

CAPITOLO 4

LA TERRA COME CORPO RIGIDO

Finora abbiamo studiato fenomeni astronomici in cui non interveniva la particolare forma dei corpi celesti. Anzi, abbiamo sempre supposto che questi fossero puntiformi o, se estesi, a simmetria sferica. Quando parliamo dei fenomeni che interessano la Terra, però, non possiamo più trascurare il fatto che questa è ben lontana dall'essere perfettamente sferica: le correzioni apportate al potenziale gravitazionale terrestre che tengono conto di ciò sono anche dell'ordine del millesimo, quindi non ignorabili.

In questo capitolo studieremo la forma effettiva della Terra, analizzando le cause della sua non sfericità, e vedremo a quali fenomeni dà origine.

4.1 Il potenziale di uno sferoide oblato

Come giustificheremo nel seguito, la Terra è approssimabile ad uno *sferoide oblato*: il solido ottenuto ruotando un'ellisse di semiassi a, b con $a > b$, attorno al suo semiasse minore. A tal proposito, sarà fondamentale avere a disposizione la forma del potenziale gravitazionale generato da un tale oggetto. Quello che faremo in questa sezione è procurarci uno sviluppo in serie di tale potenziale troncato ad un opportuno termine.

Si consideri, dunque, in \mathbb{R}^3 uno sferoide oblato di semiassi a e b e massa M , con il centro di massa posto nell'origine di un sistema di riferimento di assi xyz . Sia $P := (x, y, z)$ il generico punto in cui vogliamo calcolare il potenziale e \vec{r} il suo vettore posizione; sia $\vec{\rho}$ il vettore posizione del generico punto dello sferoide (figura 4.1). Supporremo $\rho/r \ll 1$, e trascureremo termini di ordine superiore a ρ^2/r^2 .

Il potenziale dello sferoide nel punto P ha la forma

$$U(x, y, z) = +G \int \frac{dm}{|\vec{r} - \vec{\rho}|}. \quad (4.1)$$

Per sviluppare come abbiamo fatto nel paragrafo 3.1.1, usiamo la seguente:

$$|\vec{r} - \vec{\rho}| = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta)^{\frac{1}{2}},$$

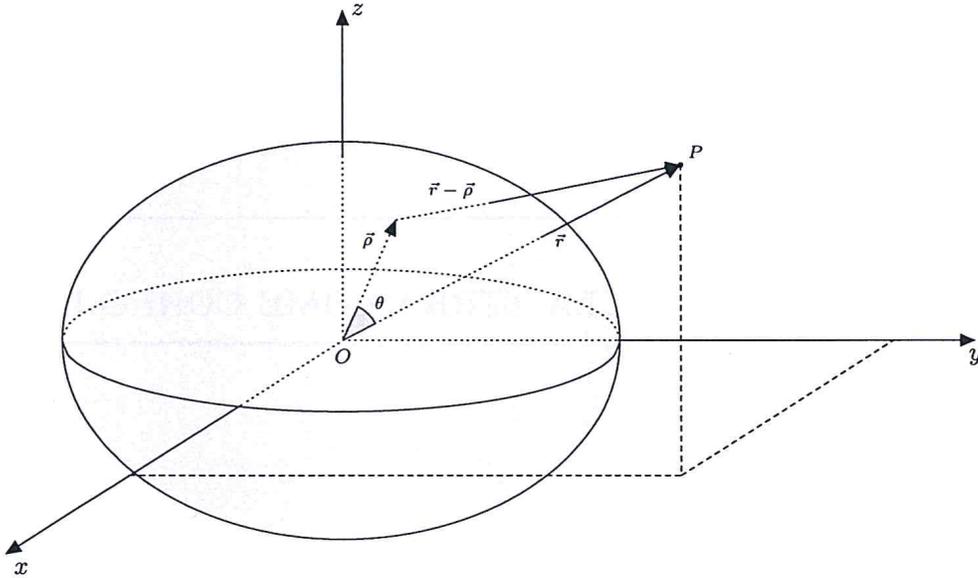


Figura 4.1: Uno sferoide oblato.

dove θ è l'angolo compreso tra i vettori \vec{r} e $\vec{\rho}$. Sostituendo nella (4.1) e mettendo in evidenza un fattore r , otteniamo:

$$U(x, y, z) = +G \int \frac{dm}{r \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos \theta\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

A questo punto utilizziamo il seguente sviluppo:

$$(1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 + o(\epsilon^2),$$

con $\epsilon := \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos \theta$; otteniamo che

$$\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos \theta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\rho}{r} \cos \theta + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \frac{\rho^2}{r^2} + o\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

Sostituendo nell'espressione del potenziale, otteniamo:

$$U(x, y, z) = + \underbrace{\frac{G}{r} \int dm}_{=:U_0} + \underbrace{\frac{G}{r} \int \frac{\rho}{r} \cos \theta dm}_{=:U_1} + \underbrace{\frac{G}{r} \int \frac{\rho^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} dm}_{=:U_2} + o\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

Analizziamo i singoli addendi.

