

REGOLARIZZAZIONE di LEVI - CIVITA

(tratto da « Linear and Regular Celestial Mechanics », E. L. Stiefel & G. Scheifele)

Ox_1x_2 piano fisico

Ou_1u_2 piano trasformato

Tullio Levi-Civita (« Sur la résolution qualitative du problème des trois corps », 1906) generalizzò la regolarizzazione $\xi = u^2$, $t' = 4u^2$ al caso piano

Introduciamo

$$x = (x_1, x_2)$$

$$u = (u_1, u_2)$$

e consideriamo la seguente trasformazione

$$\mathbb{R}^2 \ni (u_1, u_2) \longrightarrow (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

data da

$$x_1 + ix_2 = (u_1 + iu_2)^2$$

$$\begin{cases} x_1 = u_1^2 - u_2^2 \\ x_2 = 2u_1u_2 \end{cases}$$

Notiamo che le distanze vengono elevate al quadrato

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (u_1^4 + u_2^4 - 2u_1^2u_2^2) + 4u_1^2u_2^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2)^2 \end{aligned}$$

$$|x| = |u|^2$$

Gli angoli tra due direzioni passanti per O vengono raddoppiati

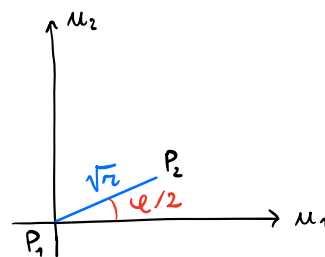
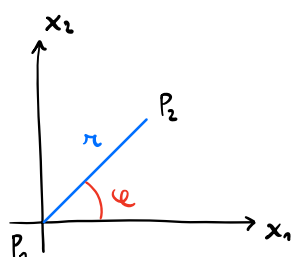
$$\tan \varphi = \frac{x_2}{x_1} = \frac{2u_1u_2}{u_1^2 - u_2^2} = \frac{\cancel{u_1^2} (2u_2/u_1)}{\cancel{u_1^2} (1 - u_2^2/u_1^2)}$$

$$\tan \alpha = \frac{u_2}{u_1}$$

$$\tan \varphi = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\rightarrow \alpha = \varphi/2, \quad \varphi = 2\alpha$$

Perciò ad una rivoluzione di P_2 attorno a P_1 sul piano fisico corrisponde una mezza rivoluzione di P_2 attorno a P_1 sul piano trasformato



La trasformazione introdotta si può scrivere anche come

$$x = L(u) u$$

con $L(u)$ matrice di Levi-Civita definita da

$$L(u) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice gode di alcune proprietà

$$\begin{aligned} 1) \quad L^{-1}(u) &= \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|u|^2} L^T(u) \end{aligned}$$

la matrice $\tilde{L} = \frac{L}{|u|}$ è ortogonale ($\tilde{L}^{-1} = \tilde{L}^T$)

- 2) gli elementi di L sono funzioni omogenee lineari nelle variabili u_1, u_2

$$L(u) = L(u')$$

Dati due vettori u e v si ha:

$$3) \quad L(u)v = L(v)u$$

$$4) \quad |u|^2 L(v)v + |v|^2 L(u)u - 2(u \cdot v) L(u)v = 0$$

infatti: $x = L^{-1}(u) = \frac{1}{|u|^2} L^T(u)$

$$|u|^2 \frac{1}{|u|^2} L^T(u) L(v)v + |v|^2 u - 2(u \cdot v)v = 0$$

$$[L^T(u) L(v) - 2(u \cdot v) I] v = -|v|^2 u$$

↗ matrice identità

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} u_1 v_1 + u_2 v_2 & 0 \\ 0 & u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -u_1 v_1 - u_2 v_2 & -u_1 v_2 + u_2 v_1 \\ -u_2 v_1 + u_1 v_2 & -u_1 v_1 - u_2 v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -u_1 v_1 - u_2 v_2 & -u_1 v_2 + u_2 v_1 \\ -u_2 v_1 + u_1 v_2 & -u_1 v_1 - u_2 v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 |v|^2 \\ -u_2 |v|^2 \end{pmatrix}$$

