DISPENSE SULLE EQUAZIONI
DIFFERENZIALI ORDINARIE
di
PAOLO BAITI
(sono liberamente scaricabili dal web)

Capitolo 6

Analisi qualitativa

Con la locuzione analisi qualitativa si intende lo studio del comportamento delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali, ottenuto generalmente senza conoscere, come di norma, un'espressione esplicita per tali soluzioni. Tra le proprietà studiate che considereremo si annoverano la monotonia, la convessità, il comportamento agli estremi dell'intervallo massimale d'esistenza, sia per quanto riguarda l'eventuale esistenza del limite, sia per quanto concerne, più in generale, il profilo asintotico. Molte informazioni riguardanti le soluzioni possono infatti essere ottenute direttamente dall'equazione differenziale stessa; per esempio, nel caso $n = 1$ le proprietà di monotonia sono direttamente collegate col segno del campo vettoriale, il quale fornisce anche molte indicazioni sul comportamento asintotico. Nella prossima sezione verranno inoltre introdotti altri due importanti strumenti: il Teorema del confronto e il criterio dell'asintoto.

Il Teorema del confronto

In questa sezione presenteremo uno strumento molto utile per studiare le proprietà qualitative delle soluzioni di un'equazione differenziale, quali l'intervallo di esistenza, oppure l'esplosione in tempo finito, oppure ancora il comportamento asintotico della traiettoria. Più precisamente vedremo due risultati, il primo che vale nella sola ipotesi di continuità del campo vettoriale f, il secondo più generale in qualche condizione rispetto al primo ma che necessita come controparte dell'unicità delle soluzioni. Si sottolinea fin da subito che i teoremi saranno validi solo nel caso $n = 1$ ovvero per la singola equazione scalare, sebbene alcuni risultati possano essere estesi anche al caso vettoriale con l'utilizzo delle più generali "disuguaglianze differenziali".

Teorema 6.1 (del confronto (I)) *Data $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, Ω aperto, siano $v, u : I \to \mathbb{R}$ derivabili tali che*

$$v'(t) \leq f(t, v(t)), \qquad u'(t) \geq f(t, u(t)),$$

nelle quali, per ogni $t \in I$, almeno una delle disuguaglianze è stretta. Preso $t_0 \in I$ si ha

i) Futuro: *se $v(t_0) \leq u(t_0)$ allora $v(t) < u(t)$ per ogni $t > t_0$, $t \in I$;*

ii) Passato: *se $v(t_0) \geq u(t_0)$ allora $v(t) > u(t)$ per ogni $t < t_0$, $t \in I$.*

La dimostrazione del teorema si basa sul seguente semplice lemma.

Lemma 6.2 *Date $u, v : I \to \mathbb{R}$ tali che $v'(\bar{t}) < u'(\bar{t})$ con $\bar{t} \in I$ allora si ha*

i) Futuro: *se $v(\bar{t}) \leq u(\bar{t})$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $v(t) < u(t)$ per ogni $t \in]\bar{t}, \bar{t} + \delta]$;*

ii) Passato: *se $v(\bar{t}) \geq u(\bar{t})$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $v(t) > u(t)$ per ogni $t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t}[$.*

Dimostrazione Per definizione di derivata si ha

$$\lim_{t \to \bar{t}} \frac{v(t) - v(\bar{t})}{t - \bar{t}} < \lim_{t \to \bar{t}} \frac{u(t) - u(\bar{t})}{t - \bar{t}},$$

e per il Teorema della permanenza del segno esiste un intorno $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq I$ tale che per $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \setminus \{\bar{t}\}$ si ha

$$\frac{v(t) - v(\bar{t})}{t - \bar{t}} < \frac{u(t) - u(\bar{t})}{t - \bar{t}}.$$

Se $v(\bar{t}) \leq u(\bar{t})$ e $t \in]\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ la disuguaglianza sopra equivale a $v(t) - v(\bar{t}) < u(t) - u(\bar{t})$ cioè $u(t) - v(t) > u(\bar{t}) - v(\bar{t}) \geq 0$ da cui il primo risultato. Se $v(\bar{t}) \geq u(\bar{t})$, preso $t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t}[$ la disuguaglianza sopra equivale a $v(t) - v(\bar{t}) > u(t) - u(\bar{t})$ cioè $v(t) - u(t) > v(\bar{t}) - u(\bar{t}) \geq 0$ da cui la tesi. □

Dimostrazione del Teorema del confronto (I) Dimostriamo i), analogamente si può procedere per ii). Definiamo l'insieme

$$A := \big\{ t \in I : \ t > t_0, \ v(s) < u(s) \ \forall\, s \in]t_0, t] \big\}.$$

Anzitutto si osserva che l'insieme è non vuoto. Infatti, se $v(t_0) < u(t_0)$ per continuità si ha $v(t) < u(t)$ in un intorno destro di t_0 dunque $A \neq \varnothing$. Se, invece, $v(t_0) = u(t_0)$ si ha

$$v'(t_0) \leq f(t_0, v(t_0)) = f(t_0, u(t_0)) \leq u'(t_0),$$

dove per ipotesi almeno una delle disuguaglianze è stretta. Si può quindi applicare il lemma precedente con $\bar{t} = t_0$ (in futuro) e ottenere che $v(t) < u(t)$ in un intorno destro di t_0, per cui ancora $A \neq \varnothing$.

