Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Novembre 2022

Esercizio 1
Si consideri l'equazione di Newton

$$m\ddot{X} = kX, \qquad k > 0,$$

dove $X = (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$ sono le coordinate di un punto materiale di massa m che si muove su un piano.

i) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange nelle coordinate polari $(q, \theta) \in (\mathbb{R}^+, S^1)$ definite sul piano del moto.

Assumendo che $m = 1$,

ii) determinare la componente $\bar{q}(t)$ della soluzione $\bar{\gamma}(t) = (\bar{q}(t), \bar{\theta}(t))$ di tali equazioni con condizioni iniziali

$$q(0) = 1, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{k}{3}}.$$

iii) mostrare che per ogni tempo $\tau > 0$, $\bar{q}(t)$ è un minimo debole stretto del funzionale

$$\mathcal{A}_{\tilde{L}} = \int_0^\tau \tilde{L}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t))dt,$$

nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$, dove $\tilde{L}(q, \dot{q})$ è la lagrangiana ridotta che si ottiene "eliminando" la coordinata θ nelle equazioni.

Esercizio 2

i) Data una funzione di quattro variabili scalari $S(q_1, q_2, P_1, Q_2)$ tale che

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial(q_1, q_2)\partial(P_1, Q_2)} \neq 0$$

su tutto il dominio considerato, mostrare che le relazioni

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}, \quad Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1}, \quad P_2 = -\frac{\partial S}{\partial Q_2}$$

definiscono localmente una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\Psi}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2).$$

ii) Completare le relazioni

$$P_1 = q_1 p_2 - q_2 p_1, \qquad Q_2 = q_1 p_1 + q_2 p_2$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \overset{\Psi}{\mapsto} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

definita su $p_1, p_2, q_1, q_2 > 0$, utilizzando una funzione generatrice S dello stesso tipo del punto precedente.[1]

[1] *Suggerimento:* si ricordi la relazione $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, valida per ogni $x > 0$.

iii) (*facoltativo*) Trovare la soluzione delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{4} \log^2(q_1^2 + q_2^2) + q_1(p_1 + p_2) - q_2(p_1 - p_2)$$

e con condizioni iniziali

$$p_1(0) = p_2(0) = q_1(0) = q_2(0) = 1.$$

1° compitino IFM, a.a. 2022/2023, 17 novembre 2022

Soluzione esercizio 1

i) Energia cinetica

$$T(\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

Energia potenziale

$$V(x,y) = -\frac{1}{2}k(x^2+y^2)$$

Lagrangiana

$$L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = T(\dot{x},\dot{y}) - V(x,y)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$$

Scriviamo le relazioni

$$\begin{cases} x = q\cos\theta \\ y = q\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$(q,\theta) \in (\mathbb{R}^+, S^1)$, dalle quali si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{q}\cos\theta - q\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \dot{y} = \dot{q}\,\mathrm{sen}\,\theta + q\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

Otteniamo

$$x^2+y^2 = q^2$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{q}^2 + q^2\dot{\theta}^2$$

$$L(q,\dot{q},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + q^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\kappa q^2$$

Le equazioni di Lagrange associate ad L sono

$$\begin{cases} m\ddot{q} = mq\dot{\theta}^2 + \kappa q \\ \frac{d}{dt}(mq^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

dalla seconda equazione si vede che

$$mq^2\dot{\theta}^2 = c$$

con c costante non negativa

ii) Determiniamo $\bar{q}(t)$ dalla relazione

$$q = \sqrt{x^2 + y^2}$$

L'equazione di Newton porge $(m = 1)$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \kappa x \\ \ddot{y} = \kappa y \end{cases}$$

$$x(t) = A e^{\sigma t} + B e^{-\sigma t} \qquad (\sigma = \sqrt{\kappa})$$

$$y(t) = C e^{\sigma t} + D e^{-\sigma t}$$

Calcoliamo le e.i. :

$$x(0) = 1 \cdot \cos 0 = 1$$

$$y(0) = 1 \cdot \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0 - 1 \cdot \sqrt{\frac{k}{3}} \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 + 1 \cdot \sqrt{\frac{k}{3}} \cos 0 = \sqrt{\frac{k}{3}}$$

Si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = A + B \\ \dot{x}(t) = \sigma(A e^{\sigma t} - B e^{-\sigma t}) \\ 0 = A - B \end{array} \right.$$

$$\longrightarrow \quad A = B = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}(e^{\sigma t} + e^{-\sigma t}) = \cosh(\sqrt{k}\, t)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = C + D \\ \dot{y}(t) = \sigma(C e^{\sigma t} - D e^{-\sigma t}) \end{array} \right.$$

$$\sqrt{\frac{k}{3}} = \sqrt{k}\,(C - D)$$

$$\longrightarrow \quad C = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad D = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(e^{\sigma t} - e^{-\sigma t}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{senh}(\sqrt{k}\, t)$$

