# Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
# 21 Dicembre 2022

**Esercizio 1**
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{q}|^2 - p_1 p_2 - q_1 q_2,$$

con $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Determinare una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p},\mathbf{q}) \stackrel{\Psi}{\to} (\mathbf{P},\mathbf{Q}),$$

tale che le nuove coordinate $\mathbf{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da $H$.

iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione $K$.

**Esercizio 2**
Si consideri il sistema hamiltoniano con funzione di Hamilton

$$H_\epsilon(I,\varphi) = h(I) + \epsilon f(I,\varphi),$$

con

$$\begin{aligned} h(I) &= I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3, \\ f(I,\varphi) &= I_1 I_2[\cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\varphi_1 \sin(2\varphi_2 - \varphi_3)], \end{aligned}$$

dove

$$I = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3, \quad \omega_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ i = 1,2,3, \quad \epsilon \ll 1.$$

i) Determinare, quando è possibile, una funzione generatrice di una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I,\varphi) \stackrel{\Psi_\epsilon}{\to} (\tilde{I},\tilde{\varphi})$$

tale che la hamiltoniana $K_\epsilon = H_\epsilon \circ \Psi_\epsilon^{-1}$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in $\epsilon$. Scrivere inoltre la forma normale non risonante corrispondente a questa trasformazione.

ii) Scrivere la forma normale risonante al primo ordine in $\epsilon$ nel caso $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 3$ e trovare due integrali primi genericamente indipendenti e in involuzione per il sistema hamiltoniano definito da tale forma normale risonante troncata al primo ordine in $\epsilon$.

## Esercizio 1

i)

$$H(p,q) = p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 - p_1p_2 - q_1q_2$$

noto che

$$p_1^2 + p_2^2 = \frac{1}{2}\left[(p_1+p_2)^2 + (p_1-p_2)^2\right]$$

$$p_1p_2 = \frac{1}{4}\left[(p_1+p_2)^2 - (p_1-p_2)^2\right]$$

e

$$q_1^2 + q_2^2 = \frac{1}{2}\left[(q_1+q_2)^2 + (q_1-q_2)^2\right]$$

$$q_1q_2 = \frac{1}{4}\left[(q_1+q_2)^2 - (q_1-q_2)^2\right]$$

allora

$$H(p,q) = \frac{1}{4}\left[(p_1+p_2)^2 + (q_1+q_2)^2\right] + \frac{3}{4}\left[(p_1-p_2)^2 + (q_1-q_2)^2\right]$$

Introduciamo la trasformazione

$$Q_1 = q_1 + q_2$$

$$Q_2 = q_1 - q_2$$

e la completiamo con la trasformazione

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = A^{-T}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$$

La trasformazione

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\Psi}{\longmapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$$

è canonica univalente

Si ha $\left(P = (P_1, P_2),\ Q = (Q_1, Q_2)\right)$

$$K(P, Q) = H \circ \Psi^{-1}(P, Q) =$$

$$P_1^2 + \frac{1}{4}Q_1^2 + 3\left(P_2^2 + \frac{1}{4}Q_2^2\right)$$

Introdotta la funzione caratteristica di Hamilton $W(Q, \alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, qui assunta della forma

$$W(Q, \alpha) = W_1(Q_1, \alpha) + W_2(Q_2, \alpha)$$

l'equazione di Hamilton - Jacobi per $K$

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 + \frac{1}{4}Q_1^2 + 3\left[\left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 + \frac{1}{4}Q_2^2\right] = e(\alpha)$$

può essere separata nelle due equazioni

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 + \frac{1}{4}Q_1^2 = \alpha_1 \\ 3\left[\left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 + \frac{1}{4}Q_2^2\right] = \alpha_2 \end{cases} \quad \text{con } \alpha_1 + \alpha_2 = e(\alpha)$$

ii) Due integrali primi per $K(P,Q)$ sono

$$J_1 = P_1^2 + \frac{1}{4} Q_1^2$$

$$J_2 = P_2^2 + \frac{1}{4} Q_2^2$$

Sono chiaramente in involuzione, $\{J_1, J_2\} = 0$, inoltre sono genericamente indipendenti, infatti