A questo punto la tesi equivale a dimostrare che $\sup A = \sup I$. Ragionando per assurdo, supponiamo che $\beta := \sup A < \sup I$; in particolare si ha $\beta \in I$. Per le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, per ogni $s \in]t_0, \beta[$ esiste $t \in A$ tale che $s < t < \beta$ ma allora $v(s) < u(s)$ per definizione di A. Per continuità si avrà $v(\beta) \leq u(\beta)$. Se fosse $v(\beta) < u(\beta)$, per continuità si potrebbe estendere la disuguaglianza in un intorno destro di β, contro il fatto che β è l'estremo superiore di A. Se fosse $v(\beta) = u(\beta)$, come sopra si dimostrerebbe che $v'(\beta) < u'(\beta)$ e applicando il lemma con $\bar{t} = \beta$ (in passato) si avrebbe che $v(t) > u(t)$ in un intorno sinistro di β, ancora una contraddizione. In definitiva $\sup A = \sup I$ da cui la tesi. $\square$

Osservazione 6.3 In realtà si è dimostrato che se due funzioni sono tali che $v(t_0) \leq u(t_0)$ e vale $v'(t) < u'(t)$ ogni qual volta $v(t) = u(t)$ per qualche $t \geq t_0$, allora $v(t) < u(t)$ per ogni $t > t_0$.

Nelle ipotesi del teorema, per $t > t_0$ la funzione v viene detta *sottosoluzione* e u viene detta *soprasoluzione* relative all'equazione $y' = f(t, y)$, mentre per $t < t_0$ le terminologie vanno invertite. In particolare, ogni soluzione $y(t)$ dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ è sia sotto che soprasoluzione. Conseguentemente, se $v'(t) < f(t, v(t))$ e $u'(t) > f(t, u(t))$ (ovvero v e u sono per $t > t_0$, rispettivamente, una sottosoluzione e una soprasoluzione *stretta*) e si ha $v(t_0) \leq y(t_0) \leq u(t_0)$ allora $v(t) < y(t) < u(t)$ per ogni $t > t_0$, il che giustifica l'uso della terminologia. In questo caso v e u si dicono anche *sottosoluzione* e, rispettivamente, *soprasoluzione di y per $t > t_0$*. Si tenga ben presente che per una funzione $u(t)$ lo stare sopra una soluzione $y(t)$ non vuol dire essere una soprasoluzione; in effetti per essere soprasoluzione $u(t)$ deve verificare $u'(t) \geq f(t, u(t))$, e il Teorema del confronto afferma che allora u sta effettivamente sopra y. Ma in generale una qualsiasi funzione che stia sopra $y(t)$ non è necessariamente una soprasoluzione. Analoghe considerazioni valgono nel caso di una sottosoluzione.

Il Teorema 6.1, come anche il Teorema 6.4 che seguirà, può dunque essere utilizzato per ottenere delle stime per eccesso e per difetto delle soluzioni utilizzando delle opportune sopra e sottosoluzioni; il vantaggio è che mentre in generale le soluzioni non sono esplicitamente calcolabili, è invece più semplice trovare o costruire delle opportune sopra o sottosoluzioni. Volendo confrontare una soluzione $v = y$ con una soprasoluzione u, poiché $y'(t) = f(t, y(t))$ per ogni t, per applicare il Teorema 6.1 deve necessariamente valere $u'(t) \gneqq f(t, u(t))$ per ogni t dunque u deve essere soprasoluzione *stretta*. Ci si può chiedere se sia possibile indebolire o, meglio, togliere tale restrizione. Vedremo che la risposta è positiva se c'è unicità delle soluzioni per i problemi di Cauchy. Per dimostrare tale estensione del teorema utilizzeremo il Teorema 5.13 di dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali e dal campo vettoriale.

Teorema 6.4 (del confronto (II)) *Sia data* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua,* Ω *aperto, tale che il problema di Cauchy* $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ *ammetta un'unica soluzione* $y(t)$ *nell'intervallo* I*. Sia* $v : J \to \mathbb{R}$*, tale che*

$$\begin{cases} v'(t) \leq f(t, v(t)) \\ v(t_0) \leq y_0, \end{cases} \quad t \in J.$$

Allora $v(t) \leq y(t)$ *per ogni* $t > t_0$, $t \in I \cap J$.

