

## Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica 20 Dicembre 2023

### Esercizio 1

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_1^2 - p_2^2 + \frac{1}{q_1^2 - q_2^2},$$

con  $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $q_1 > q_2 > 0$ .

- i) Determinare una trasformazione canonica<sup>1</sup>

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}),$$

tale che le nuove coordinate  $\mathbf{Q}$  siano separabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione di Hamilton  $K = H \circ \Psi^{-1}$ .

- ii) Scrivere un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione  $K$ .

### Esercizio 2

Si consideri la funzione di Hamilton

$$H_\varepsilon(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)^2 + \varepsilon[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

con  $\mathbf{I} = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ .

- i) Mostrare che il sistema hamiltoniano associato ad  $H_\varepsilon$  è integrabile scrivendo due integrali primi indipendenti e in involuzione;
- ii) mostrare che il sistema hamiltoniano associato ad  $H_\varepsilon$  non soddisfa il principio della media al primo ordine in  $\varepsilon$ ;
- iii) tramite il metodo di Lie, scrivere la forma normale risonante  $\tilde{H}_\varepsilon$  di  $H_\varepsilon$  relativa alla risonanza singola definita da  $k_* = (1, 1)$ ;
- iv) trovare la soluzione generale del sistema hamiltoniano associato ad  $\tilde{H}_\varepsilon$  cancellando i termini  $O(\varepsilon^2)$ .

---

<sup>1</sup>È utile ricordare la relazione  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ .

## Soluzioni

### Esercizio 1

i) Consideriamo la seguente trasformazione puntuale:

$$\begin{aligned}q_1 &= Q_2 \cosh Q_1, \\q_2 &= Q_2 \sinh Q_1.\end{aligned}$$

Completiamola ad una trasformazione canonica

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$$

cercando una opportuna funzione generatrice  $S(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  come segue. Invertiamo la trasformazione puntuale per ottenere

$$\begin{aligned}Q_1 &= \operatorname{arctanh} \frac{q_2}{q_1}, \\Q_2 &= \sqrt{q_1^2 - q_2^2}.\end{aligned}$$

Ponendo

$$\begin{aligned}Q_1 &= \frac{\partial S}{\partial P_1} = \operatorname{arctanh} \frac{q_2}{q_1}, \\Q_2 &= \frac{\partial S}{\partial P_2} = \sqrt{q_1^2 - q_2^2},\end{aligned}$$

si trova

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = P_1 \operatorname{arctanh} \frac{q_2}{q_1} + P_2 \sqrt{q_1^2 - q_2^2},$$

che è una buona funzione generatrice, infatti

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{P}} = -\frac{1}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2}} \neq 0.$$

Possiamo completare la trasformazione puntuale ad una trasformazione canonica con le relazioni

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{P_2 q_1}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2}} - \frac{P_1 q_2}{q_1^2 - q_2^2}, \\p_2 &= \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{P_1 q_1}{q_1^2 - q_2^2} - \frac{P_2 q_2}{\sqrt{q_1^2 - q_2^2}},\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}p_1 &= P_2 \cosh Q_1 - \frac{P_1}{Q_2} \sinh Q_1, \\p_2 &= \frac{P_1}{Q_2} \cosh Q_1 - P_2 \sinh Q_1.\end{aligned}$$

La funzione hamiltoniana trasformata  $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = H \circ \Psi^{-1}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  diventa

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = P_2^2 - \frac{P_1^2}{Q_2^2} + \frac{1}{Q_2^2}.$$

Notiamo che  $Q_1$  è una variabile ciclica e che  $K$  è indipendente dal tempo. Introduciamo la funzione caratteristica di Hamilton

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 Q_1 + W_2(Q_2, \alpha_1, \alpha_2),$$

e scriviamo l'equazione di Hamilton-Jacobi per la hamiltoniana  $K$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Q_2}\right)^2 - \frac{1}{Q_2^2} \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)^2 + \frac{1}{Q_2^2} = e(\alpha_1, \alpha_2),$$

che può essere scritta come un'equazione nella sola coordinata  $Q_2$

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 - \frac{\alpha_1^2}{Q_2^2} + \frac{1}{Q_2^2} = \alpha_2, \quad (1)$$

dove abbiamo posto  $e(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2$ .

ii) Per trovare un integrale completo

$$S(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) - \alpha_2 t$$

dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla funzione  $K$  dobbiamo determinare  $W_2$ . Dall'equazione (1) possiamo scrivere

$$\frac{\partial W_2}{\partial Q_2} = \sqrt{\alpha_2 + \frac{\alpha_1^2 - 1}{Q_2^2}}.$$

Integrando, si ottiene

$$W_2 = \int \sqrt{\alpha_2 + \frac{\alpha_1^2 - 1}{Q_2^2}} dQ_2 = \int \frac{\sqrt{\alpha_2 Q_2^2 + \alpha_1^2 - 1}}{Q_2} dQ_2,$$

e dopo qualche conto (per esempio, si può effettuare il seguente cambio di variabile:  $z = \sqrt{\alpha_2 Q_2^2 + \alpha_1^2 - 1}$ ) si trova (assumendo che  $|\alpha_1| > 1$ )

$$W_2 = \sqrt{\alpha_2 Q_2^2 + \alpha_1^2 - 1} + \sqrt{\alpha_1^2 - 1} \operatorname{arctanh} \sqrt{1 + \frac{\alpha_2 Q_2^2}{\alpha_1^2 - 1}}.$$

Si ha

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial^2 W_2}{\partial \alpha_2 \partial Q_2} = \frac{Q_2}{2\sqrt{\alpha_2 Q_2^2 + \alpha_1^2 - 1}} \neq 0.$$

Un integrale completo è dato da

$$S = \alpha_1 Q_1 + \sqrt{\alpha_2 Q_2^2 + \alpha_1^2 - 1} + \sqrt{\alpha_1^2 - 1} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{\alpha_2 Q_2^2}{\alpha_1^2 - 1} + 1} - \alpha_2 t.$$