

In alcune missioni spaziali, come quelle in cui un satellite viene inviato verso i pianeti esterni (Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno) sono previsti passaggi ravvicinati coi pianeti al fine di ridurre la quantità di propellente necessaria per raggiungere il pianeta desiderato.

È possibile ottenere una buona approssimazione della traiettoria interplanetaria usando il metodo delle coniche raccordate: la missione viene suddivisa in una serie di fasi in cui il moto è assunto Kepleroiano.

Questo procedimento si basa sul concetto di sfera di influenza centrata nel pianeta « incontrato », al cui interno avviene il fly-by planetario lungo una traiettoria iperbolica.

Il passaggio ravvicinato provoca, grazie all'attrazione gravitazionale del pianeta, una variazione della velocità del satellite rispetto al Sole.

Nelle fasi in cui il satellite è sufficientemente lontano dai pianeti, possiamo assumere una dinamica a due corpi satellite - Sole in cui il satellite percorre un arco di ellipse. Quando invece si sta avvicinando ad un pianeta non è chiaro se possiamo trascurare l'attrazione gravitazionale del Sole. Per capire come trattare l'incontro ravvicinato ha senso considerare il

problema ristretto circolare dei tre corpi

due punti materiali di masse m_1 (Sole), m_2 (pianeta) si muovono nello spazio su un'orbita circolare; un terzo punto P di massa trascurabile rispetto ai primi due (cioè il satellite), si muove sotto l'azione della forza Newtoniana esercitata dal Sole e dal pianeta, senza influenzarne il movimento.

È comodo far uso di un sistema di riferimento in cui i primari occupano posizioni fisse; inoltre è comodo fissare le unità di misura in modo da minimizzare il numero di costanti.

Come misura di lunghezza scegliamo il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta intorno al Sole, cioè la distanza tra i due.

L'unità di massa è posta uguale alla somma delle masse del Sole e del pianeta, così si ha

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{massa del pianeta}$$

$$1 - \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \text{massa del Sole.}$$

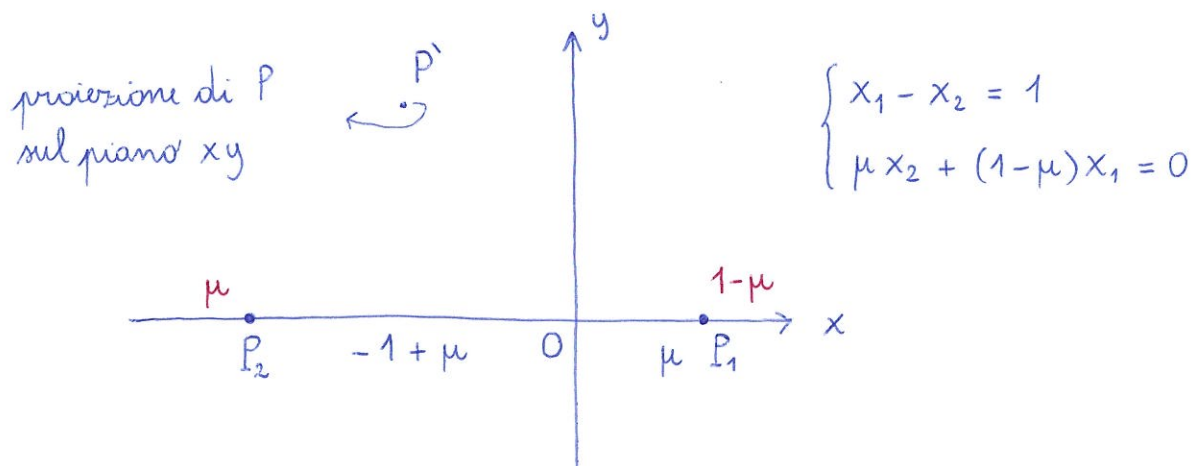
Infine poniamo $G = 1$ (con G costante di gravitazione), il che equivale a fissare il tempo.

Ricordando la relazione

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

ne segue che il moto del pianeta e del Sole ha periodo $T = 2\pi$ e frequenza angolare $\omega = 1$.

Introduciamo un sistema di riferimento solidale al Sole e al pianeta e quindi in moto rotatorio uniforme attorno al baricentro dei primari (così possiamo chiamare i due punti materiali che rappresentano il Sole ed il pianeta)

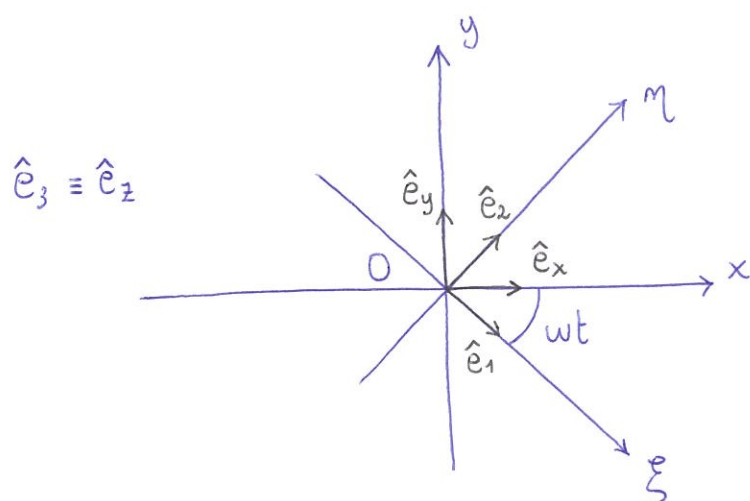


$\Sigma' = O \hat{e}_x \hat{e}_y \hat{e}_z$ è il sistema di riferimento rotante

Consideriamo quindi un sistema di riferimento fisso

$$\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$$

con origine sempre in O (che è il baricentro dei primari)



Gli assi $O\xi, O\eta$ sono
complanari agli assi
 Ox, Oy

La velocità angolare di Σ' rispetto a Σ è $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ con

$$\omega = n.$$

Introduciamo i vettori

$$\vec{r} = P - O, \quad \vec{r}_1 = P - P_1, \quad \vec{r}_2 = P - P_2$$

Inoltre

$$\vec{r} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z$$

$$\vec{r} = \xi \hat{e}_1 + \eta \hat{e}_2 + \zeta \hat{e}_3$$

L'Hamiltoniana è

$$H(\xi, \eta, \zeta, p_\xi, p_\eta, p_\zeta, t) = \frac{1}{2m} (p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + V(\xi, \eta, \zeta, t) \quad G=1$$

dove l'energia potenziale V è data da $V = -\frac{G(1-\mu)m}{r_1} - \frac{G\mu m}{r_2}$

con $r_1 = |\vec{r}_1|$, $r_2 = |\vec{r}_2|$ ed m è la massa di P (espressa nell'unità di massa scelta).

Si noti che r_1 ed r_2 sono funzioni di ξ, η, ζ e t .

