Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Novembre 2021

Esercizio 1
Si consideri la hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \frac{t}{2}|\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{2t}(|\mathbf{q}|^2 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{q})$$

con $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

i) Completare le relazioni

$$Q_1 = \frac{q_1^2}{2t}, \qquad Q_2 = \frac{q_2^2}{2t}$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \overset{\Psi}{\to} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2$, e scrivere la hamiltoniana K coniugata ad H tramite la trasformazione Ψ.

ii) Trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla hamiltoniana K.

iii) Determinare due integrali primi indipendenti per il campo vettoriale X_H.

Esercizio 2
Si consideri la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q), \qquad V(q) = q^2 \log q$$

con $q > 0$, $\dot{q} \in \mathbb{R}$.

i) Tracciare il ritratto di fase delle equazioni di Eulero-Lagrange per L.

ii) Mostrare che la soluzione $\bar{\gamma}(t)$ delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizioni iniziali

$$\bar{\gamma}(0) = e^{-1/2}, \qquad \dot{\bar{\gamma}}(0) = (1/e - 1/3)^{1/2}$$

è una funzione periodica tale che

$$\bar{\gamma}(t) > 1/e, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

iii) Mostrare che esiste un valore τ_* del tempo t per cui $\bar{\gamma}(t)$ non può essere un minimo debole del funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{A}_L(\gamma) = \int_0^{\tau_*} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt.$$

Esercizio 1

i) Cerco una funzione generatrice $S(q, P, t)$.

Da

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{q_1^2}{2t} \qquad Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = \frac{q_2^2}{2t}$$

trovo

$$S(q, P, t) = \frac{q_1^2 P_1}{2t} + f_1(q, P_2, t)$$

$$S(q, P, t) = \frac{q_2^2 P_2}{2t} + f_2(q, P_1, t)$$

Pongo

$$S(q, P, t) = \frac{1}{2t}\left(q_1^2 P_1 + q_2^2 P_2\right)$$

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P} = \frac{q_1 q_2}{t^2} \neq 0$$

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{q_1 P_1}{t} \qquad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{q_2 P_2}{t}$$

da cui si ha $P_1 = t\,\frac{p_1}{q_1}$, $P_2 = t\,\frac{p_2}{q_2}$

La trasformazioni inversa porge

$$q_1 = \sqrt{2t\,Q_1} \qquad q_2 = \sqrt{2t\,Q_2}$$

$$p_1 = P_1\sqrt{\frac{2Q_1}{t}} \qquad p_2 = P_2\sqrt{\frac{2Q_2}{t}}$$

Ricaviamo l' hamiltoniana K coniugata ad H tramite ψ

$$K(P,Q,t) = \left(H(p,q,t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,P,t)\right)\circ\psi^{-1}$$

$$H\circ\psi^{-1} = \frac{t}{2}\left(\frac{2P_1^2Q_1}{t} + \frac{2P_2^2Q_2}{t}\right) +$$

$$\frac{1}{2t}\left(2t\,Q_1 + 2t\,Q_2 + 2P_1Q_1 + 2P_2Q_2\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2t^2}\left(q_1^2P_1 + q_2^2P_2\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}\circ\psi^{-1} = -\frac{1}{t}\left(P_1Q_1 + P_2Q_2\right)$$

$$K = P_1^2Q_1 + P_2^2Q_2 + Q_1 + Q_2$$

ii) Dato che K è indipendente dal tempo cerco un integrale completo della forma

$$S(Q,\alpha,t) = W(Q,\alpha) - e(\alpha)\,t$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

Assumo

$$W(Q,\alpha) = W_1(Q_1,\alpha) + W_2(Q_2,\alpha)$$

L'equazione di Hamilton - Jacobi diventa

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 Q_1 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 Q_2 + Q_1 + Q_2 = e(\alpha)$$

Si possono quindi scrivere le due equazioni

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 Q_1 + Q_1 = \alpha_1 \\ \left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 Q_2 + Q_2 = \alpha_2 \end{cases}$$

dove $e(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2$

Consideriamo la prima equazione

$$\frac{\partial W_1}{\partial Q_1} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \qquad \text{(scegliendo il segno +)}$$

$$W_1(Q_1,\alpha_1) = \int \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}\; dQ_1$$

$$\int \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}\; dQ_1 = Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \int \frac{Q_1}{2}\left(-\frac{\alpha_1}{Q_1^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}}\, dQ_1$$

$$z = \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \qquad dz = -\left(\frac{\alpha_1}{2Q_1^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}}\, dQ_1$$

$$Q_1 = \frac{\alpha_1}{1 + z^2}$$

$$\longrightarrow \quad - \int \frac{\alpha_1}{1+z^2}\, dz = -\alpha_1 \arctan z$$

quindi

$$\int \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}\; dQ_1 = Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \alpha_1 \arctan \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}$$

L'integrale completo cercato è dato da

$$S(Q,\alpha,t) = Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \alpha_1 \arctan \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \alpha_1 t +$$

$$Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_2} - 1} - \alpha \arctan \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_2} - 1} - \alpha_2 t$$

iii) Il metodo di Hamilton-Jacobi ci indica una scelta possibile: α_1 e α_2

$$\alpha_1 = P_1^2 Q_1 + Q_1$$

$$\alpha_2 = P_2^2 Q_2 + Q_2$$

$$\frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial(P, Q)} = \begin{pmatrix} 2P_1Q_1 & 0 & 1+P_1^2 & 0 \\ 0 & 2P_2Q_2 & 0 & 1+P_2^2 \end{pmatrix}$$

il rango di questa matrice è 2, quindi i due integrali sono indipendenti

Si conclude che due integrali primi indipendenti per X_H sono

$$J_1 = t^{\cancel{2}} \frac{p_1^2}{\cancel{q_1^2}} \frac{\cancel{q_1^2}}{2\cancel{t}} + \frac{q_1^2}{2t} = \frac{t}{2} p_1^2 + \frac{q_1^2}{2t}$$

$$J_2 = \frac{t}{2} p_2^2 + \frac{q_2^2}{2t}$$

Esercizio 2

i)

