dot{z}^2 + \frac{c^2}{2 m r^2(z)}$$

Introduciamo l'energia potenziale efficace

$$V_{eff}^{(c)}(z) = \frac{c^2}{2 m r^2(z)}$$ e disegnamone il grafico



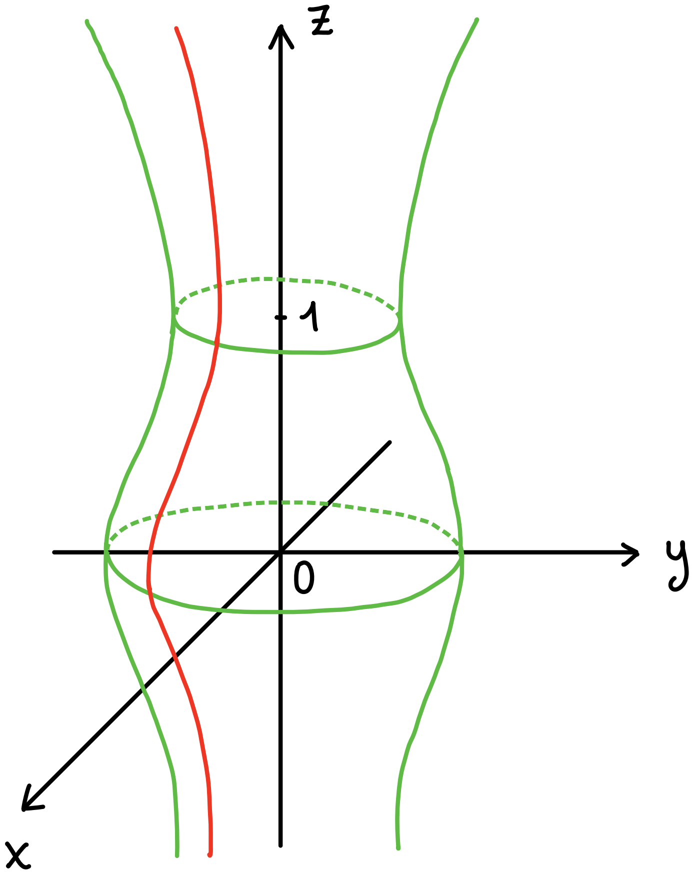
(t_1, t_2) intervallo massimale di esistenza della soluzione

Iniziamo dal caso $c = 0$

$$p_\varphi = c = m r^2 \dot\varphi \rightarrow \dot\varphi = 0 \rightarrow \varphi \text{ è costante}$$

se $\dot z(0) \neq 0$ la traiettoria è illimitata e corrisponde a un meridiano; $|z| \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow t_1, t_2$

le traiettorie sono disegnate in rosso



$E(z,\dot z) =$

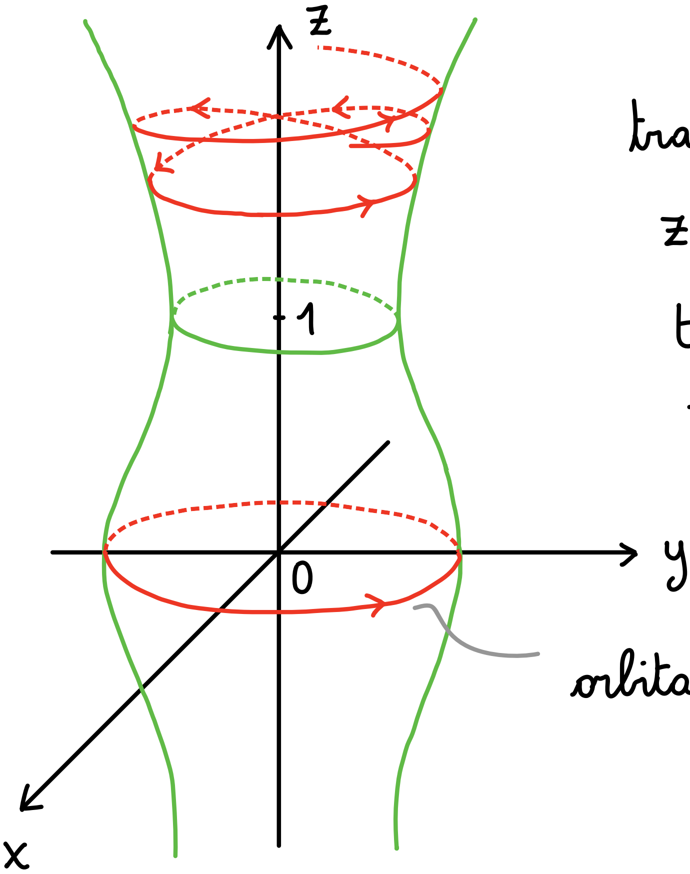
$\frac{1}{2} m \left[1 + (r'(z))^2\right] \dot z^2$