Consideriamo la trasformazione

$$\begin{cases} \xi = x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t) \\ \eta = x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t) \\ \zeta = z \end{cases}$$

e la sua inversa

$$\begin{cases} x = \xi \cos(\omega t) + \eta \sin(\omega t) \\ y = -\xi \sin(\omega t) + \eta \cos(\omega t) \\ z = \zeta \end{cases}$$

Questa è una trasformazione puntuale dipendente dal tempo, che si può estendere ad una trasformazione canonica mediante la funzione generatrice

$$S(p_x, p_y, p_z, \xi, \eta, \zeta, t) =$$

$$p_x (\xi \cos(\omega t) + \eta \sin(\omega t)) + p_y (-\xi \sin(\omega t) + \eta \cos(\omega t)) + p_z \zeta.$$

La trasformazione sui momenti è data da

$$\begin{cases} p_\xi = \frac{\partial S}{\partial \xi} = p_x \cos(\omega t) - p_y \sin(\omega t) \\ p_\eta = \frac{\partial S}{\partial \eta} = p_x \sin(\omega t) + p_y \cos(\omega t) \\ p_\zeta = \frac{\partial S}{\partial \zeta} = p_z \end{cases}$$

Inoltre

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \omega p_x (-\xi \sin(\omega t) + \eta \cos(\omega t)) - \omega p_y (\xi \cos(\omega t) + \eta \sin(\omega t))$$

$$= w(p_x y - p_y x).$$

L'Hamiltoniana del problema circolare ristretto nel sistema rotante è

$$\tilde{H}(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + w(p_x y - p_y x) - \frac{G(1-\mu)m}{\sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{G\mu m}{\sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$\text{con } r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2}.$$

Abbiamo usato il fatto che $\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$. Poniamo $G = w = 1$ ed elimi-

niamo la massa m mediante la trasformazione di scala

$$p_x = m \dot{p}_x, \quad p_y = m \dot{p}_y, \quad p_z = m \dot{p}_z.$$

Le lasciamo inalterate le coordinate, la trasformazione che si ottiene è canonica con valenza $1/m$

$$K(x, y, z, \dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z) = \frac{1}{m} \tilde{H}(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \Big|_{\substack{p_x = m \dot{p}_x, \quad p_y = m \dot{p}_y, \\ p_z = m \dot{p}_z}}$$

Risulta

$$K(x, y, z, \dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z) = \frac{1}{2} (\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2 + \dot{p}_z^2) - x \dot{p}_y + y \dot{p}_x - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}.$$

Le equazioni di Hamilton associate sono

$$\dot{x} = \frac{\partial K}{\partial \dot{p}_x} = \dot{p}_x + y$$

$$\dot{y} = \frac{\partial K}{\partial \dot{p}_y} = \dot{p}_y - x$$

$$\dot{z} = \frac{\partial K}{\partial p_z} = p_z$$

$$(p_x) = - \frac{\partial K}{\partial x} = p_y - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^{3/2}} - \frac{\mu(x+1-\mu)}{r_2^{3/2}}$$

$$(p_y) = - \frac{\partial K}{\partial y} = -p_x - \frac{(1-\mu)y}{r_1^{3/2}} - \frac{\mu y}{r_2^{3/2}}$$

$$(p_z) = - \frac{\partial K}{\partial z} = - \frac{(1-\mu)z}{r_1^{3/2}} - \frac{\mu z}{r_2^{3/2}}$$

L'Hamiltoniana K è una costante del moto che viene chiamata costante di Jacobi.

Si noti che l'energia non si conserva perché il sistema non è autonomo: P si muove sotto l'azione di due masse il cui moto è noto e indipendente dalla presenza di P .

Sostituiamo in K al posto di p_x, p_y, p_z le espressioni date da

$$p_x = \dot{x} - y,$$

$$p_y = \dot{y} + x, \quad p_z = \dot{z}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - x p_y + y p_x &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \dot{x}y + \dot{y}x \\ - x\dot{y} - x^2 + y\dot{x} - y^2 &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Si ottiene

$$C(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}.$$

Questa è la forma in cui la costante di Jacobi viene solitamente presentata, ed è anche chiamata integrale dell'energia relativa.

criterio di Tisserand

Tisserand (Felix T., 1845-1896), basandosi sulla conservazione dell'integrale di Jacobi, stabilì un criterio che gli servì per poter identificare un corpo celeste (nello specifico una cometa) osservato dopo l'incontro con

Giove con la stessa cometa osservata prima dell'incontro.

26)

Nel caso di Giove e del Sole si ha $\mu \cong 10^{-3}$, perciò $m_s \gg m_j$, inoltre il Sole occupa una posizione molto vicina a quella del baricentro del sistema Giove - Sole.

Per arrivare al criterio di Tisserand dobbiamo esprimere C come funzione delle variabili $\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$, che sono le coordinate della posizione e della velocità della cometa nel riferimento inerziale. Si ottiene

$$\tilde{C}(\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, t) = \frac{1}{2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - \xi \dot{\eta} + \dot{\xi} \eta - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2},$$

con r_1, r_2 qui intese come funzioni di ξ, η, ζ, t .

Poiché $\mu \ll 1$ possiamo dire che $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ approssimano molto bene le componenti della velocità eliocentrica della cometa. Usando la definizione di energia Kepleriana rispetto al Sole ed esprimendo il parametro gravitazionale $G(m_c + m_s)$ nelle nostre unità, cioè

$$G(m_c + m_s) \rightarrow \frac{G(m_c + m_s)}{G(m_s + m_s)} = \frac{m_c}{m_s + m_s} + 1 - \mu \cong 1 - \mu$$

dove m_c, m_j, m_s sono le masse della cometa, di Giove e del Sole, si ha

$$\frac{1}{2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) = \frac{1-\mu}{r_s} - \frac{1-\mu}{2a} \quad (1)$$

dove r_s è la distanza eliocentrica della cometa ed a è il semiasse maggiore della cometa (più precisamente dell'ellisse osculatrice che si ottiene studiando il problema come un problema dei due corpi Sole - cometa perturbato da Giove). Inoltre possiamo scrivere

$$\xi \dot{\eta} - \dot{\xi} \eta = \sqrt{(1-\mu)a(1-e^2)} \cos i \quad (2)$$

riconoscendo che $\xi \dot{\eta} - \dot{\xi} \eta$ rappresenta la componente del momento angolare della cometa rispetto al Sole lungo ξ . La quantità e rappresenta l'eccentricità della conica osculatrice, mentre i è la sua inclinazione rispetto al piano su cui giace l'orbita di Giove.

Se sostituiamo (1) e (2) nell'espressione di $\tilde{C}$ otteniamo

$$\frac{1-\mu}{r_s} - \frac{1-\mu}{2a} - \sqrt{(1-\mu)a(1-e^2)} \cos i - \frac{1-\mu}{r_s} - \frac{\mu}{r_s} = \tilde{C}'$$

con r_s distanza della cometa da Giove.

