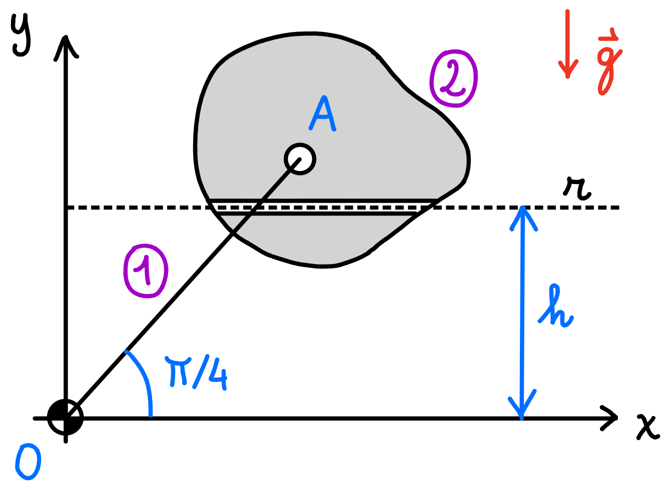
Esercizio



vincoli senza attrito

il corpo ① è un'asta omogenea lunga l e di massa m

in O c'è una coppia rotoidale fissa, in A una coppia rotoidale mobile

il corpo ② è vincolato all'estremo A dell'asta e ad una guida orizzontale da una coppia prismatica

la massa di ② è M e il suo baricentro coincide con A

l'unica forza esterna attiva che agisce è la forza di gravità

Trovare le reazioni vincolari esterne al sistema

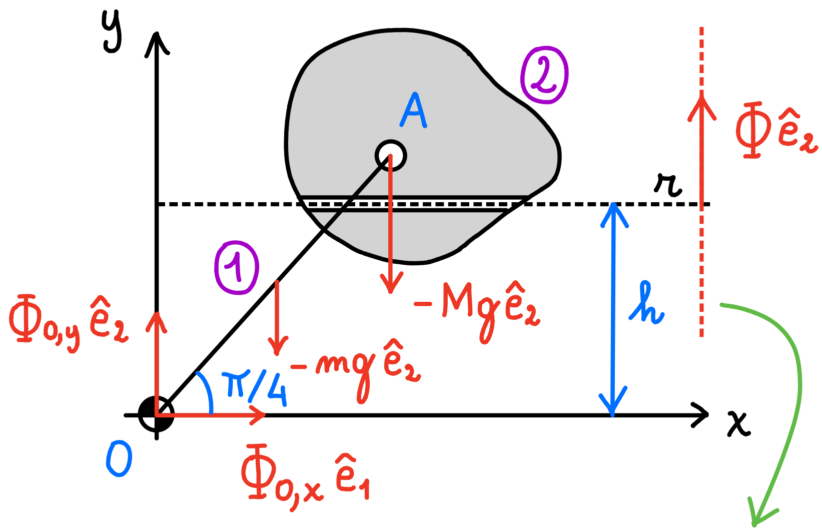
Sol.

Le reazioni richieste sono la reazione in O e la reazione della coppia prismatica

Le reazioni della coppia prismatica costituiscono un sistema piano di forze

Un sistema di forze equivalente sarà dato o da una forza (la risultante) applicata in un punto dall'asse centrale o da una coppia

Nel caso la risultante delle forze sia diversa da zero sappiamo che la sua direzione è perpendicolare alla guida r



indichiamo con Φ la reazione, eventualmente nulla, della coppia prismatica sul corpo 2

scriviamo la 1ª eq. cardinale per l'intero sistema

$$\Phi_{0,x} = 0$$

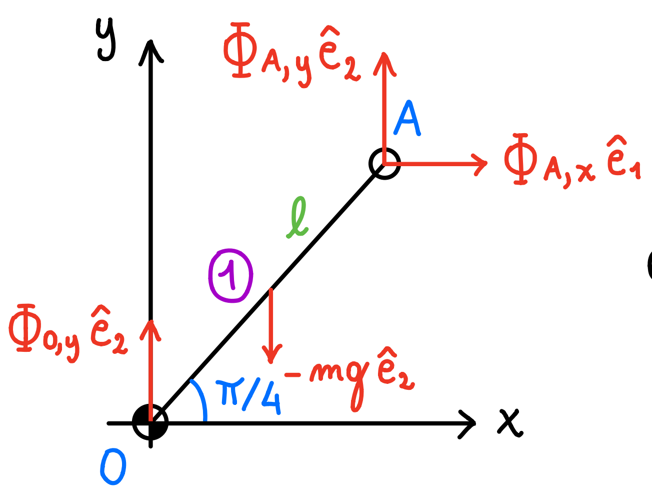
$$\Phi_{0,y} + \Phi - g(m+M) = 0$$

non possiamo scrivere la 2ª eq. cardinale per l'intero sistema, perché non sappiamo se $\Phi = 0$ o $\Phi \neq 0$:

a) se $\Phi = 0$ allora il sistema di reazioni vincolari della coppia prismatica è equivalente ad una coppia incognita che potremmo trovare subito scrivendo la 2ª eq. cardinale per l'intero sistema rispetto ad O

b) se $\Phi \neq 0$ non conosciamo ancora l'asse centrale, allora se scriviamo la 2ª eq. cardinale per l'intero sistema rispetto ad O avremo due incognite: Φ e il braccio della forza