Se $\dot z(0) = 0$ allora

$\dot z(t) = 0 \quad \forall t$ e

abbiamo un punto di equilibrio

trattiamo ora il caso $c \neq 0$, $E = E_1$



traiettoria illimitata

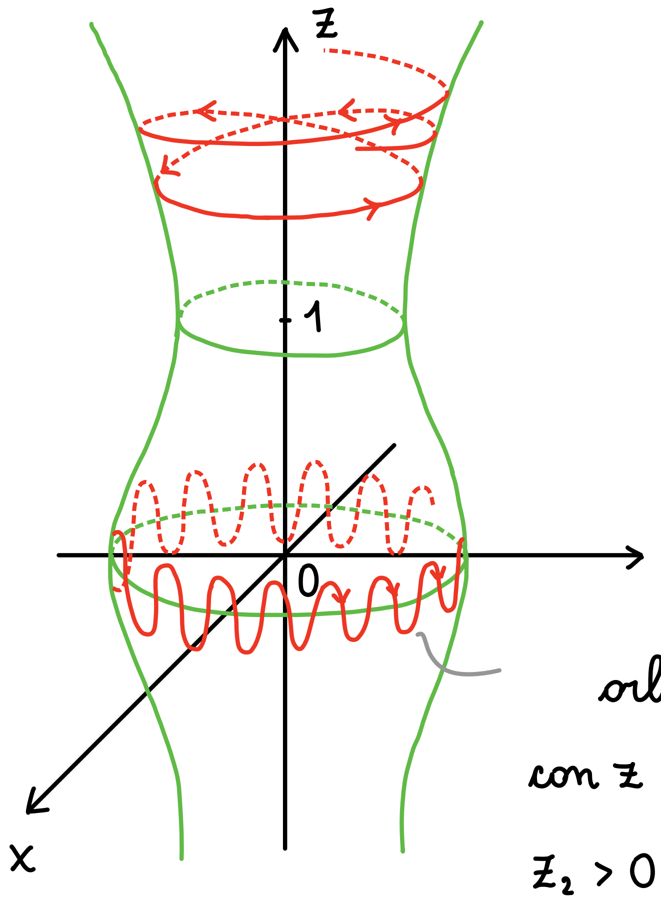
$z \longrightarrow +\infty$ per

$t \rightarrow t_1, t_2$

$z \geqslant z_6$

orbita periodica ($z = 0$)