Allora

$$\bar{q}(t) = \sqrt{\cosh^2(\sqrt{k}\, t) + \frac{1}{3} \operatorname{senh}^2(\sqrt{k}\, t)}$$

iii) Lagrangiana ridotta $\tilde{L}$

$$\tilde{L}(q,\dot{q}) = \left(L(q,\dot{q},\dot{\theta}) - \dot{\theta}c\right)\Big|_{\dot{\theta}=c/q^2}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{c^2}{2q^2} + \frac{1}{2}\kappa q^2$$

dall'equazione si ha

$$q^2\dot{\theta} = c \quad \text{(costante)}$$

dove $c = (q(0))^2\,\dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{\kappa}{3}}$

$$\tilde{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\kappa}{6q^2} + \frac{1}{2}\kappa q^2$$

$$\tilde{L}_{\dot{q}\dot{q}} = 1 \;, \quad \tilde{L}_{q\dot{q}} = 0$$

$$\tilde{L}_q = \frac{\kappa}{3q^3} + \kappa q \;, \quad \tilde{L}_{qq} = \kappa - \frac{\kappa}{q^4}$$

$$a(t) = \frac{1}{2} > 0 \;, \quad b(t) = 0$$

$$c(t) = \frac{\kappa}{2}\left(1 - \frac{1}{(\bar{q}(t))^4}\right)$$

Equazione di Jacobi

$$-\frac{1}{2}\ddot{\eta} + \frac{\kappa}{2}\left(1 - \frac{1}{(\bar{q}(t))^4}\right)\eta = 0$$

$$\ddot{\eta} = k\left(1 - \frac{1}{(\bar{q}(t))^4}\right)\eta$$

$$\dot{\eta}(0) = 1 \,, \quad \eta(0) = 0$$

Assumiamo che esista

$$t_1 = \min\{t > 0 : \eta(t) = 0\}$$

allora deve esistere $0 < t_2 < t_1$ tale che

$\dot{\eta}(t_2) = 0$

integrando si ottiene

$$\dot{\eta}(t_2) - 1 = \int_0^{t_2} \Gamma(t)\,\eta(t)\,dt = -1$$

dove $\Gamma(t) = k\left(1 - \frac{1}{(\bar{q}(t))^4}\right)$

notiamo che $\bar{q}(t) \geqslant 1$, perciò $\Gamma(t) \geqslant 0$,

dunque deve esistere $0 < t_3 \leqslant t_2$ tale che

$$\eta(t_3) = 0$$

ma ciò contraddice l'ipotesi

Concludiamo che $\bar{q}(t)$ è un minimo debole

stretto di $A_{\tilde{\tau}}$ per ogni $\tau > 0$

Soluzione esercizio 2

i) Usiamo la condizione di Lie e consideriamo

$$P \cdot dQ - p \cdot dq$$

Si può scrivere

$$P \cdot dQ - p \cdot dq =$$

$$d(P_1 Q_1) - Q_1 dP_1 + P_2 dQ_2 - p_1 dq_1 - p_2 dq_2 =$$

$$d(P_1 Q_1 - S)$$

ii) Scriviamo

$$P_1 = q_1 p_2 - q_2 p_1 , \quad Q_2 = q_1 p_1 + q_2 p_2$$

nella forma

$$\begin{pmatrix} -q_2 & q_1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} \begin{pmatrix} -q_2 & q_1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = \frac{q_1 Q_2 - q_2 P_1}{q_1^2 + q_2^2} = \frac{\partial S}{\partial q_1}$$

$$p_2 = \frac{q_1 P_1 + q_2 Q_2}{q_1^2 + q_2^2} = \frac{\partial S}{\partial q_2}$$

$$S(q_1, q_2, P_1, Q_2) = \frac{Q_2}{2} \log(q_1^2 + q_2^2) -$$

$$P_1 \arctan\left(\frac{q_1}{q_2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial(P_1, Q_2)\partial(q_1, q_2)} = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} \begin{pmatrix} -q_2 & q_1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a $-1/(q_1^2 + q_2^2)$

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = -\arctan \frac{q_1}{q_2}$$

$$P_2 = -\frac{\partial S}{\partial Q_2} = -\frac{1}{2} \log(q_1^2 + q_2^2)$$

Abbiamo dunque

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\psi} \Big(q_1 p_2 - q_2 p_1, -\frac{1}{2} \log(q_1^2 + q_2^2),$$

$$-\arctan \frac{q_1}{q_2}, q_1 p_1 + q_2 p_2\Big)$$

iii) Per rispondere calcoliamo $K = H \circ \psi^{-1}$

$$K = P_2^2 + P_1 + Q_2$$

$$X_K = (0, -1, 1, 2P_2)^T$$

Le c.i. per le nuove variabili sono

$$P_1(0) = 0\ ,\quad P_2(0) = -\frac{1}{2}\log 2\ ,$$

$$Q_1(0) = -\frac{\pi}{4}\ ,\quad Q_2(0) = 2$$

La soluzione delle equaz. di Hamilton con hamiltoniana K e c.i. appena trovate è

$$P_1(t) = 0\ ,\quad P_2(t) = -\frac{1}{2}\log 2 - t\ ,$$

$$Q_1(t) = t - \frac{\pi}{4}\ ,\quad Q_2(t) = 2 - t\log 2 - t^2$$

Scriviamo ora $\psi^{-1}(P_1, P_2, Q_1, Q_2)$:

$$q_1^2 + q_2^2 = e^{-2P_2}\ ,\qquad \frac{q_1}{q_2} = -\tan Q_1$$

$$\longrightarrow\quad q_1 = -e^{-P_2}\operatorname{sen} Q_1$$
$$q_2 = e^{-P_2}\cos Q_1$$

inoltre da

$$p_1 = \frac{q_1 Q_2 - q_2 P_1}{q_1^2 + q_2^2}\ ,\quad p_2 = \frac{q_1 P_1 + q_2 Q_2}{q_1^2 + q_2^2}$$

si ha

$$p_1 = -e^{P_2}(Q_2 \operatorname{sen} Q_1 + P_1 \cos Q_1)$$

$$p_2 = e^{P_2}(Q_2\cos Q_1 - P_1 \operatorname{sen} Q_1)$$

La soluzione cercata è

$$q_1(t) = -\sqrt{2}\, e^{t} \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$q_2(t) = \sqrt{2}\, e^{t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$p_1(t) = -\left(2 - t \log 2 - t^2\right) \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$p_2(t) = \left(2 - t \log 2 - t^2\right) \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$