Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica
20 Dicembre 2024

Esercizio 1
Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{p}|^2 - \frac{1}{|\boldsymbol{q}|},$$

con $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.

i) Determinare una trasformazione canonica

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \overset{\Psi}{\to} (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}),$$

tale che le nuove coordinate $\boldsymbol{Q}$ siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton $K = H \circ \Psi^{-1}$.

ii) Dimostrare che

$$F = |\boldsymbol{p}|^2|\boldsymbol{q}|^2 - (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q})^2$$

è un integrale primo del moto per il campo vettoriale definito da H.

iii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione K nel caso in cui $F = 0$.

Esercizio 2

1. Si consideri la funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon = h(\boldsymbol{I}) + \varepsilon f(\boldsymbol{\varphi}), \qquad \boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{T}^2$$

dove

$$h(\boldsymbol{I}) = I_1^2 + \frac{1}{2}I_2^2, \qquad f(\boldsymbol{\varphi}) = \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Scrivere la forma normale non risonante per H_ε fino al secondo ordine in ε (incluso).

2. Si consideri adesso la funzione di Hamilton

$$K_\varepsilon = h(\boldsymbol{I}) + \varepsilon f(\boldsymbol{\varphi}), \qquad \boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{T}^3$$

dove

$$h(\boldsymbol{I}) = I_1^2 + \frac{1}{2}(I_2^2 + I_3^2), \qquad f(\boldsymbol{\varphi}) = \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)\sin(\varphi_2 - \varphi_3).$$

Scrivere la forma normale risonante per K_ε all'interno della risonanza semplice $|4I_1 - I_2 - I_3| = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ fino al primo ordine in ε.

Soluzione esercizio 1

i) Imponiamo la trasformazione puntuale

$$q_1 = Q_2 \cos Q_1$$
$$q_2 = Q_2 \operatorname{sen} Q_1$$

e la completiamo ai momenti con una funzione generatrice $S(q,P)$. Si ha

$$Q_2 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$$
$$Q_1 = \arctan \frac{q_2}{q_1}$$

Dunque

$$S(q,P) = P_1 \arctan \frac{q_2}{q_1} + P_2 \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$$

è una buona funzione generatrice dato che

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \, \partial P} \neq 0$$

Otteniamo

$$p_1 = P_2 \cos Q_1 - \frac{P_1}{Q_2} \operatorname{sen} Q_1$$

$$p_2 = \frac{P_1}{Q_2} \cos Q_1 + P_2 \operatorname{sen} Q_1$$

e

$$P_1 = p_2 q_1 - p_1 q_2$$
$$P_2 = \frac{p_1 q_1 + p_2 q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$$

La nuova hamiltoniana diventa

$$K(P,Q) = \frac{1}{2}\left(P_2^2 + \frac{P_1^2}{Q_2^2}\right) - \frac{1}{Q_2}$$

Notando che la variabile Q_1 è ciclica, assumiamo che la funzione caratteristica di Hamilton sia della forma

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(Q_1, \alpha_1) + W_2(Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

L'equazione di H.-J. per K è data da

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 + \frac{1}{2Q_2^2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 - \frac{1}{Q_2} = e(\alpha_1, \alpha_2)$$

e si può scrivere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_1}{\partial Q_1} = \alpha_1 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 + \dfrac{\alpha_1^2}{2Q_2^2} - \dfrac{1}{Q_2} = \alpha_2 \end{cases}$$

ii) Scriviamo

$$F(p,q) = |p|^2|q|^2 - (p\cdot q)^2$$

in funzione delle nuove variabili:

$$F(P,Q) = \left(P_2^2 + \frac{P_1^2}{Q_2^2}\right)Q_2^2 - P_2^2 Q_2^2 = P_1^2$$

e P_1 è un integrale primo, quindi lo è anche F

iii) Riprendiamo il sistema scritto alla fine del punto i).