Caso $E = E_2$



traiettoria illimitata

$z \to +\infty$ per

$t \to t_1, t_2$

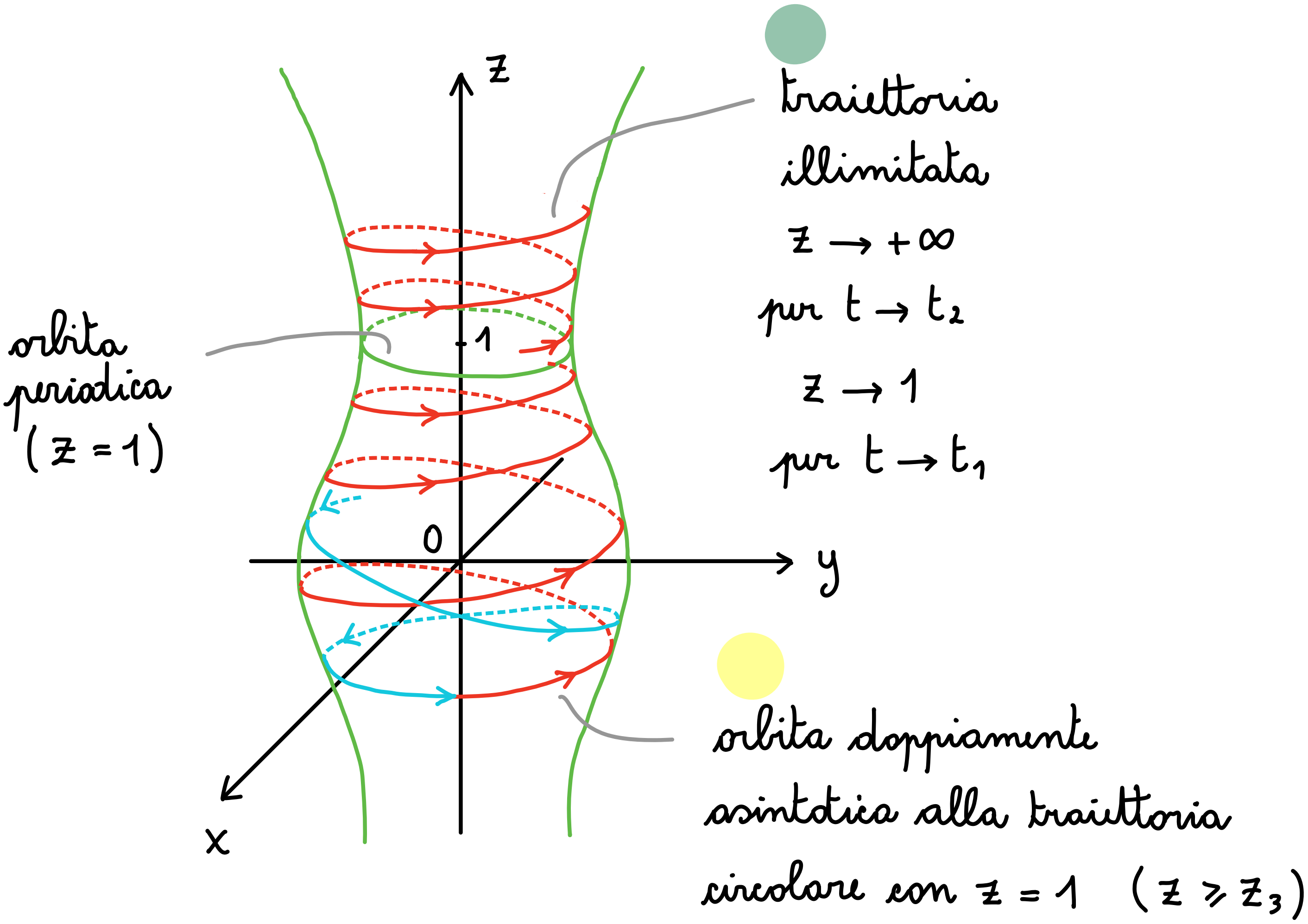
$z \geq z_5$

orbita quasi periodica con z compreso tra $z_1 < 0$ e $z_2 > 0$

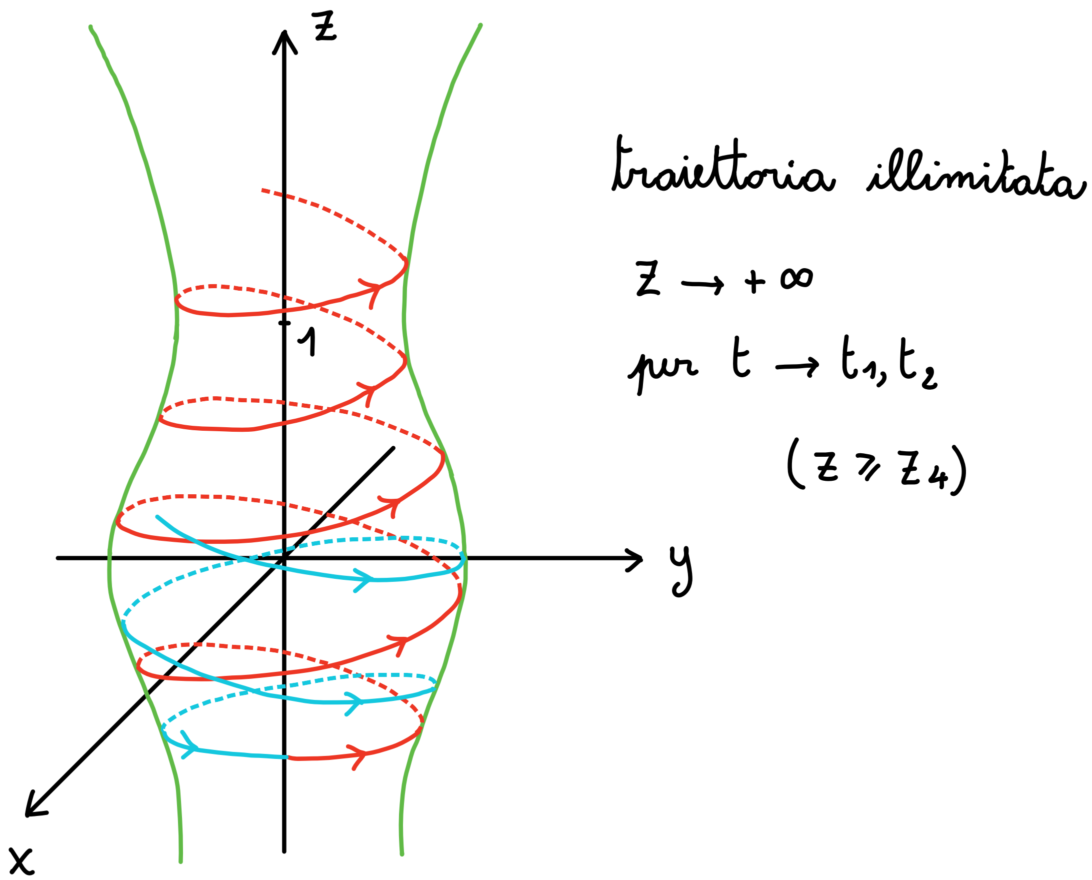
è un'orbita periodica se il rapporto tra i periodi di φ e di z è un numero razionale

