

Note di Daniele Serra

4.3 Moti della Terra come corpo rigido

In questo paragrafo descriveremo due importanti moti di precessione che interessano la Terra: il primo è il moto di precessione libera, che non tiene conto dell'interazione gravitazionale con altri corpi celesti; il secondo è il moto di precessione luni-solare che, al contrario del primo, è causato dalla presenza del Sole e della Luna. Avremo prima bisogno di scrivere le equazioni di Eulero per un corpo rigido con un punto fisso.

4.3.1 Equazioni di Eulero

In questo paragrafo daremo per buone le nozioni di corpo rigido e di sistema di riferimento solidale al corpo rigido.

Siano Σ, Σ' due sistemi di riferimento, sia $\vec{\omega}$ la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ . Vale la seguente relazione:

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{u} \quad \text{per ogni } \vec{u} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.13)$$

Supponiamo adesso di avere un corpo rigido $\mathcal{C}$ e che Σ sia un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro di massa di $\mathcal{C}$, mentre Σ' sia solidale a $\mathcal{C}$.

PROPOSIZIONE 4.4 - Esiste una matrice $\mathcal{I}$ tale che il momento angolare $\vec{L}$ del corpo rigido soddisfa la seguente relazione:

$$\vec{L} = \mathcal{I}\vec{\omega}, \quad (\vec{M}_O = \mathcal{I}_O \vec{\omega}) \quad (4.14)$$

dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del corpo rigido.

Dimostrazione. Supponiamo che il corpo rigido sia formato da N punti materiali $P_1, \dots, P_N$ di masse $m_1, \dots, m_N$, posizioni $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ e velocità $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$. Il momento angolare totale risulta

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \vec{r}_i).\end{aligned}$$

In componenti, abbiamo:

$$\begin{aligned}L_x &= \omega_x \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\ L_y &= -\omega_x \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i + \omega_y \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\ L_z &= -\omega_x \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i + \omega_z \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - z_i^2).\end{aligned}$$

È evidente che le precedenti sono relazioni lineari in $\vec{\omega}$, per cui è possibile definire una matrice $\mathcal{I}$ tale che

$$\vec{L} = \mathcal{I} \vec{\omega}.$$

□

OSSERVAZIONI 4.5 - ◦ La precedente proposizione vale anche nel caso di un corpo rigido continuo: basta sostituire le somme con integrali.

- La matrice $\mathcal{I}$ è detta *tensor di inerzia* del corpo rigido ed è evidentemente simmetrica. Si può dimostrare che è anche definita positiva nel caso in cui esistano almeno tre punti del corpo rigido non allineati. Ciò ci garantisce che esiste un sistema di riferimento ortonormale in cui la matrice $\mathcal{I}$ è diagonale: un tale sistema di riferimento viene detto *referimento principale d'inerzia*; i corrispondenti autovalori sono i *momenti principali d'inerzia*.

Siamo pronti a scrivere le equazioni di Eulero per un corpo rigido con un punto fisso. Indichiamo con $\vec{N}^e$ il momento delle forze esterne che agiscono su $\mathcal{C}$.

PROPOSIZIONE 4.6 (EQUAZIONI DI EULERO) - *Sia Σ' un sistema di riferimento principale d'inerzia per il corpo rigido $\mathcal{C}$ solidale ad esso e supponiamo che in tale riferimento i vettori $\vec{\omega}$, $\vec{N}^e$ abbiano rispettivamente componenti $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ e N_x^e, N_y^e, N_z^e ; siano I_1, I_2, I_3 i momenti principali d'inerzia in Σ' . Valgono le seguenti equazioni:*

$$\begin{aligned}N_x^e &= I_1 \dot{\omega}_x - (I_2 - I_3) \omega_y \omega_z \\ N_y^e &= I_2 \dot{\omega}_y - (I_3 - I_1) \omega_x \omega_z \\ N_z^e &= I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2) \omega_x \omega_y.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Dimostrazione. Sia Σ un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro di massa del corpo rigido. In Σ vale l'equazione cardinale

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma} = \vec{N}^e.$$

Inoltre, dalla (4.14),

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \mathcal{I} \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'}.$$

Scriviamo la (4.13) con $\vec{u} = \vec{L}$:

$$\begin{aligned} \vec{N}^e = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma} &= \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{L} \\ &= \mathcal{I} \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{L} \\ &= \mathcal{I} \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \mathcal{I} \vec{\omega}. \end{aligned}$$

La precedente, scritta in componenti, dà esattamente le (4.15). $\square$

4.3.2 Precessione libera della Terra rigida

Per la descrizione del moto di precessione libera supporremo che la Terra sia un corpo rigido della forma di uno sferoide oblatto non soggetto a forze esterne.

