Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
21 Novembre 2024

Esercizio 1

Sia
$$S(q,t) = \frac{1}{2}q^2 + tq$$
una soluzione delle equazioni di Caratheodory
$$S_q = L_{\dot q}(q, \mathscr{P}(t,q), t), \qquad S_t = L(q, \mathscr{P}(t,q), t) - \mathscr{P}(t,q)L_{\dot q}(q, \mathscr{P}(t,q), t)$$
per una lagrangiana
$$L(q, \dot q, t) = \frac{1}{2}\dot q^2 - V(q,t)$$
di un problema meccanico a un grado di libertà.

i) Trovare l'espressione dell'energia potenziale V.

ii) Trovare la famiglia di soluzioni $\gamma(t,\alpha)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange per L con condizioni iniziali $q(0) = 0, \dot q(0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii) Mostrare che per ogni tempo $\tau > 0$ la funzione $\bar\gamma(t) = \gamma(t,1)$ è un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana
$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma, \dot\gamma, t)dt$$
nella classe di funzioni $C^1([0,\tau], \mathbb{R})$.

iv) Mostrare che per ogni $\tau > 0$ la funzione $\bar\gamma(t)$ è anche un minimo forte di $\mathcal{A}_L$ in $C^1([0,\tau], \mathbb{R})$.

Esercizio 2

i) Si completino le relazioni
$$P_1 = p_1(q_1 + q_2),$$
$$P_2 = p_1 - p_2,$$
ad una trasformazione canonica univalente
$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\mathbf{\Psi}}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$$
con $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $q_1 + q_2 > 0$, tale che le nuove coordinate Q_1, Q_2 non dipendano dai vecchi momenti p_1, p_2.

ii) Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton
$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = p_1^2(q_1 + q_2)^2 + (\log(q_1 + q_2) + 1)^2 + (2 - q_2)^2$$
e se ne calcoli la soluzione con condizioni iniziali al tempo $t = 0$
$$p_1(0) = 1, \qquad p_2(0) = 0, \qquad q_1(0) = 0, \qquad q_2(0) = 1$$
considerando il sistema hamiltoniano ottenuto tramite la trasformazione canonica $\mathbf{\Psi}$.

Soluzione esercizio 1

i)
$$S(q,t) = \frac{1}{2}q^2 + tq$$

è soluzione delle equazioni di Carathéodory

$$\begin{cases} S_q = L_{\dot q}(q, \mathcal{P}(t,q), t) \\ S_t = L(q, \mathcal{P}(t,q), t) - \mathcal{P}(t,q) L_{\dot q}(q, \mathcal{P}(t,q), t) \end{cases}$$

con

$$L = \frac{1}{2}\dot q^2 - V(q,t)$$

Abbiamo

$$L_{\dot q} = \dot q$$

quindi

$$S_q = q + t = \mathcal{P}$$

$$S_t = q = \frac{1}{2}\mathcal{P}^2 - V - \mathcal{P}^2 = -\frac{1}{2}\mathcal{P}^2 - V$$

Si trova

$$V = -\frac{1}{2}\mathcal{P}^2 - q = -\frac{1}{2}(q+t)^2 - q$$

ii) Le equazioni di Eulero - Lagrange per L sono

$$\frac{dL_{\dot q}}{dt} = L_q$$

con $L_{\dot q} = \dot q$, $L_q = -V_q = q + t + 1$. Risulta

$$\ddot q = q + t + 1$$

Consideriamo le c.i. $q(0) = 0$, $\dot q(0) = \alpha$

La soluzione si può scrivere come

$$q(t) = q_o(t) + q_p(t)$$

con

$$q_o(t) = c\, e^{t} + d\, e^{-t}$$

$$q_p(t) = -t - 1$$

Allora

$$q(t) = c\, e^{t} + d\, e^{-t} - t - 1$$

$$\dot{q}(t) = c\, e^{t} - d\, e^{-t} - 1$$

Inoltre

$$q(0) = c + d - 1 = 0$$

$$\dot{q}(0) = c - d - 1 = \alpha$$

da cui

$$\begin{cases} c = 1 - d \\ 1 - 2d - 1 = \alpha \end{cases} \longrightarrow \quad d = -\frac{\alpha}{2}, \quad c = 1 + \frac{\alpha}{2}$$

La famiglia di soluzioni è data da

$$\gamma(t,\alpha) = e^{t} + \alpha \operatorname{senh} t - t - 1$$

iii)

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(t,1) = e^{t} + \operatorname{senh} t - t - 1$$

Da

$$L_{\dot{q}\dot{q}} = 1, \quad L_{q\dot{q}} = 0, \quad L_{qq} = -V_{qq} = 1$$

l'equazione di Jacobi è

$$-\frac{1}{2}\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\eta = 0 \quad \longrightarrow \quad \ddot{\eta} = \eta$$

La soluzioni di questa equazione con c.i. $\eta(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = 1$

è data da

$$\eta(t) = \operatorname{senh} t$$

Allora $\eta(t) > 0$ per ogni $t > 0$.