Il caso più complicato è $E = E_3$

Ci sono tre tipi di traiettorie che si hanno per condizioni iniziali $(z, \dot{z})$ appartenenti alle componenti dell'insieme di livello indicate in giallo, arancione e verde nel ritratto di fase precedente. Inoltre si ha un'orbita periodica.


z
y
x
0
1
traiettoria
illimitata
z → +∞
per t → t₂
z → 1
per t → t₁
orbita
periodica
(z = 1)
orbita doppiamente
asintotica alla traiettoria
circolare con z = 1   (z ≥ z₃)

$E = E_4$


z
y
x
1
traiettoria illimitata
z → +∞
per t → t₁, t₂
(z ≥ z₄)

VARIABILI CICLICHE E LAGRANGIANA RIDOTTA

Per semplicità consideriamo sistemi a due gradi di libertà, rappresentati ad esempio da φ e z come nell'esercizio precedente.

Sia φ una variabile ciclica, allora il momento associato p_φ è un integrale primo. Poniamo $p_\varphi = c$ e definiamo la lagrangiana ridotta come segue

$$L_R^{(c)}(z,\dot z) = \left(L(z,\dot\varphi,\dot z) - \dot\varphi c\right)\Big|_{\dot\varphi = \Phi(z,\dot z,c)}.$$

Nell'esercizio precedente si aveva $\dot\varphi = \dfrac{c}{m r^2(z)}$.

Si può dimostrare che

la mappa $t \longrightarrow z(t)$ è soluzione dell'equazione di Lagrange definita da $L_R^{(c)}(z,\dot z)$ con condizioni iniziali $z(0) = z_0$, $\dot z(0) = \dot z_0$.

La mappa $t \longrightarrow \varphi(t)$ è data da

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \Phi(z(s),\dot z(s),c)\, ds.$$

Data una variabile ciclica, nel nostro caso φ, la lagrangiana può essere scritta nella forma

$$L = \tilde{L}_2 + \tilde{L}_1 + \tilde{L}_0 ,$$

con $\tilde{L}_i$, $i = 0,1,2$ funzioni omogenee di grado i rispetto a $\dot{\varphi}$.

Possiamo allora scrivere

$$L_R^{(c)} = \left(\tilde{L}_2 + \tilde{L}_1 + \tilde{L}_0 - c\dot{\varphi}\right)\Big|_{\dot{\varphi} = \Phi(z,\dot{z},c)} .$$

Notando che

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} , \quad \dot{\varphi} p_\varphi = 2\tilde{L}_2 + \tilde{L}_1$$

si ottiene

$$L_R^{(c)} = \left(\tilde{L}_2 + \tilde{L}_1 + \tilde{L}_0 - 2\tilde{L}_2 - \tilde{L}_1\right)\Big|_{\dot{\varphi} = \Phi(z,\dot{z},c)}$$

$$= \left(\tilde{L}_0 - \tilde{L}_2\right)\Big|_{\dot{\varphi} = \Phi(z,\dot{z},c)} .$$

Nell'esercizio precedente si ha

$$L_R^{(c)} = \left(\frac{1}{2} m\left[1 + (r'(z))^2\right]\dot{z}^2 + \frac{1}{2} m r^2(z)\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi} c\right)\Big|_{\dot{\varphi} = \frac{c}{m r^2(z)}}$$