Se le osservazioni sono prese quando la cometa è distante da Giove, allora possiamo trascurare il termine μ/r_s . Infine possiamo approssimare $1-\mu$ con 1

$$-\frac{1}{2a} - \sqrt{a(1-e^2)} \cos i = T \quad (\text{parametro di Tisserand}).$$

Supponiamo di aver determinato a, e, i dalle osservazioni della cometa.

Siano a_0, e_0, i_0 e a_1, e_1, i_1 i valori di a, e, i relativi alle epoche t_0, t_1 , una antecedente e una successiva all'incontro. Il criterio di Tisserand è dato dall'equazione

$$\frac{1}{2a_0} + \sqrt{a_0(1-e_0^2)} \cos i_0 = \frac{1}{2a_1} + \sqrt{a_1(1-e_1^2)} \cos i_1.$$

Notiamo che a_0, a_1 devono essere espresse come unità della distanza Giove-Sole. Il criterio è valido solo in modo approssimato, però è sicuramente possibile usarlo per escludere che si tratti dello stesso oggetto.

Vediamo ora come sfruttare il criterio di Tisserand nel caso di uno spacecraft che effettua un fly-by planetario.

Riscriviamo l'integrale di Jacobi come

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - (x^2 + y^2) - \frac{2(1-\mu)}{r_1} - \frac{2\mu}{r_2} = 2C \quad *$$

ed introduciamo la quantità U come segue

$$U = \sqrt{3 + 2C}.$$

Poniamo $\mu = 0$. Ciò significa considerare due punti materiali di massa trascurabile rispetto al Sole. Uno di questi due punti si muove lungo un'orbita circolare di raggio 1, l'altro punto si muove lungo una conica con un fuoco nel Sole. Supponiamo che questa conica intersechi l'orbita circolare. Quando i due punti occupano la stessa posizione, cioè

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0$$

l'equazione $*$ porge

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = U^2.$$

Da questa relazione si vince che U può essere intesa come la velocità relativa di collisione con il pianeta se quest'ultimo avesse una massa trascurabile in modo che non vi sia interazione gravitazionale tra il satellite e il pianeta.

In una dinamica puramente a due corpi satellite - pianeta e in un riferimento con assi fissi e origine nel baricentro del sistema (che poniamo nel centro del pianeta perché la massa del satellite è trascurabile), la velocità relativa del satellite rispetto al pianeta soddisfa la relazione

$$v_{rel}^2 = v_{\infty}^2 + \frac{2\mu}{r_2} \quad (3)$$

dove v_∞ rappresenta la velocità « all'infinito »

$$v_\infty^2 = - \frac{\mu}{2\tilde{a}}$$

dove $-\tilde{a} (>0)$ rappresenta il semiasse maggiore dell'iperbole percorsa dal satellite.

Tornando all'equazione * e considerando il caso in cui r_2 è piccolo (il satellite è vicino al pianeta) e μ è piccolo in modo da trascurare termini dell'ordine di μ , così che

$$x \cong 1, \quad y = 0, \quad r_1 \cong 1, \quad 1 - \mu \cong 1,$$

si ottiene

$$\tilde{v}_{rel}^2 := \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \cong U^2 + \frac{2\mu}{r_2}. \quad (4)$$

Confrontando (3) e (4) possiamo dire che U è una quantità analoga a v_∞ . Perciò quando il satellite è « sufficientemente » vicino al pianeta è ragionevole usare un modello a due corpi satellite - pianeta per definire l'orbita planetocentrica seguita dal satellite all'interno di quella regione dello spazio rappresentata dalla sfera di influenza del pianeta.

il metodo delle coniche raccordate

Ulla luce di quanto mostrato, nella fase preliminare della pianificazione di una missione spaziale interplanetaria si adotta il metodo delle coniche raccordate per ottenere una prima approssimazione della traiettoria interplanetaria.

Questo metodo prevede di raccordare soluzioni del problema dei due corpi in cui il corpo primario è o il Sole o il pianeta. Nel primo caso avremo degli archi di ellisse, nel secondo caso degli archi di iperbole. Questi archi di conica relativi alle varie fasi eliocentriche e planetocentriche vengono raccordati al

fine di evitare discontinuità in termini di posizione e velocità nella traiettoria complessiva.

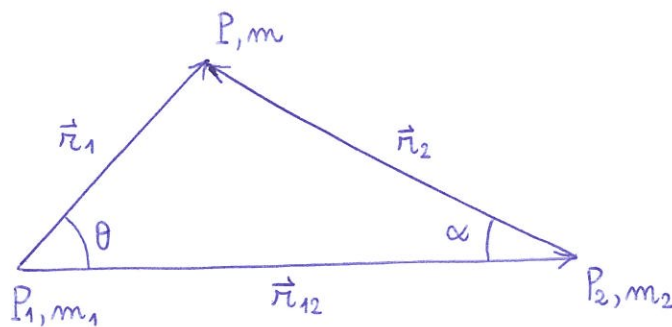
L'aspetto più delicato è la determinazione della distanza entro cui l'azione gravitazionale di un corpo celeste sia predominante in modo da passare da una dinamica eliocentrica ad una planetocentrica e viceversa. Al tal fine è rilevante introdurre il concetto di sfera di influenza.

Perturbazioni introdotte da un terzo corpo

Consideriamo il moto di un corpo m (il satellite o la sonda) in presenza di due corpi di massa m_1 ed m_2 (il Sole e un pianeta ad esempio), questi ultimi considerati come due punti materiali.

Osserviamo che

$$m_1, m_2 \gg m$$



Rispetto ad un sistema di riferimento inerziale le posizioni dei tre corpi sono individuate dai vettori

$$\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}$$

e le equazioni del moto sono

$$m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = - \frac{G m m_1}{r_1^3} \vec{r}_1 - \frac{G m m_2}{r_2^3} \vec{r}_2$$

$$m_1 \frac{d^2 \vec{R}_1}{dt^2} = \frac{G m m_1}{r_1^3} \vec{r}_1 + \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{R}_2}{dt^2} = - \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} + \frac{G m m_2}{r_2^3} \vec{r}_2$$

Tenendo conto delle relazioni $\vec{r}_1 = \vec{R} - \vec{R}_1$, $\vec{r}_2 = \vec{R} - \vec{R}_2$, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ arriviamo a scrivere le equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= - \frac{G(m_1 + m)}{r_1^3} \vec{r}_1 - G m_2 \left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) \\ \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= - \frac{G(m_2 + m)}{r_2^3} \vec{r}_2 + G m_1 \left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right) \end{aligned}$$

termine indotto
dell'accelerazione di
terzo corpo

Queste sono le equazioni del problema dei due corpi satellite - Sole (la prima) e satellite - pianeta (la seconda) perturbato dal pianeta e dal Sole rispettivamente.

Introduciamo la notazione

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= - \frac{G(m_1 + m)}{r_1^3} \vec{r}_1, & \vec{a}_{1d} &= - G m_2 \left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right), \\ \vec{a}_2 &= - \frac{G(m_2 + m)}{r_2^3} \vec{r}_2, & \vec{a}_{2d} &= G m_1 \left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right). \end{aligned}$$

Sfera di influenza

Possiamo definire un criterio per determinare la distanza dal pianeta entro cui la sua azione gravitazionale ha un effetto primario sul satellite, tale cioè da poter trascurare il Sole.