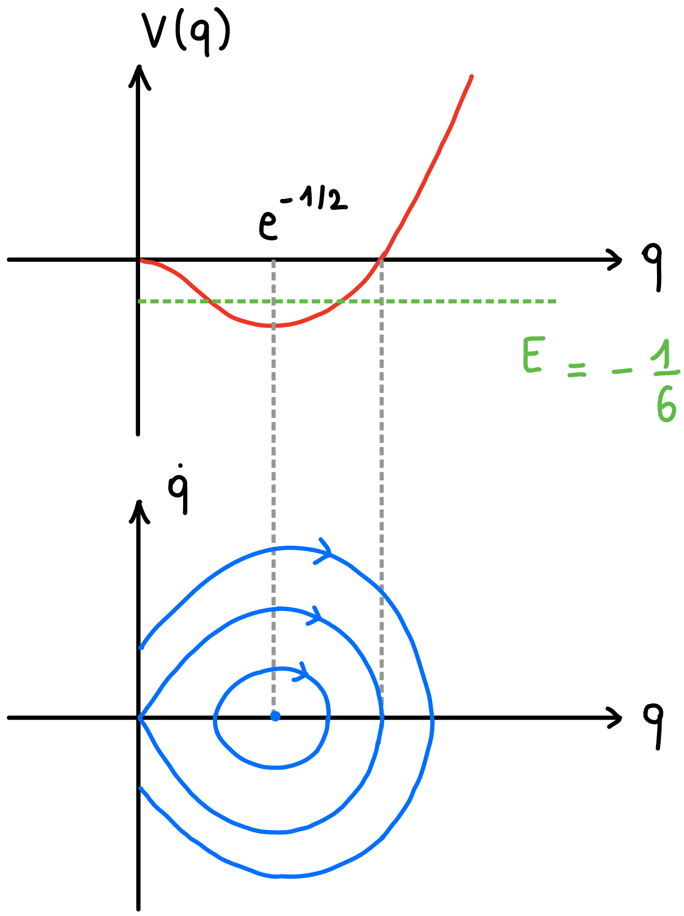
$$\lim_{q \to 0^+} q^2 \log q = 0$$

$$\lim_{q \to +\infty} q^2 \log q = +\infty$$

calcoliamo $V'(q)$:

$$V'(q) = 2q \log q + q$$

$$V'(q) = 0 \quad \text{per} \quad \log q = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad q = e^{-1/2}$$



ii) Calcoliamo il valore dell'energia meccanica che è una quantità conservata lungo il moto

$$E(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + V(q)$$

$$\bar{E}(\bar{\gamma}(0),\dot{\bar{\gamma}}(0)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}$$

notando che

$$V(e^{-1/2}) = \frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}\right) < \bar{E} < 0$$

posso dire dal ritratto di fase che $\bar{\gamma}(t)$ è una funzione periodica; inoltre

$$V\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2} > -\frac{1}{6}$$

perciò dato che $\frac{1}{e} < \frac{1}{\sqrt{e}}$ possiamo affermare che

$$\bar{\gamma}(t) > \frac{1}{e} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

iii)

Vogliamo considerare la soluzione dell'equazione di Jacobi

$$-\frac{d}{dt}(a(t)\eta) + (c(t)-\dot{b}(t))\eta = 0$$

con condizioni iniziali

$$\eta(0) = 0 \quad , \quad \dot{\eta}(1) = 0$$

e mostrare che esiste $\tau^* > 0$ tale che $\eta(\tau^*) = 0$

$$L_{\dot{q}} = \dot{q} \qquad L_q = -V' = -2q\log q - q$$

$$a(t) = \frac{1}{2}L_{\dot{q}\dot{q}}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t)) = \frac{1}{2} > 0$$

$$b(t) = \frac{1}{2}L_{q\dot{q}}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t)) = 0$$

$$c(t) = \frac{1}{2}L_{qq}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t)) = -\frac{1}{2}V''(\bar{\gamma}(t))$$

$$-\frac{1}{2}\left(2\log\bar{\gamma}(t) + 2 + 1\right) = -\frac{3}{2} - \log\bar{\gamma}(t)$$

$$-\frac{1}{2}\ddot{\eta} - \left(\frac{3}{2} + \log\bar{\gamma}(t)\right)\eta = 0$$

$$\ddot{\eta} = -(3 + 2\log\bar{\rho}(t))\eta$$

poiché $\bar{\rho}(t) > \frac{1}{e}$ si ha

$$3 + 2\log\bar{\rho}(t) > 3 + 2\log\frac{1}{e} = 1$$

da cui

$$\ddot{\eta} < -\eta$$

Considero il problema di Cauchy

$$\ddot{\xi} = -\xi, \quad \xi(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = 1$$

che ha soluzione $\xi(t) = \operatorname{sen} t$

Per il teorema del confronto applicato a

$$\begin{cases} \ddot{\eta} < -\eta \\ \eta(0) = 0 \\ \dot{\eta}(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{\xi} = -\xi \\ \xi(0) = 0 \\ \dot{\xi}(0) = 1 \end{cases}$$

posso dire che $\dot{\eta}(t) < \dot{\xi}(t)$ per $t > 0$

e quindi $\eta(t) < \xi(t) = \operatorname{sen}(t)$

Esiste $\tau^* < \pi$ tale che $\eta(\tau^*) = 0$