Dimostrazione Sia K un generico intervallo compatto contenuto in I (nel caso I stesso sia compatto basta prendere $K = I$). Poniamo $f_k(t, y) := f(t, y) + \frac{1}{k}$ e $(t_k, y_k) = (t_0, y_0)$ per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Banalmente si ha che $f_k \to f$ uniformemente in Ω per $k \to +\infty$. Detta $y_k(t)$ una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f_k(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

per il Teorema 5.13 esiste $\bar{k}$ tale che per $k \geq \bar{k}$ è possibile definire $y_k(t)$ su tutto K e si ha $y_k \to y$ se $k \to +\infty$ uniformemente su K. Confrontiamo ora v e y_k: si ha $v(t_0) \leq y_0 = y_k(t_0)$ e inoltre

$$v'(t_0) \leq f(t, v(t)) < f(t, v(t)) + \frac{1}{k} = f_k(t, v(t)),$$

quindi v è sottosoluzione stretta di y_k. Applicando il Teorema 6.1 alle funzioni f_k, v e y_k si ottiene che $v(t) < y_k(t)$ per ogni $t \in K \cap J$, $t > t_0$, e $k \geq \bar{k}$. Passando al limite per $k \to +\infty$ si ha $v(t) \leq y(t)$ per ogni $t \in K \cap J$, $t > t_0$ e per l'arbitrarietà di K in I tale disuguaglianza vale in tutto $I \cap J$. □

Osservazione 6.5 Vale un risultato analogo al Teorema 6.4 per soprasoluzioni $u(t)$ tali che

$$\begin{cases} u'(t) \geq f(t, u(t)) \\ u(t_0) \geq y_0, \end{cases} \quad t \in J,$$

ottenendo come tesi $u(t) \geq y(t)$ per ogni $t > t_0$, $t \in I \cap J$. In maniera del tutto simile si dimostra poi anche una versione in passato.

Osservazione 6.6 Non è possibile estendere ulteriormente il teorema precedente, per esempio togliendo l'ipotesi di unicità delle soluzioni. Infatti, se valesse una tale estensione, considerando un problema di Cauchy senza unicità delle soluzioni (per esempio $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$), e prendendo due soluzioni distinte y_1 e y_2, applicando tale estensione alle funzioni $v = y_1$ (ogni soluzione è sottosoluzione) e $y = y_2$ si otterrebbe $y_1(t) \leq y_2(t)$ per ogni t. Scambiando il ruolo delle funzioni e quindi prendendo $v = y_2$ e $y = y_1$ si otterrebbe anche $y_2(t) \leq y_1(t)$ per ogni t da cui $y_1(t) = y_2(t)$, assurdo. L'estensione del teorema sarebbe falsa anche richiedendo in aggiunta che valesse la disuguaglianza stretta $v(t_0) < y(t_0)$ (trovare per esercizio un controesempio). Si potrebbe invece dimostrare che ogni sottosoluzione $v(t)$ soddisfa $v(t) \leq \overline{y}(t)$ e ogni soprasoluzione $u(t)$ soddisfa $u(t) \geq \underline{y}(t)$ dove $\overline{y}$ e $\underline{y}$ sono, rispettivamente, l'integrale superiore e l'integrale inferiore del problema di Cauchy in oggetto.

Il criterio dell'asintoto

Un ulteriore strumento utile per lo studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali è il criterio dell'asintoto, utilizzato principalmente per studiare il limite, o più in generale il comportamento asintotico, delle soluzioni per $t \to \pm\infty$.

Teorema 6.7 (criterio dell'asintoto) *Sia data* $f : [x_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *derivabile tale che*

i) il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *esiste finito;*

ii) esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

Allora $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. *Un risultato analogo vale per funzioni definite in* $]-\infty, x_0]$ *per quanto concerne il limite per* $x \to -\infty$.

Dimostrazione La dimostrazione segue subito dall'applicazione del Teorema di de l'Hôpital che vale per limiti di forme indeterminate del tipo $[\frac{\text{qualsiasi cosa}}{\infty}]$, applicato al limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$. Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Alternativamente si poteva applicare il Teorema di Lagrange a f in ogni intervallo del tipo $[x_n, x_{n+1}]$ dove (x_n) è una successione che diverge a $+\infty$. Prendendo per esempio $x_n = n$, per Lagrange esiste $\xi_n \in]n, n+1[$ tale che

$$f(n+1) - f(n) = f'(\xi_n)((n+1) - n) = f'(\xi_n).$$