La sfera di influenza del pianeta è centrata in P_2 ed ha un raggio tale da soddisfare (in modo approssimato) la relazione

$$\frac{a_{1d}}{a_1} = \frac{a_{2d}}{a_2}.$$

In corrispondenza della superficie della sfera il rapporto tra il modulo dell'accelerazione di disturbo del pianeta e il modulo dell'accelerazione kepleriana del Sole è uguale al rapporto tra il modulo dell'accelerazione di disturbo del

Gli è il modulo dell'accelerazione Kepleriana dovuta al pianeta.

Si ha

$$Gm_2 \left| \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right| \frac{G(m_2 + m)}{r_2^2} = Gm_1 \left| \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right| \frac{G(m_1 + m)}{r_1^2}$$

Consideriamo singolarmente questi quattro termini

1) approssimazione di a_{1d}

$$a_{1d} = Gm_2 \sqrt{\left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) \cdot \left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right)} =$$

$$Gm_2 \sqrt{\frac{1}{r_{12}^4} + \frac{1}{r_2^4} + 2 \frac{\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_2}{r_{12}^3 r_2^3}} = \frac{Gm_2}{r_2^2} \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_{12}} \right)^4 - 2 \left(\frac{r_2}{r_{12}} \right)^2 \cos \alpha}$$

$$\cos \alpha = - \frac{\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_2}{r_{12} r_2}$$

definiamo $\delta = \frac{r_2}{r_{12}} \ll 1$, allora

$$a_{1d} = \frac{Gm_2}{r_2^2} \sqrt{1 + \delta^4 - 2\delta^2 \cos \alpha} \cong \frac{Gm_2}{r_2^2} \text{ trascurando i termini di}$$

ordine superiore a 1 in δ .

2) approssimazione di a_{2d}

$$a_{2d} = Gm_1 \sqrt{\left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right) \cdot \left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right)} =$$

$$Gm_1 \sqrt{\frac{1}{r_{12}^4} + \frac{1}{r_1^4} - 2 \frac{\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_1}{r_{12}^3 r_1^3}} = \frac{Gm_1}{r_{12}^2} \sqrt{1 + \left(\frac{r_{12}}{r_1} \right)^4 -$$

$$2 \left(\frac{r_{12}}{r_1} \right)^2 \cos \theta}$$

notiamo che

$$r_1 \cos \theta + r_2 \cos \alpha = r_{12}$$

$$r_1^2 = r_2^2 + r_{12}^2 - 2r_{12}r_2 \cos \alpha$$

dalla prima si ha

$$\cos \theta = \frac{r_{12} - r_2 \cos \alpha}{r_1}$$

e dalla seconda

$$\left(\frac{r_1}{r_{12}} \right)^2 = 1 + \delta^2 - 2\delta \cos \alpha.$$

Possiamo scrivere inoltre

$$\cos \theta = \frac{r_{12}}{r_1} (1 - \delta \cos \alpha) = \frac{1 - \delta \cos \alpha}{(1 - 2\delta \cos \alpha + \delta^2)^{1/2}}.$$

Sostituendo si ha

$$a_{1d} = \frac{Gm_1}{r_{12}^2} \sqrt{1 + \frac{1}{(1 - 2\delta \cos \alpha + \delta^2)^2} - 2 \frac{1 - \delta \cos \alpha}{(1 - 2\delta \cos \alpha + \delta^2)^{3/2}}}$$

Applichiamo le approssimazioni

$$(1 - 2\delta \cos \alpha + \delta^2)^{-2} \cong 1 - 2(-2\delta \cos \alpha + \delta^2) + \frac{(-2)(-3)}{2} (-2\delta \cos \alpha + \delta^2)^2 \cong$$

$$1 + 4\delta \cos \alpha - 2\delta^2 + 12\delta^2 \cos^2 \alpha,$$

$$(1 - 2\delta \cos \alpha + \delta^2)^{-3/2} \cong 1 - \frac{3}{2}(-2\delta \cos \alpha + \delta^2) + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(-2\delta \cos \alpha + \delta^2)^2$$

$$\cong 1 + 3\delta \cos \alpha - \frac{3}{2}\delta^2 + \frac{15}{2}\delta^2 \cos^2 \alpha,$$

quindi

$$-2(1 - \delta \cos \alpha)(1 - 2\delta \cos \alpha + \delta^2)^{-3/2} \cong -2(1 - \delta \cos \alpha) \left(1 + 3\delta \cos \alpha \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2}\delta^2 + \frac{15}{2}\delta^2 \cos^2 \alpha \right) \cong -2 - 6\delta \cos \alpha + 3\delta^2 - 15\delta^2 \cos^2 \alpha + 2\delta \cos \alpha + 6\delta^2 \cos^2 \alpha$$

$$= -2 - 4\delta \cos \alpha + 3\delta^2 - 9\delta^2 \cos^2 \alpha$$

$$a_{2d} \cong \frac{Gm_1}{r_{12}^2} \left(\cancel{1} + \cancel{1} + 4\delta \cos \alpha - 2\delta^2 + 12\delta^2 \cos^2 \alpha - \cancel{2} - 4\delta \cos \alpha + 3\delta^2 - 9\delta^2 \cos^2 \alpha \right)^{1/2}$$

$$= \frac{Gm_1}{r_{12}^2} \sqrt{\delta^2 + 3\delta^2 \cos^2 \alpha} = \frac{Gm_1}{r_{12}^2} \frac{r_2}{r_{12}} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}.$$

3) approssimazioni di a_1, a_2

$$a_1 = \frac{G(m_1+m)}{r_1^2} \cong \frac{Gm_1}{r_1^2} = \frac{Gm_1}{r_{12}^2} \frac{1}{1+\delta^2-2\delta\cos\alpha} \cong$$

$$\frac{Gm_1}{r_{12}^2} (1+2\delta\cos\alpha)$$

$$a_2 = \frac{G(m_2+m)}{r_2^2} \cong \frac{Gm_2}{r_2^2}$$

Siamo pronti per usare le approssimazioni trovate

$$\frac{Gm_2}{r_2^2} \frac{Gm_2}{r_2^2} = Gm_1 \frac{r_2}{r_{12}^3} \sqrt{1+3\cos^2\alpha} \frac{Gm_1}{r_{12}^2} \left(1 + 2\frac{r_2}{r_{12}} \cos\alpha\right)$$

che possiamo approssimare con

$$\left(\frac{Gm_2}{r_2^2}\right)^2 = (Gm_1)^2 \frac{r_2}{r_{12}^5} \sqrt{1+3\cos^2\alpha}$$

da cui

$$\left(\frac{r_2}{r_{12}}\right)^5 = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$$

$$r_2 = r_{12} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/5} (1+3\cos^2\alpha)^{-1/10}$$

Dato che

$$\max (1+3\cos^2\alpha)^{-1/10} = 1$$

e il valore minimo è $\cong 0,87$, si arriva a scrivere

$$r_2 = r_{12} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/5}$$

Questa formula, dovuta a Laplace, definisce il raggio della sfera di influenza del pianeta rispetto al Sole.