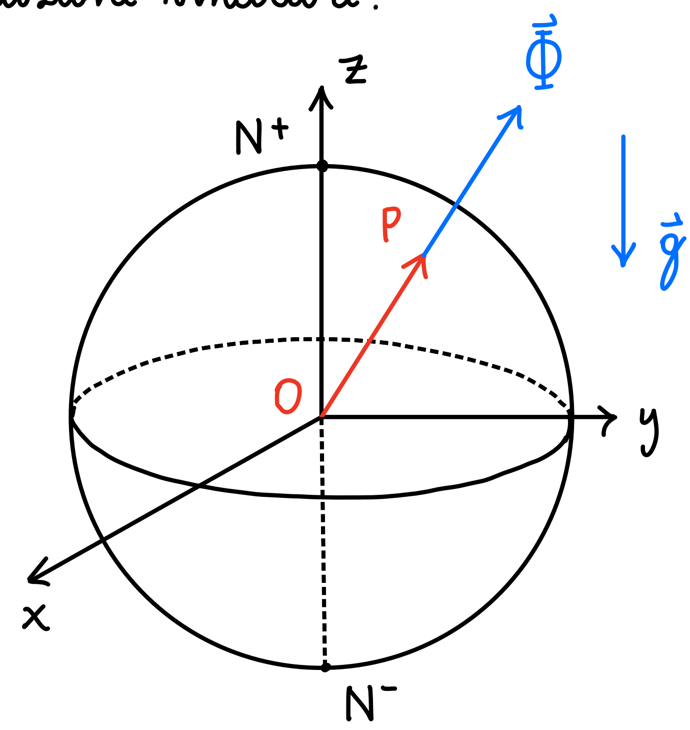
$$L_R^{(c)} = \frac{1}{2} m\left[1 + (r'(z))^2\right]\dot{z}^2 - \frac{c^2}{2 m r^2(z)} .$$

Esercizio (12 giugno 2015)

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ con l'asse Oz verticale ascendente.

Consideriamo un punto materiale P di massa m che si sposta su una superficie sferica di raggio R centrata in O, che assumiamo liscia.

Sul punto materiale agiscono la forza di gravità e la reazione vincolare.



i) Mostrare che se $P(0) = N^{\pm} \equiv (0, 0, \pm R)^T$ allora il momento angolare $\vec{M}_0$ o ha direzione costante o è nullo.

Sol. i)

Osserviamo subito che l'ipotesi di vincolo liscio si traduce nella condizione

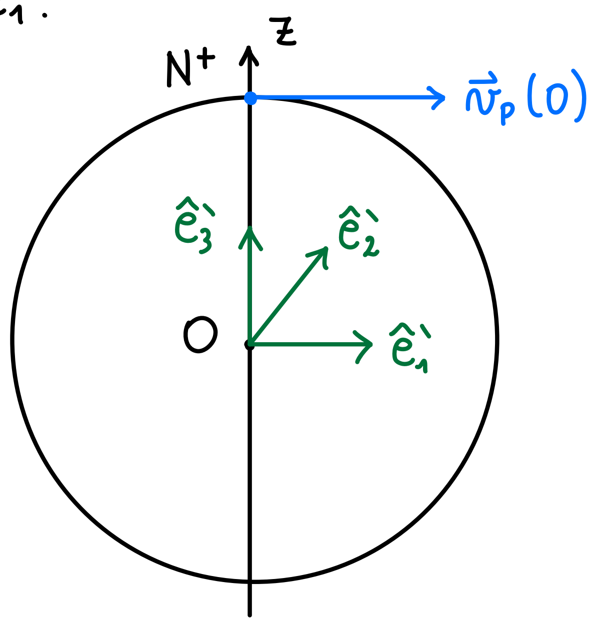
$$\vec{\Phi} \times (P-O) = \vec{0}.$$

Introduciamo un sistema di riferimento

$$\Sigma' = \{O; \hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$$

« adattato » alle condizioni iniziali:

- $\hat{e}_1'$ è definito dalla velocità iniziale $\vec{v}_P(0)$ (che assumiamo $\neq \vec{0}$): $\hat{e}_1' = \vec{v}_P(0)/|\vec{v}_P(0)|$,
- $\hat{e}_3'$ è il vettore unitario associato all'asse Oz,
- $\hat{e}_2' = \hat{e}_3' \times \hat{e}_1'$.