Scomponiamo il sistema e scriviamo la 2ª eq. cardinale per il corpo ① rispetto al polo A



$\Phi_{O,x} = 0$

$$\frac{l}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}mg - l\frac{\sqrt{2}}{2}\Phi_{O,y} = 0$$

$$\Phi_{O,y} = \frac{mg}{2}$$

quindi

$$\vec{\Phi}_O = \frac{mg}{2}\,\hat{e}_2$$

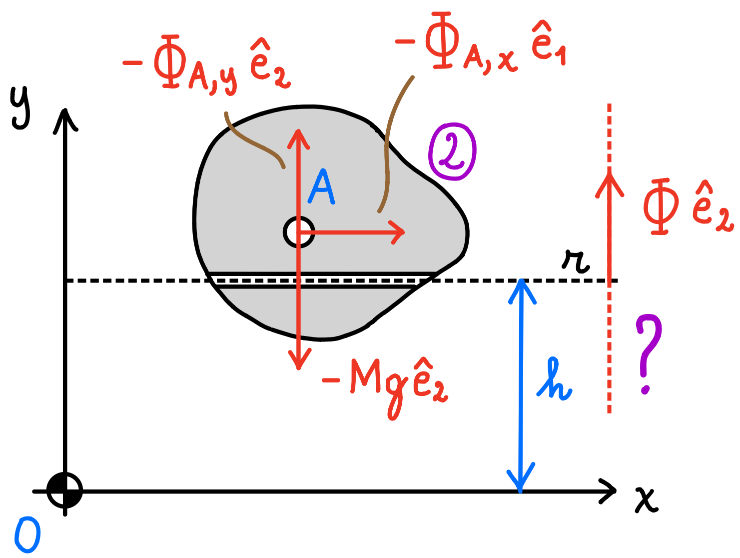
e usando l'equazione trovata prima

$$\Phi_{O,y} + \Phi - g(m+M) = 0$$

$$\Phi = g\left(M + \frac{m}{2}\right)$$

Si ha $\Phi \neq 0$, resta da determinare la sua retta di applicazione (che è l'asse centrale del sistema di reazioni vincolari esercitate dalla guida r sul corpo 2)