Ad esempio la sfera di influenza della Terra è di circa 924 600 km, che è circa 2,4 volte la distanza tra la Terra e la Luna.

La sfera di influenza della Luna rispetto alla Terra è circa 66 280 km.

Incontro iperbolico

Quando un satellite entra nella sfera di influenza di un pianeta, può sfruttarne l'azione gravitazionale per aumentare o diminuire la propria velocità assoluta rispetto al Sole. Tale effetto prende il nome di incontro iperbolico, o «fionda gravitazionale». Si basa sul fatto che l'azione gravitazionale del pianeta è in grado di mutare la direzione del vettore velocità relativa satellite - pianeta senza modificarne il modulo.

Le prime missioni a sfruttare questo fenomeno furono Pioneer 10 e Mariner 10.

Pioneer 10 era una missione diretta a Giove; grazie all'effetto fionda dovuto all'incontro con questo pianeta, avvenuto nel 1973, ha ottenuto la velocità necessaria per fuggire dal sistema solare. Mariner 10 era una missione diretta a Mercurio e ha effettuato un fly-by di Venere nel 1974.

Introduciamo

$\vec{v}$: velocità del satellite rispetto al Sole

$\vec{v}_p$: velocità del pianeta rispetto al Sole

$\vec{v}_n$: velocità del satellite rispetto al pianeta

$$\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_p$$

Indicando con l'apice (1) l'ingresso del satellite nella sfera di influenza del pianeta e con l'apice (2) l'uscita, si presentano i seguenti casi:

1) passaggio a «valle» del pianeta

figura 11.2

$$|\vec{v}^{(2)}| < |\vec{v}^{(1)}|$$

il satellite perde energia cinetica nel suo moto intorno al Sole.

2) passaggio a «monte» del pianeta

figura 11.3

$$|\vec{v}^{(2)}| > |\vec{v}^{(1)}|$$

il satellite acquista energia cinetica nel suo moto attorno al Sole.

Questo effetto potendo modificare sia il modulo che la direzione della velocità

elicaentrica può essere usato per indirizzare il satellite verso uno o più pianeti intermedi prima di raggiungere il corpo celeste desiderato.

Per un osservatore sul pianeta il satellite è visto avvicinarsi lungo un'orbita iperbolica, avente quindi $a < 0$, $e > 1$.

Sia β l'angolo tra le direzioni di $\vec{r}_p$ e della « velocità di scudo iperbolico » $\vec{v}_\infty$ all'ingresso nella sfera di influenza $\vec{r}_\infty^{(1)}$. La direzione di quest'ultima è quella dell'asintoto entrante dell'iperbole. Quindi β è l'angolo formato da ciascun asintoto dell'iperbole con la sua linea degli aspidi (si veda la figura 11.5).

Dall'equazione polare della conica, l'anomalia vera θ_{soi} del satellite quando entra nella sfera di influenza del pianeta, cioè quando la sua distanza dal pianeta è uguale a r_{soi} , soddisfa la relazione

$$\cos \theta_{soi}^{(1)} = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_{soi}} - 1 \right).$$

A questo punto si suppone che θ_{soi} sia ben approssimato dal valore dell'anomalia vera che si ha ad una distanza infinita, cioè

$$\cos \theta_\infty^{(1)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1 \right) = -\frac{1}{e}.$$

Ciò equivale ad assumere che all'ingresso nella sfera di influenza la direzione della velocità del satellite (relativa al pianeta) è parallela all'asintoto della traiettoria iperbolica di avvicinamento. Quindi poniamo

$$\theta_{soi}^{(1)} = \theta_\infty^{(1)} = -\arccos \left(-\frac{1}{e} \right).$$

Indicando con θ_∞ il valore assoluto di $\theta_\infty^{(1)}$, si vede dalla figura 11.5 che vale la relazione

$$\theta_\infty = \pi - \beta \quad \text{da cui} \quad \cos \theta_\infty = -\cos \beta \quad \text{e} \quad \cos \beta = \frac{1}{e}.$$

Come conseguenza dell'approssimazione fatta su $\theta_{soi}^{(1)}$ si ha che la velocità relativa all'ingresso nella sfera di influenza $\vec{v}_r^{(1)}$ coincide con la velocità di scudo iperbolico

$\vec{v}_{\infty}^{(1)}$. Il modulo di questa velocità è dato da

$$v_{\infty} = |\vec{v}_{\infty}^{(1)}| = \sqrt{\frac{\mu}{-a}},$$

che si ottiene dall'equazione dell'energia, facendo tendere r a $+\infty$:

$$v_{\infty} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} = \sqrt{-\frac{\mu}{a}}.$$

Dato che il moto del satellite all'interno della sfera di influenza del pianeta è un moto kepleriano, il modulo della velocità all'uscita dalla sfera di influenza è pari a $|\vec{v}_{\infty}^{(1)}|$, dunque

$$|\vec{v}_{\infty}^{(2)}| = |\vec{v}_{\infty}^{(1)}| = v_{\infty}.$$

Durante l'incontro iperbolico, il campo gravitazionale generato dal pianeta ruota il vettore velocità relativa di un angolo pari a δ , detto angolo di svolta.

Dalla figura 11.5 notiamo che

$$2\beta + \delta = \pi \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{\pi - \delta}{2}$$

da cui

$$\cos \beta = \sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{e}.$$

Notiamo che più l'eccentricità è grande più δ è piccolo.

Determinazione della variazione eliocentrica di velocità Δv

Poniamo ora l'osservatore nel Sole. Se si trascura l'intervallo di tempo necessario a completare l'incontro iperbolico (cioè il tempo che il satellite trascorre nella sfera di influenza deve essere piccolo rispetto al tempo totale di un trasferimento interplanetario), l'interazione satellite - pianeta può essere vista come una «manovra impulsiva» caratterizzata da una variazione di velocità.