$$= -|v|^2 u \quad \checkmark$$

Deriviamo

$x = L(u)u$ rispetto a u , dove

$$\frac{dt}{d\tau} = |\mu|^2 = r$$

$$\dot{x} = \underbrace{L'(\mu)}_{\parallel} \mu + L(\mu) \mu'$$

$$L(\mu') \mu = L(\mu) \mu'$$

$$\underline{\dot{x} = 2L(\mu) \mu'}$$

Mostriamo che $|\mu'| < +\infty$ e collisione

$$\begin{array}{c} \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \\ \uparrow \\ \text{velocità} \end{array} \quad \dot{x} = \dot{x}' \frac{1}{|\mu|^2} \rightarrow \dot{x}' = |\mu|^2 \dot{x}$$

$$2L(\mu) \mu' = |\mu|^2 \dot{x}$$

$$\mu' = \frac{|\mu|^2}{2} L^{-1}(\mu) \dot{x} = \frac{\cancel{|\mu|^2}}{2} \frac{1}{\cancel{|\mu|^2}} L^T(\mu) \dot{x}$$

$$\mu' = \frac{1}{2} L^T(\mu) \dot{x}$$

$$|\mu'|^2 = \frac{1}{4} (L^T(\mu) \dot{x}) \cdot (L^T(\mu) \dot{x}) = \frac{1}{4} \dot{x}^T \overbrace{L(\mu) L^T(\mu)}^{|\mu|^2 I_2} \dot{x}$$

$$a \cdot b = a^T b \quad \quad \quad \underbrace{L(\mu) L^T(\mu)}_{\parallel} \quad \quad \quad |\mu|^2 L^{-1}(\mu)$$

$$|\mu'|^2 = \frac{1}{4} |\mu|^2 \dot{x}^T \dot{x} = \frac{1}{4} |\mu|^2 |\dot{x}|^2$$

energia

$$\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 - \frac{1}{|x|} = -\frac{C}{2} \rightarrow \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 = \frac{1}{|x|} - \frac{C}{2}$$

$$\underline{|\dot{u}|^2} = \frac{1}{2} |u|^2 \left(\frac{1}{|u|^2} - \frac{c}{2} \right) = \underline{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|u|^2}{2} c \right)}$$

per $|u| \rightarrow 0$ si ha che $|\dot{u}| \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vediamo come si trasforma l'equazione del moto

$$\ddot{x} = - \frac{1}{|x|^3} x$$

$$\dot{x} = \frac{x'}{r} \quad \ddot{x} = - \frac{1}{r^2} x' r' \frac{1}{r} + \frac{x''}{r^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{r^2} \left(x'' - \frac{x' r'}{r} \right)$$

$$\frac{1}{r^2} \left(x'' - \frac{x' r'}{r} \right) = - \frac{x}{r^3}$$

$$\underline{r x'' - x' r' = -x}$$

ora introduciamo i parametri u_1 e u_2

$$x' = 2L(u) u'$$

$$\begin{aligned} x'' &= 2L'(u) u' + 2L(u) u'' \\ &= 2L(u) u'' + 2L'(u) u' \end{aligned}$$

$$r' = (u \cdot u)' = 2u \cdot u'$$

$$2|u|^2 (L(u) u'' + L'(u) u') - 4(u \cdot u') L(u) u' + L(u) u = 0$$

$$|u|^2 L(u) u'' + |u'|^2 L(u) u - 2(u \cdot u') L(u) u' = 0$$

$$2 \left[|u|^2 L(u) u'' + 2 \cancel{(u \cdot u')} L(u) u' - |u'|^2 L(u) u \right] - 4 \cancel{(u \cdot u')} L(u) u' + L(u) u = 0$$

$$2|u|^2 Lu'' - 2|u'|^2 Lu + Lu = 0$$

$$2|u|^2 u'' - 2|u'|^2 u + u = 0$$

$$u'' + \frac{1}{|u|^2} \left(\frac{1}{2} - \underbrace{|u'|^2} \right) u = 0$$

$$\downarrow$$

$$|u'|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|u|^2}{2} c \right)$$

$$u'' + \frac{c}{4} u = 0$$