(iv) Per mostrare che $\bar{p}(t)$ è anche un minimo forte di A_L in $C^1([0,\tau],\mathbb{R})$ calcoliamo la funzione di eccesso di Weierstrass

$$\mathcal{E}_L(t,q,v,w) = L(q,w,t) - \left[L(q,v,t) + (w-v)L_{\dot q}(q,v,t)\right]$$

Risulta

$$\mathcal{E}_L(t,q,v,w) = \frac{1}{2}w^2 - V(q,t) - \frac{1}{2}v^2 + V(q,t) - (w-v)v$$

$$= \frac{1}{2}(w-v)(w+v) - (w-v)v$$

$$= (w-v)\left(\frac{1}{2}w + \frac{1}{2}v - v\right) = \frac{1}{2}(w-v)^2$$

Allora vale la condizione di Weierstrass stretta

$$\mathcal{E}_L(t,q,P(t,q),\dot q) > 0$$

$$\dot q \neq P(t,q)$$

qualunque sia la slope function

Soluzione esercizio 2

i)
$$P_1 = p_1(q_1+q_2)$$
$$P_2 = p_1 - p_2$$

Pongo
$$Q_1 = f(q_1,q_2)$$
$$Q_2 = g(q_1,q_2)$$

Imponiamo le parentesi di Poisson fondamentali

$$\{Q_1, P_1\} = 1$$
$$f_{q_1}(q_1+q_2) = 1 \longrightarrow f_{q_1} = \frac{1}{q_1+q_2}$$

$$\{Q_1, P_2\} = 0$$
$$f_{q_1} - f_{q_2} = 0 \longrightarrow f_{q_1} = f_{q_2}$$

$$\{Q_2, P_1\} = 0$$
$$g_{q_1}(q_1+q_2) = 0 \longrightarrow g_{q_1} = 0$$

$$\{Q_2, P_2\} = 1$$
$$g_{q_1} - g_{q_2} = 1 \longrightarrow g_{q_2} = -1$$

Integrando si ottiene
$$Q_1(q_1,q_2) = \log(q_1+q_2) + c$$
$$Q_2(q_1,q_2) = -q_2 + d$$

con c, d costanti

Ponendo per esempio $c=1$, $d=2$ la trasformazione canonica ψ è data da

$$\begin{cases} P_1 = p_1(q_1+q_2) \\ P_2 = p_1 - p_2 \\ Q_1 = \log(q_1+q_2) + 1 \\ Q_2 = 2 - q_2 \end{cases}$$

ii)

Scriviamo

$$K = H \circ \psi^{-1} = P_1^2 + Q_1^2 + Q_2^2$$

Le equazioni di Hamilton corrispondenti risultano

$$\begin{cases} \dot{P}_1 = -2Q_1 \\ \dot{P}_2 = -2Q_2 \\ \dot{Q}_1 = 2P_1 \\ \dot{Q}_2 = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo le c.i. :

$$P_1(0) = 1 \ , \quad P_2(0) = 1 \ ,$$
$$Q_1(0) = 1 \ , \quad Q_2(0) = 1$$

Abbiamo subito

$$Q_2(t) = 1 \ , \qquad P_2(t) = -2t + 1$$

Poi

$$\ddot{P}_1 = -4P_1$$

$$P_1(t) = a\cos(2t) + b\,\mathrm{sen}(2t)$$

$$\dot{P}_1(t) = -2a\,\mathrm{sen}(2t) + 2b\cos(2t)$$

$$P_1(0) = 1 = a$$

$$\dot{P}_1(0) = -2Q_1(0) = -2 = 2b \longrightarrow b = -1$$

$$P_1(t) = \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)$$

$$Q_1(t) = -\frac{1}{2}\dot{P}_1(t) = -\frac{1}{2}(-2\operatorname{sen}(2t) - 2\cos(2t))$$

$$= \operatorname{sen}(2t) + \cos(2t)$$

Allora si è ottenuto

$$\begin{cases} P_1(t) = \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t) \\ P_2(t) = -2t + 1 \\ Q_1(t) = \operatorname{sen}(2t) + \cos(2t) \\ Q_2(t) = 1 \end{cases}$$

Infine scriviamo la trasformazione ψ^{-1}:

$$\begin{cases} p_1 = P_1 e^{1-Q_1} \\ p_2 = P_1 e^{1-Q_1} - P_2 \\ q_1 = Q_2 - 2 + e^{Q_1 - 1} \\ q_2 = 2 - Q_2 \end{cases}$$

La soluzione cercata è

$$\begin{cases} p_1(t) = [\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)]\, e^{1 - \operatorname{sen}(2t) - \cos(2t)} \\ p_2(t) = [\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)]\, e^{1 - \operatorname{sen}(2t) - \cos(2t)} \\ \qquad + 2t - 1 \\ q_1(t) = -1 + e^{\operatorname{sen}(2t) + \cos(2t) - 1} \\ q_2(t) = 1 \end{cases}$$