Questa è data da

$$\Delta v = |\vec{v}^{(2)} - \vec{v}^{(1)}|,$$

e guardando al triangolo delle velocità in figura 11.6 si può scrivere

$$\Delta v = 2 v_{\infty} \sin \frac{\delta}{2}$$

e sostituendo l'espressione trovata per $\sin \frac{\delta}{2}$ si ha

$$\Delta v = \frac{2}{e} v_{\infty}.$$

Si vede che il valore massimo di Δv si ottiene per $e = 1$ (che è il minimo valore dell'eccentricità per un'orbita aperta). In questo caso i vettori $\vec{r}_p$, $\vec{v}_{\infty}^{(1)}$, $\vec{v}_{\infty}^{(2)}$ sono paralleli:

$$e = 1 \rightarrow \beta = 0 \rightarrow \delta = \pi \rightarrow \Delta v = 2 v_{\infty}.$$

Tuttavia questo valore non è raggiungibile in pratica perché al diminuire di e diminuisce anche il raggio di pericentro. In particolare, fissato $a (< 0)$ si ha che per $e = 1$, il raggio di pericentro è uguale a 0. Imponiamo che tale raggio sia maggiore del raggio del pianeta:

$$r_p = a(1 - e) > r_P, \quad \text{raggio del pianeta}$$

per cui deve essere

$$\frac{\mu}{v_{\infty}^2} (e - 1) > r_P \rightarrow e > 1 + r_P \frac{v_{\infty}^2}{\mu}.$$

Il valore minimo dell'eccentricità si ha imponendo $r_p = r_P$, risulta

$$e_{\min} = 1 + r_P \frac{v_{\infty}^2}{\mu},$$

e da questa espressione possiamo ricavare il massimo Δv ottenibile dall'incontro ravvicinato

$$\Delta v_{\max} = \frac{2 v_{\infty}}{1 + r_P \frac{v_{\infty}^2}{\mu}}.$$

Notiamo che per $r_P \rightarrow 0$ si ha $\Delta v_{\max} = 2 v_{\infty}$.

Fissata la velocità di arrivo iperbolico v_{∞} e l'angolo β di ingresso del satellite nella sfera di influenza, la forma della traiettoria iperbolica è definita dalle relazioni

$$a = -\frac{\mu}{v_{\infty}^2}, \quad e = \frac{1}{\cos \beta}$$

e la variazione della velocità eliocentrica all'uscita è data da

$$\Delta v = 2 v_{\infty} \cos \beta.$$

Determiniamo infine il valore di v_{∞} che massimizza $\Delta v_{\max}$. A tal fine poniamo

$$\frac{d \Delta v_{\max}}{d v_{\infty}} = 0 = \left(1 + r_P \frac{v_{\infty}^2}{\mu} \right)^{-2} \left[2 \left(1 + r_P \frac{v_{\infty}^2}{\mu} \right) - 2 v_{\infty} \left(2 v_{\infty} \frac{r_P}{\mu} \right) \right]$$

$$\rightarrow 2 - 2 r_P \frac{v_{\infty}^2}{\mu} = 0 \quad v_{\infty} = \sqrt{\frac{\mu}{r_P}} \rightarrow \Delta v_{\max} = \sqrt{\frac{\mu}{r_P}}$$

(notiamo che $\Delta v_{\max}(0) = 0$ e $\lim_{v_{\infty} \rightarrow +\infty} \Delta v_{\max}(v_{\infty}) = 0$).

La massima variazione di velocità ottenibile da un incontro iperbolico è pari alla velocità circolare lungo un'orbita che ha raggio pari al raggio del pianeta.

Missione interplanetaria Terra - Marte

Ci proponiamo di usare il metodo delle coniche ricordate per calcolare il Δv necessario a compiere una missione interplanetaria usando manovre impulsive.

Assumiamo che le orbite della Terra e del pianeta obiettivo (ad esempio Marte) siano circolari e complanari, di raggi r_E ed r_M .

La missione consiste nel trasferire il satellite da un'orbita circolare di parcheggio attorno alla Terra di raggio r_i ad un'orbita circolare di lavoro attorno a Marte di raggio r_f . La missione può essere suddivisa in tre parti:

- 1) fase planetocentrica di fuga dalla Terra;
- 2) fase eliocentrica di trasferimento;
- 3) fase planetocentrica di cattura.

Assumiamo che nella fase eliocentrica venga impiegata una manovra di Hohmann

* Fase eliocentrica

Si parte dalla seconda fase perché questa definisce i vettori velocità del satellite

rispetto al Sole all'uscita dalla sfera di influenza della Terra e all'ingresso nella sfera di influenza di Marte. Chiamiamo queste due velocità $\vec{v}_p$ e $\vec{v}_a$ rispettivamente, perché coincidono con le velocità del satellite al perielio e all'afelio dell'orbita di trasferimento.

Rischi il rapporto tra la distanza pianeta - Sole ed il raggio della sfera di influenza del pianeta è molto grande (circa 160 nel caso di Terra - Sole e 400 nel caso di Marte - Sole), in questa fase tali sfere sono considerate dei punti coincidenti con il centro del pianeta corrispondente.

Il trasferimento eliocentrico avviene su un'orbita ellittica il cui raggio di perielio è r_E e quello di afelio è r_M (si veda la figura 11.7).

La manovra di Hohmann potrà iniziare quando la separazione angolare tra le posizioni della Terra e di Marte soddisfa la condizione descritta quando abbiamo parlato di rifasamento per il rendez-vous, cioè

$$\theta = \pi \left[1 - \left(\frac{1 + r_E/r_M}{2} \right)^{3/2} \right].$$

Dal semiasse maggiore dell'orbita di trasferimento $a = \frac{r_E + r_M}{2}$ conosciamo l'energia e dalla definizione di quest'ultima otteniamo $|\vec{v}_p|$ e $|\vec{v}_a|$:

$$\frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu}{r_E} = - \frac{\mu}{r_E + r_M} \quad v_p = |\vec{v}_p|$$

$$\frac{v_a^2}{2} - \frac{\mu}{r_M} = - \frac{\mu}{r_E + r_M} \quad v_a = |\vec{v}_a|$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r_E + r_M} \left(\frac{r_M}{r_E} \right)}, \quad v_a = \sqrt{\frac{2\mu}{r_E + r_M} \left(\frac{r_E}{r_M} \right)}.$$

* Fase di fuga (figura 11.8)

Il satellite, parcheggiato su un'orbita circolare di raggio r_i , deve aumentare la sua velocità in modo da immettersi in un'orbita iperbolica che gli consente di raggiungere il bordo della sfera di influenza terrestre e di fuggire dal suo campo gravitazionale.

Ul bordo della sfera di influenza poniamo che la velocità eliocentrica del satellite

sia $\vec{v}_p$. Il suo modulo l'abbiamo calcolato nella fase eliocentrica e la sua direzione è parallela alla direzione della velocità della Terra e quindi è perpendicolare alla congiungente Terra - Sole. Ne segue che anche la direzione della velocità relativa del satellite rispetto alla Terra è parallela alla velocità della Terra. Abbiamo già visto che è possibile approssimare questa velocità relativa con la velocità di eccesso iperbolico all'uscita dalla sfera di influenza, qui indicata con $\vec{v}_{\infty,E}^{(2)}$. Si ha

$$v_p = v_{\infty,E}^{(2)} + v_E$$

dove $v_{\infty,E}^{(2)} = |\vec{v}_{\infty,E}^{(2)}|$, $v_E = |\vec{v}_E|$ modulo della velocità della Terra, $v_E = \sqrt{\frac{\mu}{r_E}}$.