$\hat{e}_1' \parallel \vec{v}_P(0)$

Scriviamo $P-O = \tilde{x}\,\hat{e}_1' + \tilde{y}\,\hat{e}_2' + \tilde{z}\,\hat{e}_3'$

e $\vec{v}_P = \dot{\tilde{x}}\,\hat{e}_1' + \dot{\tilde{y}}\,\hat{e}_2' + \dot{\tilde{z}}\,\hat{e}_3'$

$$\vec{M}_0 = m\,(P-O)\times\vec{v}_P = m\Big[(\tilde{y}\dot{\tilde{z}} - \dot{\tilde{y}}\tilde{z})\,\hat{e}_1' + (\tilde{z}\dot{\tilde{x}} - \dot{\tilde{z}}\tilde{x})\,\hat{e}_2' + (\tilde{x}\dot{\tilde{y}} - \dot{\tilde{x}}\tilde{y})\,\hat{e}_3'\Big]$$

$$\left.\frac{d\vec{M}_0}{dt}\right|_{\Sigma'} = m\Big[(\tilde{y}\ddot{\tilde{z}} - \ddot{\tilde{y}}\tilde{z})\,\hat{e}_1' + (\tilde{z}\ddot{\tilde{x}} - \ddot{\tilde{z}}\tilde{x})\,\hat{e}_2' + (\tilde{x}\ddot{\tilde{y}} - \ddot{\tilde{x}}\tilde{y})\,\hat{e}_3'\Big]$$

Seconda equazione cardinale della dinamica

$$\left.\frac{d\vec{M}_0}{dt}\right|_{\Sigma'} = \vec{N}_0 = (P-O)\times(\vec{\Phi} - mg\,\hat{e}_3')$$
$$= (P-O)\times(-mg\,\hat{e}_3')$$
$$= -mg\,(-\tilde{x}\,\hat{e}_2' + \tilde{y}\,\hat{e}_1').$$

Osserviamo che $\vec{M}_0(0) \parallel \hat{e}_2'$, e $\tilde{y}(0) = \dot{\tilde{y}}(0) = 0$.

Mostriamo che $\vec{M}_0(t) \parallel \hat{e}_2'$ $\forall t$ o equivalentemente che $\tilde{y}(t) = \dot{\tilde{y}}(t) = 0$ $\forall t$.

Consideriamo le proiezioni della seconda eq. cardinale lungo $\hat{e}_1'$ e $\hat{e}_3'$:

$$\begin{cases} \tilde{y}\,(\ddot{\tilde{z}}) - (\ddot{\tilde{y}})\,\tilde{z} = -g\tilde{y} \\ \tilde{x}\,(\ddot{\tilde{y}}) - (\ddot{\tilde{x}})\,\tilde{y} = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ammette la soluzione $\tilde{y}(t) = 0$.

Allora P si muove lungo un meridiano, di conseguenza $\vec{M}_0(t) \parallel \hat{e}_2 \ \forall t$.

Se $\vec{v}_P(0) = \vec{0}$ si ha invece $\vec{M}_0(t) = \vec{0} \ \forall t$.

Un'altra soluzione è la seguente.

Consideriamo il sistema di riferimento $Oxyz$.

La seconda equazione cardinale proiettata lungo questi assi porge

$$\begin{cases} m\dfrac{d(y\dot{z}-\dot{y}z)}{dt} = -mgy \\ m\dfrac{d(z\dot{x}-\dot{z}x)}{dt} = mgx \\ m\dfrac{d(x\dot{y}-\dot{x}y)}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad M_z = m(x\dot{y}-\dot{x}y)$$

è un integrale primo del moto

Notiamo che in $N^{\pm}$ si ha $M_z = 0$. Per mostrare che la direzione di $\vec{M}_0$ è costante mostriamo che anche M_y/M_x è un integrale primo (se $M_x(0) = 0$ si può ruotare opportunamente $Oxyz$ attorno ad Oz)

$$\frac{d(M_y/M_x)}{dt} = \frac{\dot{M}_y M_x - M_y \dot{M}_x}{M_x^2} =$$

$$\frac{1}{M_x^2}\left[m^2 g x (y\dot{z} - \dot{y} z) - m(z\dot{x} - \dot{z}x)(-mgy)\right] =$$

$$-\frac{mgz M_z}{M_x^2} = 0 \quad \text{in quanto } M_z = 0.$$