- Il primo termine, U_0 , è il termine di *monopolo* e vale, naturalmente,

$$U_0 = \frac{GM}{r}.$$

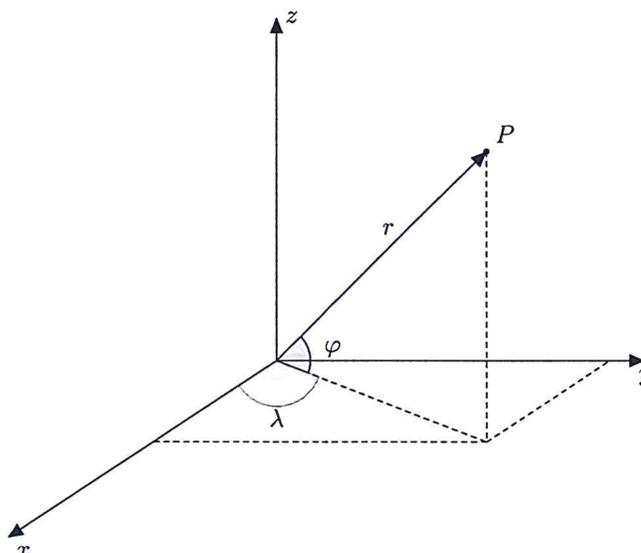


Figura 4.2: Coordinate polari.

- L'addendo U_1 è il termine di *dipolo* e ci aspettiamo che sia nullo. Dimostriamolo: se $\vec{\rho} := (\xi, \eta, \zeta)$, allora

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{G}{r} \int \frac{\rho}{r} \cos \theta \, dm = \frac{G}{r^3} \int \vec{\rho} \cdot \vec{r} \, dm \\ &= \frac{G}{r^3} \left(x \int \xi \, dm + y \int \eta \, dm + z \int \zeta \, dm \right) = 0, \end{aligned}$$

perché $(x \int \xi \, dm, y \int \eta \, dm, z \int \zeta \, dm)$ sono le coordinate del centro di massa dello sferoide, che noi abbiamo posto nell'origine.

- L'ultimo termine è detto di *quadrupolo* e vorremmo riscriverlo in modo da comprendere con esattezza da quali grandezze dipende. Per fare ciò, consideriamo un sistema di riferimento di assi XYZ in cui l'asse X coincide con la direzione del vettore \vec{r} . In questo sistema di riferimento abbiamo che, se $\vec{\rho} = (X, Y, Z)$, allora $X = \rho \cos \theta$.

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{G}{2r^3} \int \rho^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \, dm = \frac{G}{2r^3} \left(\int 3X^2 \, dm - \int \rho^2 \, dm \right) \\ &= \frac{G}{2r^3} \left(\int 3(X^2 - \rho^2) \, dm + 2 \int \rho^2 \, dm \right) = \frac{G}{2r^3} \left(-3 \int Y^2 + Z^2 \, dm + 2 \int \rho^2 \, dm \right) \\ &= \frac{G}{2r^3} \int [2\rho^2 - 3(Y^2 + Z^2)] \, dm. \end{aligned} \tag{4.2}$$

A questo punto, poniamo

$$I := \int (Y^2 + Z^2) \, dm$$

e osserviamo che corrisponde al momento di inerzia dello sferoide nella direzione X . Inoltre, siano A, B, C i momenti di inerzia dello sferoide rispetto agli assi x, y, z , che ci siamo premurati di scegliere come assi principali di inerzia per lo sferoide. In queste notazioni, la (4.2) diventa

$$U_2 = \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3I). \quad \text{formula di MacCullagh}$$

L'espressione appena ottenuta non è ancora soddisfacente. In effetti, la simmetria del corpo ci fa aspettare che il potenziale non dipenda dalla longitudine del punto P , ma solo dalla sua inclinazione rispetto all'equatore. Vorremmo rendere evidente questo fatto ed è essenziale usare coordinate polari (r, λ, φ) (figura 4.2). In queste coordinate abbiamo che