Otteniamo

$$v_{\infty,E}^{(2)} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_E + r_M} \left(\frac{r_M}{r_E} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_E}}.$$

Notiamo che dato che stiamo trattando un trasferimento ad un pianeta esterno, l'iperbole passa «a monte» della Terra in modo che il satellite acquisti energia cinetica. Nel caso in cui il trasferimento sia ad un pianeta interno il satellite deve perdere energia cinetica e quindi l'iperbole è «a valle» della Terra.

Applicando una opportuna variazione di velocità $\Delta \vec{v}_i$ il satellite è immesso in un'orbita iperbolica di fuga, la cui velocità di eccesso iperbolico è data da $v_{\infty,E}^{(2)}$. Per minimizzare il costo della manovra i vettori $\Delta \vec{v}_i$ e $\vec{v}_{c,E}$, intendendo con quest'ultimo il vettore velocità lungo l'orbita circolare, devono essere concordi.

Avremo

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{c,E} + \Delta \vec{v}_i$$

$$v_i = v_{c,E} + \Delta v_i \quad \text{con } v_i = |\vec{v}_i|, \quad v_{c,E} = |\vec{v}_{c,E}| = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_i}}$$

Poiché la direzione di $\vec{v}_i$ è ortogonale alla congiungente Terra-satellite, ad inizio manovra il satellite si trova al perigeo dell'iperbole di fuga. Per calcolare Δv_i usiamo l'equazione dell'energia

$$\frac{v_i^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r_i} = \frac{(v_{\infty,E}^{(2)})^2}{2}$$

da cui

34)

$$\Delta v_i = \sqrt{(v_{\infty,E}^{(2)})^2 + 2 \frac{\mu}{r_i}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_i}}$$

con $v_{\infty,E}^{(2)}$ trovata prima.

Il semiasse maggiore dell'iperbole è fissato da $v_{\infty,E}^{(2)}$, infatti $a_i = -\frac{\mu}{(v_{\infty,E}^{(2)})^2}$, mentre per determinare la sua eccentricità sfruttiamo la condizione sul raggio di perigeo

$$a_i (1 - e_i) = r_i \rightarrow e_i = 1 - \frac{r_i}{a_i} \rightarrow e_i = 1 + r_i \frac{(v_{\infty,E}^{(2)})^2}{\mu}$$

Dal valore di e_i possiamo trovare l'angolo β_i tra l'asintoto uscente dell'iperbole e la linea degli apsidi: $\beta_i = \arccos \frac{1}{e_i}$.

Quest'angolo permette di conoscere la posizione del satellite all'inizio della manovra che viene identificata dall'angolo

$$\theta_i = \pi + \beta_i$$

rispetto alla direzione della velocità della Terra.

Fase di cattura (figura 11.9)

Dopo essere uscito dalla sfera di influenza della Terra, il satellite si inserisce nella traiettoria eliocentrica di trasferimento verso il pianeta obiettivo. La terza fase, detta di cattura, inizia quando il satellite entra nella sfera di influenza di Marte.

All'ingresso le direzioni di $\vec{v}_a$ (velocità eliocentrica del satellite all'afelio dell'el = line di trasferimento) e di $\vec{v}_M$ (velocità di Marte) sono parallele; inoltre notando che

$$v_a = \sqrt{\frac{2\mu}{r_E + r_M} \left(\frac{r_E}{r_M} \right)} < v_M = |\vec{v}_M| = \sqrt{\frac{\mu}{r_M}},$$

possiamo scrivere

$$v_{\infty,M}^{(1)} = |\vec{v}_{\infty,M}^{(1)}| = v_M - v_a = \sqrt{\frac{\mu}{r_M}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_E + r_M} \left(\frac{r_E}{r_M} \right)}.$$

Il satellite entra nella sfera di influenza a valle rispetto al pianeta.

È più conveniente anche in questo caso eseguire la manovra al pericentro dell'orbita iperbolica, e la distanza di questo punto dal centro di Marte è data da r_p ,

cioè il raggio dell'orbita circolare di lavoro.

Il satellite dovrà essere rallentato con un $\Delta \vec{v}_f$ diretto alla velocità $\vec{v}_f$ al pericentro dell'iperbole. Chiamando $\vec{v}_{c,M}$ il vettore velocità lungo l'orbita circolare di lavoro, avremo

$$\vec{v}_{c,M} = \vec{v}_f + \Delta \vec{v}_f$$

$$v_{c,M} = v_f - \Delta v_f, \text{ con } v_{c,M} = |\vec{v}_{c,M}| = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}}, \quad v_f = |\vec{v}_f|$$

$$\text{e } \Delta v_f = |\Delta \vec{v}_f|.$$

Per ottenere v_f ricorriamo all'equazione dell'energia

$$\frac{v_f^2}{2} - \frac{\mu}{r_f} = \frac{(v_{\infty,M}^{(1)})^2}{2},$$

da cui

$$v_f = \sqrt{(v_{\infty,M}^{(1)})^2 + 2 \frac{\mu}{r_f}} \quad (> v_{c,M})$$

con $v_{\infty,M}^{(1)}$ trovata prima. Segue che

$$\Delta v_f = \sqrt{(v_{\infty,M}^{(1)})^2 + 2 \frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_f}}.$$

L'eccentricità dell'iperbole è data dalla formula

$$e_f = 1 + r_f \frac{(v_{\infty,M}^{(1)})^2}{\mu}$$

e il semiasse maggiore da $a_f = -\frac{\mu}{(v_{\infty,M}^{(1)})^2}$. Infine la direzione della linea degli

apsidi è ottenuta grazie a $\beta_f = \arccos \frac{1}{e_f}$, che permette di conoscere la posizione

del punto di inversione nell'orbita circolare. Infatti possiamo calcolare

$$\theta_f = \pi + \beta_f$$

misurato in senso antiorario a partire da $\vec{r}_M$.

Concludiamo accennando al caso in cui la fase eliocentrica venga realizzata da una manovra di Lambert.

È possibile studiare un trasferimento interplanetario che avvenga in un tempo

profinito Δt . Si tratta di risolvere per la fase eliocentrica un problema di Lambert in cui si conoscono le posizioni del satellite all'uscita dalla sfera di influenza della Terra e all'ingresso nella sfera di influenza del pianeta obiettivo.

Risolvendo il problema di Lambert troviamo il semiasse dell'orbita eliocentrica di trasferimento e l'angolo di volo γ_c (si veda la figura 11.10) all'ingresso nella sfera di influenza del pianeta. Infatti, poiché conosciamo la velocità eliocentrica $\vec{v}_2$ del satellite quando incontra il pianeta, troviamo l'angolo tra la direzione di questo vettore e la retta associata alla direzione trasversale.

Dalla figura si vede subito che

$$v_{\infty}^{(1)} = \sqrt{v_2^2 + v^2 - 2v_2v \cos \gamma_c}$$

con $v_2 = |\vec{v}_2|$ e $v = |\vec{v}|$ essendo $\vec{v}$ la velocità del pianeta. Per quanto riguarda le caratteristiche dell'ipercbola di cattura, valgono le relazioni già viste per e_f , a_f , β_f .

