|..

|

Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
6 Giugno 2017
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\Big(\dot q^2 + \frac{1}{q^2}\Big), \qquad q,\dot q \in \mathbb{R}.$$

9

1. Trovare la soluzione $t \mapsto \bar\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L tale che $\bar\gamma(0) = \dot{\bar\gamma}(0) = 1$.
2. Mostrare che non ci sono punti coniugati a $(t,q) = (0,1)$ sull'estremale $t \mapsto \bar\gamma(t)$ per $t > 0$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot A\mathbf{q} \qquad (1)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \qquad \alpha > 0$$

definita su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

12

1. Calcolare il flusso integrale $\Phi^t(\mathbf{p},\mathbf{q})$ delle equazioni di Hamilton associate ad H e verificare che, per ogni $\bar t \in \mathbb{R}$ fissato, $\Phi^{\bar t}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ definisce una trasformazione canonica.
2. Dimostrare che la trasformazione Ψ dipendente dal tempo definita da

$$(\mathbf{p},\mathbf{q},t) \overset{\Psi}{\mapsto} (\Phi^t(\mathbf{p},\mathbf{q}),t) =: (\mathbf{P},\mathbf{Q},t)$$

è canonica e dire come si trasforma con Ψ il sistema hamiltoniano associato alla funzione di Hamilton

$$H_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}.$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema hamiltoniano definito dalla funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(\mathbf{I},\varphi) = h(\mathbf{I}) + \epsilon f(\varphi),$$

con

9

$$h(\mathbf{I}) = I_1 + I_2, \qquad f(\varphi) = \cos^2(\varphi_1 + 2\varphi_2)\sin^2(\varphi_1 - 2\varphi_2),$$

dove

$$\mathbf{I} = (I_1,I_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad \epsilon \ll 1.$$

Determinare una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(\mathbf{I},\varphi) \overset{\Psi_\epsilon}{\mapsto} (\tilde{\mathbf{I}},\tilde\varphi)$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde\varphi$ al primo ordine in ϵ.

1)

$$\dot q_1 = \alpha q_1 + q_2$$

$$\dot q_2 = -\alpha q_2 \qquad q_2(t) = q_2(0)\, e^{-\alpha t}$$

$$\dot p_1 = -\alpha p_1 \qquad p_1(t) = p_1(0)\, e^{-\alpha t}$$

$$\dot p_2 = -p_1 + \alpha p_2$$

$$\dot y = \alpha y + b(t)$$

$$y(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

$$A(t) = \int \alpha\, dt$$

$$q_1(t) = e^{\alpha t} \int e^{-\alpha t} q_2(0)\, e^{-\alpha t}\, dt \qquad p_2(t) = e^{\alpha t} \int e^{-\alpha t} (-p_1(0))\, e^{-\alpha t}\, dt$$

$$q_1(t) = q_2(0)\, e^{\alpha t} \int e^{-2\alpha t}\, dt \qquad p_2(t) = -p_1(0)\, e^{\alpha t} \int e^{-2\alpha t}\, dt$$

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\alpha t} & \frac{\operatorname{senh}(\alpha t)}{\alpha} \\ 0 & e^{-\alpha t} \end{pmatrix}}_{= \exp(At)} \begin{pmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-\alpha t} & 0 \\ -\frac{\operatorname{senh}(\alpha t)}{\alpha} & e^{\alpha t} \end{pmatrix}}_{\exp(-A^T t)} \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix}$$

$$(P, Q) = \Phi^t(p,q) = \left(e^{-\alpha t} p_1,\ -\frac{\operatorname{senh}(\alpha t)}{\alpha} p_1 + e^{\alpha t} p_2,\ e^{\alpha t} q_1 + \frac{\operatorname{senh}(\alpha t)}{\alpha} q_2,\ e^{-\alpha t} q_2 \right)$$

---

verifico che $\Phi^{\bar t}(p,q)$ è canonica

$$P \cdot dQ - p \cdot dq = \underbrace{\exp(-A^T \bar t)\, p \cdot \exp(A \bar t)\, dq}_{p \cdot B\, dq} - p \cdot dq$$

$$p \cdot B\, dq \quad \text{con} \quad B = \begin{pmatrix} e^{-\alpha \bar t} & -\frac{\operatorname{senh}(\alpha \bar t)}{\alpha} \\ 0 & e^{\alpha \bar t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\alpha \bar t} & \frac{\operatorname{senh}(\alpha \bar t)}{\alpha} \\ 0 & e^{-\alpha \bar t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$