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Usando che

$$I = \int (Y^2 + Z^2) dm = \int \rho^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{r^2} \int |\vec{\rho} \times \vec{r}|^2 dm,$$

calcoliamo un'espressione di I in coordinate polari. Abbiamo che

$$\begin{aligned} (\vec{\rho} \times \vec{r})_x &= \eta r \sin \varphi - \zeta r \cos \varphi \sin \lambda \\ (\vec{\rho} \times \vec{r})_y &= \zeta r \cos \varphi \cos \lambda - \xi r \sin \varphi \\ (\vec{\rho} \times \vec{r})_z &= \xi r \cos \varphi \sin \lambda - \eta r \cos \varphi \cos \lambda, \end{aligned}$$

da cui

$$I = \sin^2 \varphi \int (\eta^2 + \xi^2) dm + \cos^2 \varphi \int \zeta^2 dm + \cos^2 \varphi \int (\xi^2 \sin^2 \lambda + \eta^2 \cos^2 \lambda) dm;$$

si osservi che gli integrali $\int \eta \zeta dm$, $\int \eta \xi dm$, $\int \xi \zeta dm$ sono nulli, in quanto la terna di assi xyz è fatta di assi principali d'inerzia per lo sferoide.

Sostituendo $\sin^2 \lambda = 1 - \cos^2 \lambda$, otteniamo l'espressione

$$\begin{aligned} I &= \sin^2 \varphi \int (\eta^2 + \xi^2) dm + \cos^2 \varphi \int (\zeta^2 + \xi^2) dm + \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda \int (\eta^2 - \xi^2) dm \\ &= C \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi + (A - B) \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda. \end{aligned}$$

Il termine di quadrupolo diventa

$$U_2(r, \varphi, \lambda) = \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3C \sin^2 \varphi - 3B \cos^2 \varphi - 3(A - B) \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda).$$

Ponendo $\cos^2 \lambda = (1 + \cos 2\lambda)/2$, si ottiene, finalmente,

$$U_2(r, \varphi, \lambda) = \frac{G}{r^3} \left[\left(\frac{A+B}{2} - C \right) P_2(\sin \varphi) - \frac{3}{4}(A - B) \cos^2 \varphi \cos 2\lambda \right],$$

dove $P_2(t)$ è il polinomio ortogonale di Legendre di grado 2:

$$P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}.$$

simmetria assiale

Grazie alla simmetria dello sferoide oblato, abbiamo che $A = B$; il termine di quadrupolo diventa

$$U_2(r, \varphi) = -\frac{G}{r^3} (C - A) P_2(\sin \varphi),$$

che non dipende dalla longitudine λ del punto.

Riscrivendo la precedente espressione come

$$U_2(r, \varphi) = -\frac{GM}{r} \frac{(C - A) a^2}{M a^2 r^2} P_2(\sin \varphi),$$

otteniamo l'espressione del potenziale di uno sferoide oblato a meno di termini di ordine $o(\rho^2/r^2)$:

$$U(r, \varphi) = +\frac{GM}{r} \left(1 - \frac{C - A a^2}{M a^2 r^2} P_2(\sin \varphi) \right). \quad (4.3)$$

DEFINIZIONE 4.1 - In uno sferoide oblato di semiasse maggiore a , massa M e momenti d'inerzia rispetto agli assi di simmetria A, B, C , il *momento di quadrupolo* è la quantità

$$J_2 = \frac{C - A}{M a^2}.$$

OSSERVAZIONI 4.2 - \circ In uno sferoide oblato il potenziale dipende dallo schiacciamento polare, dalla distanza e dall'inclinazione rispetto all'equatore.

\circ In generale, il potenziale gravitazionale per un corpo a simmetria assiale è della forma

$$U(r, \varphi) = +\frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{a}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi) \right),$$

per opportune costanti J_k e dove P_k è il k -esimo polinomio ortogonale di Legendre, definito dalla *formula di Rodrigues*

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k.$$

4.2 La Terra come sferoide oblato

Newton dimostrò nei *Principia* (Libro III, Proposizioni XVIII-XX) che, a causa della sua rotazione, la Terra deve essere uno sferoide oblato. In questa sezione definiremo alcuni parametri che misurano l'entità dello schiacciamento della Terra e stabiliremo delle relazioni tra di loro, ~~prima~~ assumendo che la densità della Terra sia costante, ~~poi nel caso più generale di densità non costante~~.

Da adesso in poi penseremo alla Terra come ad uno sferoide oblato ottenuto facendo ruotare un'ellisse di semiasse maggiore a (raggio equatoriale) e semiasse minore b (raggio polare) attorno a quest'ultimo. Indicheremo con M la massa della Terra e con ω_{\oplus} la velocità angolare media di rotazione della Terra attorno al proprio asse. Considereremo un sistema di riferimento di assi xyz , con origine nel centro dell'ellisse.