$$\frac{\partial(J_1, J_2)}{\partial(P_1, P_2, Q_1, Q_2)} = \begin{pmatrix} 2P_1 & 0 & Q_1/2 & 0 \\ 0 & 2P_2 & 0 & Q_2/2 \end{pmatrix}$$

ed il rango di questa matrice non è massimo solo se

$$P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = 0$$

Gli integrali primi per il sistema hamiltoniano definito da $H$ sono

$$I_1 = \frac{1}{4}\left[(p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2\right]$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\left[(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2\right]$$

iii) Da

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 + \frac{1}{4} Q_1^2 = \alpha_1$$

scriviamo

$$\frac{\partial W_1}{\partial Q_1} = \sqrt{\alpha_1 - \frac{1}{4} Q_1^2}$$

$$W_1(Q_1,\alpha_1) = \sqrt{\alpha_1}\int\sqrt{1-\left(\frac{Q_1}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)^2}\, dQ_1$$

$$x = \frac{Q_1}{2\sqrt{\alpha_1}} \quad , \quad dQ_1 = 2\sqrt{\alpha_1}\, dx$$

$$\sqrt{\alpha_1}\int\sqrt{1-\left(\frac{Q_1}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)^2}\, dQ_1 = 2\alpha_1\int\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$\int\sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} + \int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$2\int\sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} + \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$\int\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x$$

$$W_1(Q_1,\alpha_1) = \alpha_1\left(\frac{Q_1}{2\sqrt{\alpha_1}}\sqrt{1-\left(\frac{Q_1}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)^2} + \right.$$

$$\left.\operatorname{arcsen}\frac{Q_1}{2\sqrt{\alpha_1}}\right)$$

In definitiva si ottiene

$$W(Q,\alpha) = \frac{Q_1}{2}\sqrt{\alpha_1-\frac{1}{4}Q_1^2} + \alpha_1\operatorname{arcsen}\frac{Q_1}{2\sqrt{\alpha_1}} +$$

$$\frac{Q_2}{2}\sqrt{\tilde{\alpha}_2-\frac{1}{4}Q_2^2} + \tilde{\alpha}_2\operatorname{arcsen}\frac{Q_2}{2\sqrt{\tilde{\alpha}_2}} \quad , \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{3}$$

Infine si ha

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial Q} = \frac{1}{4\sqrt{\alpha_1 - \frac{1}{4}Q_1^2}\sqrt{\tilde{\alpha}_2 - \frac{1}{4}Q_2^2}} \neq 0.$$

## Esercizio 2

i) La funzione generatrice richiesta ha la forma

$$S(\tilde{I},\varphi) = \tilde{I}\cdot\varphi + \varepsilon W(\tilde{I},\varphi)$$

Si ha

$$f(I,\varphi) = I_1 I_2 \left[\cos^2(\varphi_1-\varphi_2) + \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}(2\varphi_2-\varphi_3)\right]$$

che possiamo scrivere come

$$f(I,\varphi) = \sum_{k\in K} \hat{f}_k(I)\, e^{ik\cdot\varphi} \quad , \quad \text{infatti}$$

$$\cos^2(\varphi_1-\varphi_2) = \left(\frac{e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{4}\left(e^{2i(\varphi_1-\varphi_2)} + e^{-2i(\varphi_1-\varphi_2)} + 2\right)$$

$$\operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}(2\varphi_2-\varphi_3) = \frac{e^{i\varphi_1} - e^{-i\varphi_1}}{2i}\;\frac{e^{i(2\varphi_2-\varphi_3)} - e^{-i(2\varphi_2-\varphi_3)}}{2i} =$$

$$-\frac{1}{4}\left(e^{i(\varphi_1+2\varphi_2-\varphi_3)} + e^{-i(\varphi_1+2\varphi_2-\varphi_3)} - e^{i(\varphi_1-2\varphi_2+\varphi_3)}\right.$$

$$- e^{-i(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3)}\Big)$$

$$K = \{(0,0,0),\ \pm(2,-2,0),\ \pm(1,2,-1),\ \pm(1,-2,1)\}$$

$$\hat{f}_{(0,0,0)} = \frac{I_1 I_2}{2}, \quad \hat{f}_{\pm(2,-2,0)} = \frac{I_1 I_2}{4},$$

$$\hat{f}_{\pm(1,2,-1)} = -\frac{I_1 I_2}{4}, \quad \hat{f}_{\pm(1,-2,1)} = \frac{I_1 I_2}{4},$$