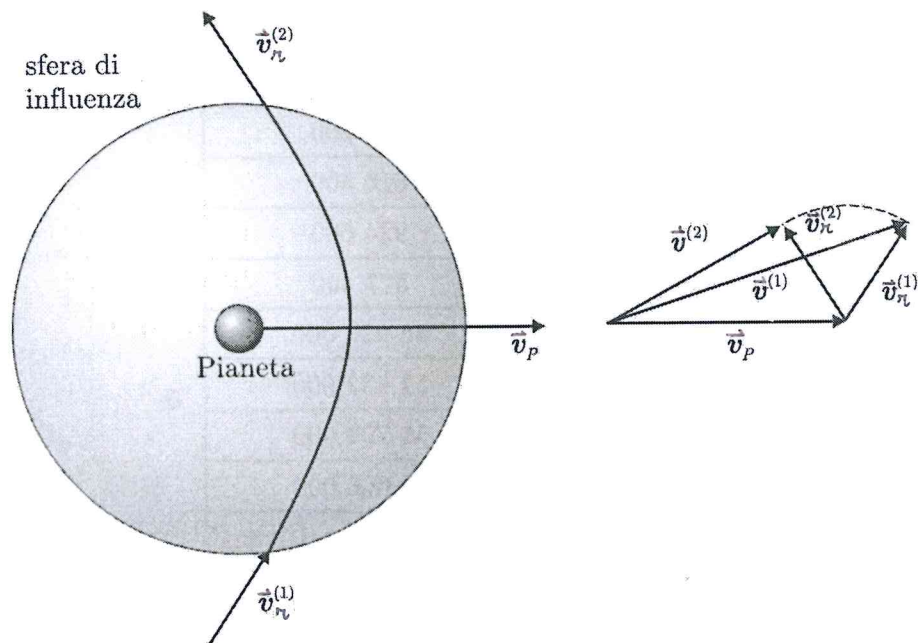


Figura 11.2: Caso in cui $v^{(2)} < v^{(1)}$: passaggio a "valle".

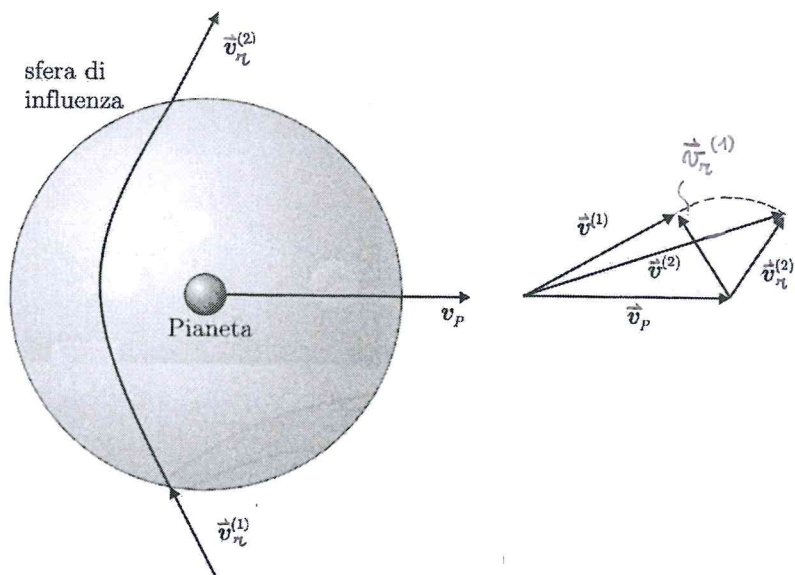


Figura 11.3: Caso in cui $v^{(2)} > v^{(1)}$: passaggio a "monte".

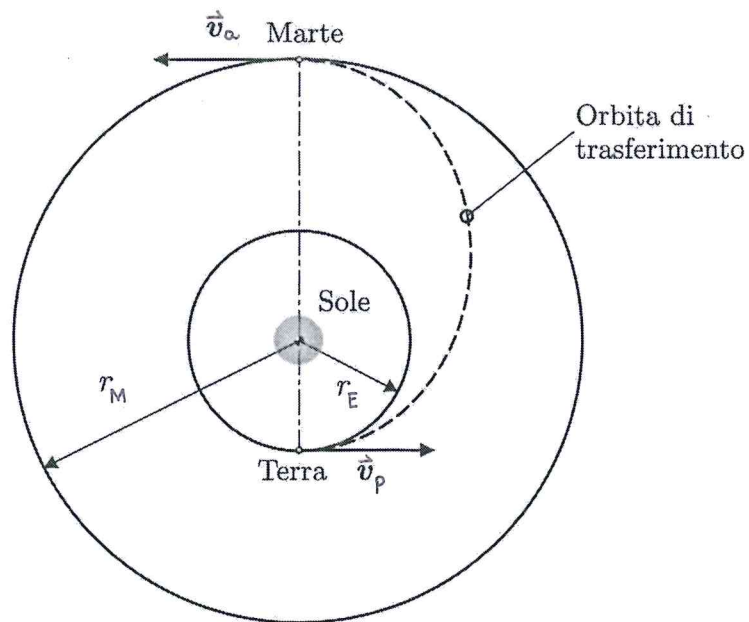


Figura 11.7: Geometria della fase eliocentrica.

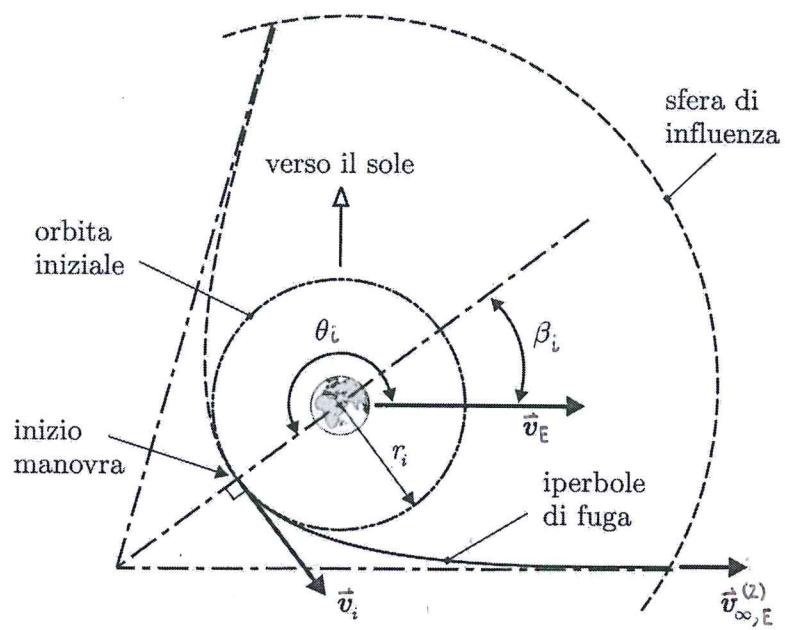


Figura 11.8: Geometria della fuga dalla terra.