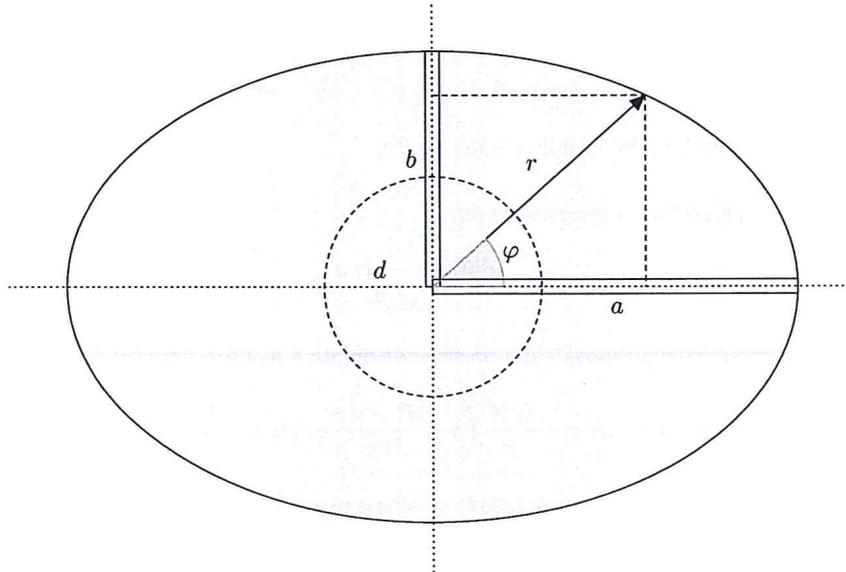


Figura 4.3: Sezione laterale dello sferoide oblato; sono evidenziate le colonne di fluido.

Il primo parametro che definiamo misura¹ l'entità della causa che produce lo schiacciamento. Viene naturale, quindi, definirlo come rapporto delle accelerazioni presenti sulla superficie terrestre:

$$m := \frac{\text{acc. centrifuga all'Equatore}}{\text{acc. locale di gravità all'Equatore}} = \frac{\omega_{\oplus}^2 a}{\frac{GM}{a^2}}. \quad (4.4)$$

Il secondo parametro che definiamo vogliamo che sia un indicatore della geometria dello sferoide e quindi vogliamo che misuri l'entità dello schiacciamento. Chiameremo, quindi, *schiacciamento* o *flattening* della Terra il numero

$$\epsilon := \frac{a - b}{a}. \quad (4.5)$$

Il terzo parametro che definiamo è stato già definito nella sezione precedente e si tratta del momento di quadrupolo J_2 .

Quello di cui ci occuperemo adesso sarà di trovare relazioni tra i tre parametri precedentemente definiti. Studieremo prima il caso a densità costante, nella trattazione data dallo stesso Newton. In seguito, tratteremo il caso più generale.

Densità costante

L'idea² è quella di considerare la Terra come un solido a cui viene fatto un buco³ a forma di "L", lungo un raggio polare e uno equatoriale, che viene riempito con fluido perfetto (figura 4.3).

¹Parliamo di misura, ma si tratta di un numero adimensionale.

²Appartenente a Newton. (proposizione XIX, Principia; consiglio la lettura di «Newton's Principia for the common reader» di Chandrasekhar S. premio Nobel per la fisica nel 1983).

³ con sezione trasversale costante e di area unitaria.

Dal fatto che il fluido contenuto nel canale è in equilibrio, Newton conclude che i pesi delle colonne di fluido, equatoriale e polare, devono essere uguali.

Tuttavia, lungo l'equatore l'accelerazione di gravità è affievolita dall'accelerazione centrifuga, e dato che entrambe queste accelerazioni, in un corpo omogeneo, variano linearmente con la distanza dal centro*, il fattore di «indebolimento» rimane costante e può essere calcolato all'equatore, ottenendo quindi m.

Poniamo

$$P_{\text{pole}} = P_{\text{eq}},$$

dove

P_{pole} = peso della colonna polare di fluido,

P_{eq} = peso della colonna equatoriale di fluido.

Si ha

$$P_{\text{pole}} = \int_0^b \rho g_p(s) ds = \int_0^b \rho k_p s ds = \frac{1}{2} \rho k_p b^2 = \frac{1}{2} \rho b g_{\text{pole}}$$

con

ρ : densità del fluido

$g_p(s) = k_p s$ accelerazione di gravità lungo il canale polare (con k_p costante)

$g_{\text{pole}} = k_p b$ accelerazione di gravità al polo.