Assumendo

$$W(\tilde{I}, \varphi) = \sum_{k \in K \setminus \{0\}} \hat{W}_k(\tilde{I})\, e^{i k \cdot \varphi}$$

dall'equazione omologica si ottiene

$$\hat{W}_k(\tilde{I}) = -\frac{\hat{f}_k(\tilde{I})}{i k \cdot \omega} \qquad \text{dove} \quad \omega = \frac{\partial h}{\partial I} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

$$\hat{W}_{\pm(2,-2,0)} = \mp \frac{I_1 I_2}{8i(\omega_1 - \omega_2)} \qquad (\omega_1 \neq \omega_2)$$

$$\hat{W}_{\pm(1,2,-1)} = \pm \frac{I_1 I_2}{4i(\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3)} \qquad (\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 \neq 0)$$

$$\hat{W}_{\pm(1,-2,1)} = \mp \frac{I_1 I_2}{4i(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3)} \qquad (\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3 \neq 0)$$

Allora $$W(\tilde{I}, \varphi) = \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{8i(\omega_1 - \omega_2)} \left(- e^{2i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-2i(\varphi_1 - \varphi_2)}\right)$$

$$+ \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{4i(\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3)} \left( e^{i(\varphi_1 + 2\varphi_2 - \varphi_3)} - e^{-i(\varphi_1 + 2\varphi_2 - \varphi_3)} \right)$$

$$+ \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{4i(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3)} \left( -e^{i(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3)} + e^{-i(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3)} \right) =$$

$$- \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{4(\omega_1 - \omega_2)} \operatorname{sen}(2(\varphi_1 - \varphi_2)) + \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{2(\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3)} \operatorname{sen}(\varphi_1 + 2\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$- \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{2(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3)} \operatorname{sen}(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3) = W(\tilde{I}, \varphi)$$

La forma normale non risonante è

$$K_\varepsilon = \tilde{I}_1 \omega_1 + \tilde{I}_2 \omega_2 + \tilde{I}_3 \omega_3 + \varepsilon \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{2} + O(\varepsilon^2)$$

ii) $\omega_1 = -1, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = 3$

vediamo che $k^* = (1, -2, 1) \in K$ soddisfa

$k^* \cdot \omega = 0$

la forma normale risonante è data da

$$\tilde{K}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = h(\tilde{I}) + \varepsilon g(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) + O(\varepsilon^2)$$

$$g(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = \sum_{\substack{k \in K \\ k \parallel k^*}} \hat{f}_k(I) e^{i k \cdot \varphi}$$

nel nostro caso

$$g(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{2} \left( 1 + \cos(\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3) \right)$$

così risulta

$$\tilde{K}_\varepsilon = -\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + 3\tilde{I}_3 + \varepsilon \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{2} \left( 1 + \cos(\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3) \right)$$

$$+ O(\varepsilon^2)$$

Definiamo

$$\tilde{K}^*_\varepsilon = -\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + 3\tilde{I}_3 + \varepsilon \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{2} \left( 1 + \cos(\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3) \right)$$

il sistema hamiltoniano definito da $\tilde{K}^*_\varepsilon$ è

$$\dot{\tilde{I}}_1 = \varepsilon \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{2} \operatorname{sen}(\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3)$$

$$\dot{\tilde{I}}_2 = -\varepsilon \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \operatorname{sen}(\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3)$$

$$\dot{\tilde{I}}_3 = \varepsilon \frac{\tilde{I}_1 \tilde{I}_2}{2} \operatorname{sen}(\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3)$$

$$\dot{\tilde{\varphi}}_1 = \dots \qquad \dot{\tilde{\varphi}}_2 = \dots \qquad \dot{\tilde{\varphi}}_3 = \dots$$

due integrali primi in involuzione e indipendenti sono

$$J_1 = 2\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2$$

$$J_2 = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3$$