Abbiamo

$$\begin{cases} W_1(Q_1,\alpha_1) = \alpha_1 Q_1 \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial Q_2} = \sqrt{2\alpha_2 - \dfrac{\alpha_1^2}{Q_2^2} + \dfrac{2}{Q_2}} \end{cases}$$

Si verifica subito che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial Q \partial \alpha} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial Q_2 \partial \alpha_2} \neq 0$$

Ponendo $F = 0$ si ha $P_1 = \alpha_1 = 0$. Allora

$W_1 = 0$ e

$$\frac{\partial W_2}{\partial Q_2} = \sqrt{2\alpha_2 + \frac{2}{Q_2}}$$

da cui, integrando si ha (assumiamo che $\alpha_2 > 0$)

$$W_2(Q_2,\alpha_2) = Q_2\sqrt{2\alpha_2 + \frac{2}{Q_2}} + \sqrt{\frac{2}{\alpha_2}}\ \text{arctanh}\sqrt{1 + \frac{1}{Q_2\alpha_2}}$$

L'integrale completo è

$$S(Q_2,\alpha_2,t) = W_2(Q_2,\alpha_2) - \alpha_2 t$$

Soluzione esercizio 2

i) La forma normale non risonante per H_ε fino al secondo ordine in ε si ottiene da

$$\tilde{H}(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = h(\tilde{I}) + \varepsilon \langle f \rangle_\varphi + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \{ f + \langle f \rangle, \chi \}(\tilde{I},\tilde{\varphi})$$

Abbiamo

$$f(\varphi) = \sum_{k \in K} \hat{f}_k e^{ik\cdot\varphi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{2i(\varphi_1 - \varphi_2)} + \frac{1}{4} e^{-2i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Allora

$$K = \{(0,0), (2,-2), (-2,2)\}$$

$$f_{(0,0)} = \langle f \rangle_\varphi = \frac{1}{2}$$

$$f_{(2,-2)} = \frac{1}{4} = f_{(-2,2)}$$

Calcoliamo l'hamiltoniana generatrice

$$\chi(I,\varphi) = \sum_{k \in K \setminus \{(0,0)\}} \frac{\hat{f}_k}{ik\cdot\omega} e^{ik\cdot\varphi}$$

con $\omega = \frac{\partial h}{\partial I} = (2I_1, I_2)^T$. Risulta

$$\chi(I,\varphi) = \frac{\text{sen}(2\varphi_1 - 2\varphi_2)}{4(2I_1 - I_2)}$$

Calcoliamo

$$\{ f + \langle f \rangle_\varphi , \chi \} = \{ f, \chi \} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \chi}{\partial I} = \frac{3\,\text{sen}^2(2\varphi_1 - 2\varphi_2)}{4(2I_1 - I_2)^2}$$

La forma normale richiesta è

$$\tilde{H}(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \tilde{I}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon^2 \frac{3\,\mathrm{sen}^2(2\tilde{\varphi}_1 - 2\tilde{\varphi}_2)}{4(2\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2)^2}$$

ii) Partiamo da

$$f(\varphi) = \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)\,\mathrm{sen}(\varphi_2 - \varphi_3)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2i(\varphi_1-\varphi_2)} + \frac{1}{4}e^{-2i(\varphi_1-\varphi_2)}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{i(\varphi_2-\varphi_3)} - e^{-i(\varphi_2-\varphi_3)}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{i(\varphi_2-\varphi_3)} - e^{-i(\varphi_2-\varphi_3)}\right) + \frac{1}{8i}\left(e^{i(2\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)} - e^{i(2\varphi_1-3\varphi_2+\varphi_3)}\right)$$

$$+ \frac{1}{8i}\left(e^{i(-2\varphi_1+3\varphi_2-\varphi_3)} - e^{i(-2\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)}\right)$$

$$f(\varphi) = \sum_{k\in K} \hat{f}_k\, e^{ik\cdot\varphi}$$

$$K = \{(0,1,-1),(0,-1,1),(2,-1,-1),(-2,1,1),$$
$$(2,-3,1),(-2,3,1)\}$$

Da

$$\omega = \frac{\partial h}{\partial I} = (2I_1, I_2, I_3)^T$$

vediamo che i k risonanti sono

$$(2,-1,-1) \text{ e } (-2,1,1)$$

Allora la forma normale risonante richiesta è

$$K_\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \tilde{I}_1^2 + \frac{1}{2}(\tilde{I}_2^2 + \tilde{I}_3^2) + \frac{\varepsilon}{4}\mathrm{sen}(2\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_3)$$