* si veda alla fine del documento

Inoltre si ha

$$P_{eq} = \int_0^a \rho (g_e(s) - \omega_{\oplus}^2 s) ds = \frac{1}{2} \rho (K_e - \omega_{\oplus}^2) a^2$$
$$= \frac{1}{2} \rho a (g_{eq} - \underbrace{\omega_{\oplus}^2 a}_{\approx m g_{eq}}) = \frac{1}{2} \rho a g_{eq} (1 - m)$$

con

$g_e(s) = K_e s$ accelerazioni di gravità lungo il canale equatoriale (con K_e costante)

$g_{eq} = K_e a$ accelerazioni di gravità all'equatore,

ω_{\oplus} = velocità angolare di rotazione della Terra.

Dunque

$$\frac{1}{2} \rho b g_{pole} = \frac{1}{2} \rho a g_{eq} (1 - m),$$

da cui

$$\frac{g_{pole}}{g_{eq}} = \frac{a}{b} (1 - m). \quad (4.6)$$

Poiché $\epsilon = \frac{a-b}{a}$, allora $\frac{b}{a} = 1 - \epsilon$ ed essendo $\epsilon \ll 1$

$\frac{a}{b} \approx 1 + \epsilon$. D'ora in poi quando compare ϵ , considereremo

sempre sviluppi al primo ordine. Allora

$$\frac{g_{pole}}{g_{eq}} \approx (1 + \epsilon)(1 - m). \quad (4.7)$$

A questo punto valutiamo g_{pole}/g_{eq} . Abbiamo

$$g(r, \varphi) = \frac{\partial U}{\partial r}(r, \varphi),$$

con $U(r, \varphi) = \frac{GM}{r} \left(1 - J_2 \frac{a^2}{r^2} P_2(\cos \varphi) \right)$; segue che

$$g(r, \varphi) = -\frac{GM}{r^2} + \frac{3GM}{r^4} a^2 J_2 P_2(\cos \varphi). \quad (4.8)$$

Occupiamoci adesso della quantità J_2 . Per uno sferoide oblato omogeneo abbiamo

$$A = B = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2), \quad C = \frac{2}{5} M a^2.$$

Dunque

$$J_2 = \frac{C - A}{M a^2} = \frac{1}{5} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) = \frac{1}{5} [1 - (1 - \epsilon)^2] \approx \frac{2}{5} \epsilon$$

e sostituendo nell'espressione di $g(r, \varphi)$ si ha

$$g(r, \varphi) \approx -\frac{GM}{r^2} + \frac{6GM}{5r^4} a^2 \epsilon P_2(\cos \varphi).$$

Calcoliamo le accelerazioni di gravità al polo e all'equatore:

$$\begin{aligned} g_{\text{pole}} &= g(b, \pi/2) \approx -\frac{GM}{b^2} + \frac{6GM}{5b^4} a^2 \epsilon \\ &= -\frac{GM}{b^2} \left(1 - \frac{6}{5} \frac{a^2}{b^2} \epsilon \right) \approx -\frac{GM}{b^2} \left(1 - \frac{6}{5} (1 + \epsilon)^2 \epsilon \right) \\ &\approx -\frac{GM}{b^2} \left(1 - \frac{6}{5} \epsilon \right), \end{aligned}$$

$$g_{\text{eq}} = g(a, 0) \approx -\frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{3}{5} \epsilon \right).$$

Si ottiene

$$\frac{g_{\text{pole}}}{g_{\text{eq}}} \approx \frac{a^2}{b^2} \left(1 - \frac{6}{5} \epsilon \right) \left(1 - \frac{3}{5} \epsilon \right) \approx$$

$$(1 + \epsilon)^2 \left(1 - \frac{6}{5}\epsilon\right) \left(1 - \frac{3}{5}\epsilon\right) \approx 1 + \frac{1}{5}\epsilon.$$

Usando questo risultato nella 4.7 risulta

$$(1 - m)(1 + \epsilon) \approx 1 + \frac{1}{5}\epsilon,$$

da cui si trova che

$$\epsilon \approx \frac{5}{4}m$$

Dati numerici

Nel caso della Terra, è possibile misurare i parametri che abbiamo definito.

Parametro	Valore per la Terra
ϵ	1/298.2
m	$3.46 \cdot 10^{-3}$
J_2	$1.08 \cdot 10^{-3}$

I valori presenti nella precedente tabella si riferiscono ad un raggio equatoriale $a = 6.378 \cdot 10^6$ m. È, inoltre, possibile misurare il valore $(C - A)/A$:

$$\frac{C - A}{A} \simeq 3.27 \cdot 10^{-3}.$$