Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
27 gennaio 2022

Esercizio 1
Si consideri la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q^2 + q\dot q - q\sin t, \qquad q,\dot q \in \mathbb{R}.$$

i) Trovare la soluzione $t \mapsto \bar\gamma(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\bar\gamma(0) = 1, \qquad \dot{\bar\gamma}(0) = 0.$$

ii) Mostrare che, per ogni $T > 0$, la soluzione $\bar\gamma$ è un minimo debole per il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,T],\mathbb{R})$.

iii) Fissato $T > 0$, calcolare la *slope function* $\mathcal{P}(t,q)$ del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito sulla striscia $\{(t,\alpha) : t \in (0,T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \qquad \dot\gamma_\alpha(0) = \alpha.$$

Esercizio 2
Si consideri un punto materiale P di massa m che si muove nello spazio soggetto al campo di forze derivabile dall'energia potenziale

$$V(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2} - Fz,$$

con $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ coordinate di P rispetto ad un sistema di riferimento fissato, e $k > 0$, $F > 0$ parametri reali.

i) Si dimostri che le coordinate cilindriche $(r,z,\varphi) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{T})$ sono separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi di questo sistema meccanico.

ii) Trovare un integrale completo di tale equazione.

Esercizio 3
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(I,\varphi) = h(I) + \epsilon f(I,\varphi),$$

con

$$\begin{aligned} h(I) &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3, \\ f(I,\varphi) &= 2I_1[I_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\cos\varphi_3 + I_3\sin(\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3)], \end{aligned}$$

dove

$$I = (I_1,I_2,I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_1,\omega_2,\omega_3 \neq 0, \quad \epsilon \ll 1.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I, \varphi) \xrightarrow{\Psi_\epsilon} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ϵ. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in ϵ nel caso $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 1$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in ϵ.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

i) L'hamiltoniana del sistema corrisponde all'energia meccanica.
L'energia meccanica è data da

$$E(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = T(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) + V(x,y,z)$$

con

$$T(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$V(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2} - Fz$$

Introduciamo i momenti associati a $(x,y,z)^T$:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

L'hamiltoniana è

$$H(p_x,p_y,p_z,x,y,z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{k}{x^2+y^2} - Fz$$

Introduciamo le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r \operatorname{sen}\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Siano $q = (x,y,z)^T$, $Q = (r,z,\varphi)^T$. Da $q = v(Q)$ si ottiene

$$p = \left(\frac{\partial v}{\partial Q}\right)^{-T} P$$

con $p = (p_x,p_y,p_z)^T$, $P = (P_r, P_z, P_\varphi)^T$.

Calcoliamo $\left(\frac{\partial v}{\partial Q}\right)^{-T}$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial Q}\right)^{-T} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r} \\ \operatorname{sen}\varphi & 0 & \frac{\cos\varphi}{r} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} p_x = P_r \cos\varphi - \frac{P_\varphi}{r}\operatorname{sen}\varphi \\ p_y = P_r \operatorname{sen}\varphi + \frac{P_\varphi}{r}\cos\varphi \\ p_z = P_z \end{cases}$$

La nuova hamiltoniana diventa

$$K(P_r, P_z, P_\varphi, r, z, \varphi) = \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{1}{r^2}P_\varphi^2 + P_z^2\right) + \frac{k}{r^2} - Fz$$

Notiamo che φ è ciclica, dunque P_φ è costante.

Introduciamo la funzione caratteristica di Hamilton

$$W(r, z, \varphi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = W_r(r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + W_z(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + W_\varphi(\varphi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Ponendo $\alpha_3 = P_\varphi$ si può porre

$$W_\varphi = \alpha_3 \varphi$$

e l'equazione di H.-J. diventa

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{r^2} + \left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{k}{r^2} - Fz = e(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Da questa equazione possiamo scrivere il seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2m}\left[\left(\dfrac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{\alpha_3^2}{r^2}\right] + \dfrac{k}{r^2} = \alpha_1 \\ \dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2 - Fz = \alpha_2 \end{cases}$$

con $e(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$.

ii) Da

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2 - Fz = \alpha_2$$

si può scrivere

$$\frac{\partial W_z}{\partial z} = \sqrt{2m(Fz + \alpha_2)}$$

$$W_z(z, \alpha_2) = \frac{1}{3mF}\left(2m(Fz+\alpha_2)\right)^{3/2}$$

Da

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{r^2}\right] + \frac{k}{r^2} = \alpha_1$$

si può scrivere

$$\frac{\partial W_r}{\partial r} = \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{1}{r^2}(2mK + \alpha_3^2)}$$

$$W_r = \int \frac{1}{r}\sqrt{Ar^2 - B}\, dr$$

con $A = 2m\alpha_1$, $B = 2mk + \alpha_3^2$,

$$W_r(r, \alpha_1, \alpha_3) = \sqrt{2m\alpha_1 r^2 - (2mk + \alpha_3^2)} - \sqrt{2mK + \alpha_3^2}\,\arctan\sqrt{\frac{2m\alpha_1}{2mK + \alpha_3^2}r^2 - 1}$$

Notiamo che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \, \partial Q} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 W_r}{\partial \alpha_1 \partial r} & 0 & \dfrac{\partial^2 W_r}{\partial \alpha_3 \partial r} \\ 0 & \dfrac{\partial^2 W_z}{\partial \alpha_2 \partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 W_r}{\partial \alpha_1 \partial r} \; \frac{\partial^2 W_z}{\partial \alpha_2 \partial z}$$

$$= \frac{m^2}{\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{1}{r^2}(2mK + \alpha_3^2)} \; \sqrt{2m(Fz + \alpha_2)}} \neq 0$$

L'integrale completo richiesto risulta

$$S(r, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) =$$

$$\sqrt{2m\alpha_1 r^2 - (2mk + \alpha_3^2)} - \sqrt{2mk + \alpha_3^2} \, \arctan \sqrt{\frac{2m\alpha_1}{2mk + \alpha_3^2} r^2 - 1}$$

$$+ \frac{1}{3mF} \left(2m(Fz + \alpha_2)\right)^{3/2} + \alpha_3 \varphi - (\alpha_1 + \alpha_2) t$$