Osserviamo che un qualsiasi sistema di riferimento solidale alla Terra $\Sigma' = \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ con origine nel centro di massa e in cui $\hat{e}_x, \hat{e}_y$ sono nel piano equatoriale, è un sistema di riferimento principale d'inerzia. Se I_1, I_2, I_3 sono i momenti principali d'inerzia rispetto agli assi x, y, z , allora abbiamo che $I_1 = I_2 < I_3$. Supponiamo che la Terra ruoti con velocità angolare $\vec{\omega}_{\oplus}$ non parallela all'asse z e siano $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ le componenti di $\vec{\omega}_{\oplus}$ rispetto al riferimento Σ' .

PROPOSIZIONE 4.7 - Il vettore velocità angolare $\vec{\omega}_{\oplus}$ descrive, nel riferimento Σ' , un cono attorno all'asse z .

Dimostrazione. Scriviamo le equazioni di Eulero per la Terra in questo caso. Poiché la Terra non è soggetta a forze esterne, allora $\vec{N}^e = \vec{0}$:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x = \omega_y \omega_z (I_1 - I_3) \\ I_1 \dot{\omega}_y = \omega_x \omega_z (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_z = 0. \end{cases}$$

La terza equazione ci dice che ω_z è costante, per cui possiamo porre $\Omega := \omega_z (I_1 - I_3) / I_1$, ottenendo

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \Omega \omega_y \\ \dot{\omega}_y = -\Omega \omega_x. \end{cases}$$

Le precedenti possono essere disaccoppiate ottenendo le equazioni di due oscillatori armonici di soluzione

$$\begin{aligned} \omega_{x,0} &= 0 \\ \omega_{y,0} &= A \end{aligned} \quad \begin{cases} \omega_x = A \sin(\Omega t) \\ \omega_y = A \cos(\Omega t) \\ \omega_z = B \end{cases} \quad (\Omega < 0)$$

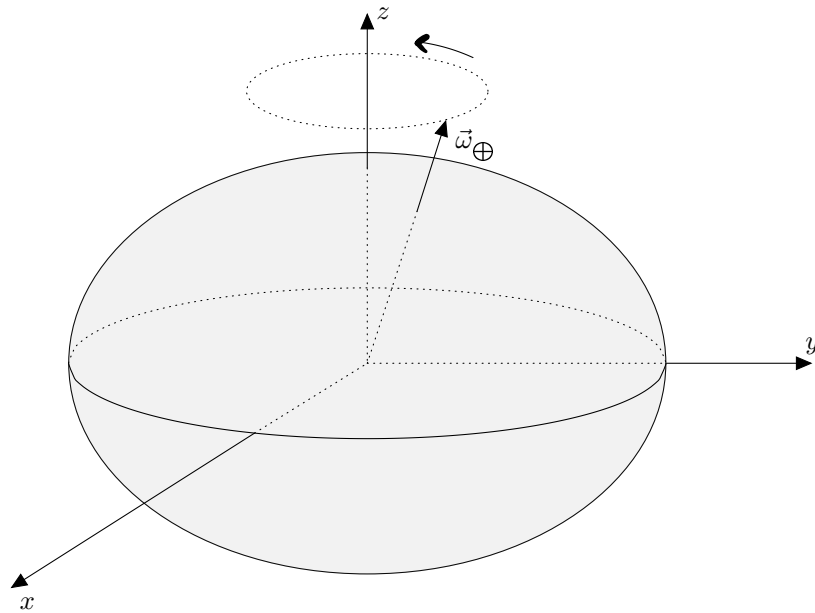


Figura 4.4: Precessione libera della Terra rigida.

con A, B costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Si conclude osservando che le precedenti sono equazioni parametriche per un cono di asse coincidente con z . $\square$

OSSERVAZIONI 4.8 - $\circ$ La quantità Ω è chiamata *velocità angolare di precessione* ed è la frequenza con cui gira $\vec{\omega}_{\oplus}$. ~~Osserviamo che $\Omega < 0$, per cui il moto di precessione avviene in verso opposto alla rotazione della Terra.~~

- $\circ$ Per la Terra abbiamo che $(I_1 - I_3)/I_1 \simeq 3.3 \cdot 10^{-3}$, da cui ricaviamo che il periodo di precessione libera è di circa 300 giorni. In realtà si osserva che il periodo effettivo è di circa 427 giorni; la differenza è dovuta all'elasticità della Terra.
- $\circ$ Il fenomeno che si osserva in un riferimento inerziale è il cosiddetto “Chandler wobble”, dal nome dello scienziato che per primo ne misurò il periodo. Un problema aperto è quello di determinare la ragione per cui non si verifica uno smorzamento della precessione libera.