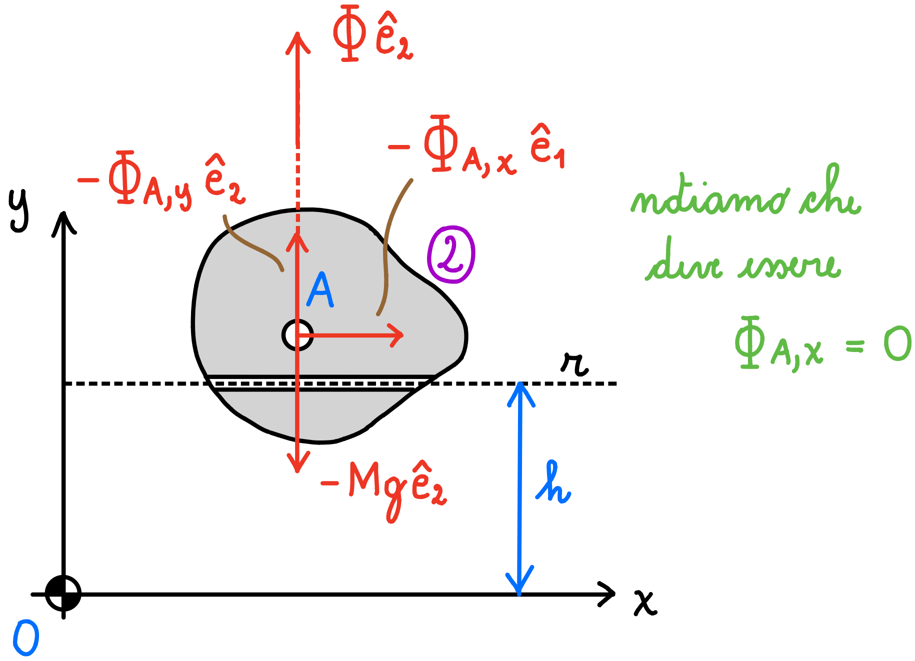
Considoriamo solo il corpo 2



le forze esterne che agiscono su questo corpo sono

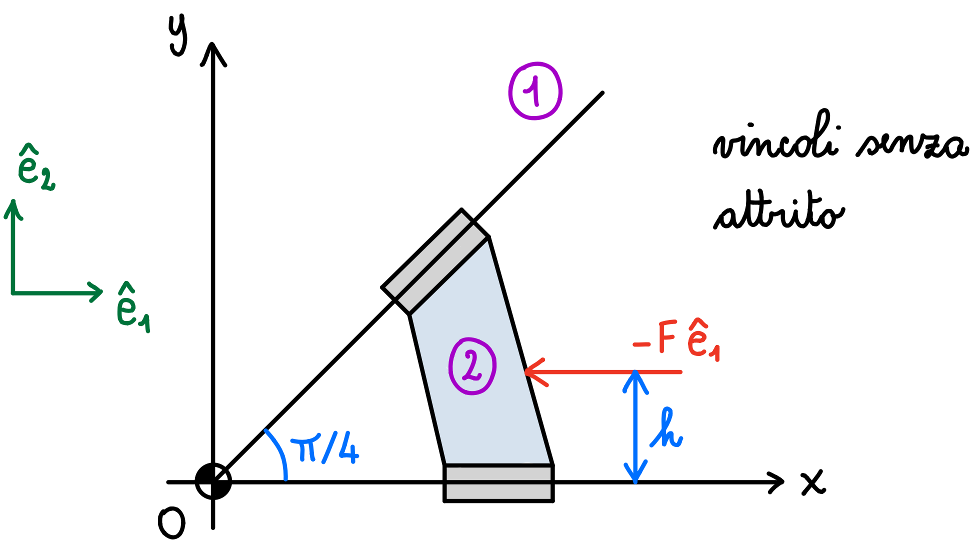
$$-\vec{\Phi}_A\,,\; -Mg\,\hat{e}_2\,,\; \vec{\Phi} = \Phi\,\hat{e}_2$$

e devono costituire un sistema di forze equilibrato allora poiché $-\Phi_A, -Mg\,\hat{e}_2$ sono entrambe applicate in A, anche la retta di applicazione di $\vec{\Phi}$ deve passare per A



quindi l'asse centrale cercato è una retta verticale passante per A

Esercizio



il corpo 1 è un'asta che ha un estremo vincolato con una coppia rotoidale fissa e l'altro estremo libero

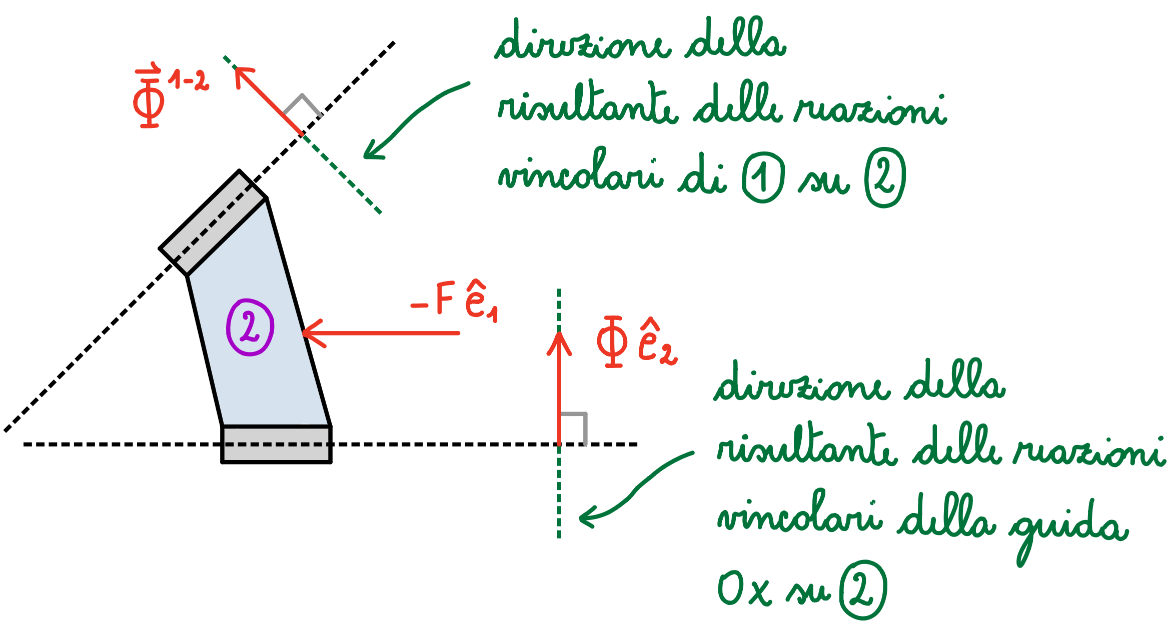
il corpo ② è vincolato all'asta con una coppia prismatica e alla guida orizzontale attraverso un'altra coppia prismatica

Trovare le reazioni vincolari che agiscono su ① e ②

Sol.

Per prima cosa cerchiamo di capire se le risultanti delle reazioni vincolari esercitate dalla guida Ox su ② e da ① su ② sono diverse da $\vec{0}$

Se sono diverse da $\vec{0}$ le loro direzioni sono note



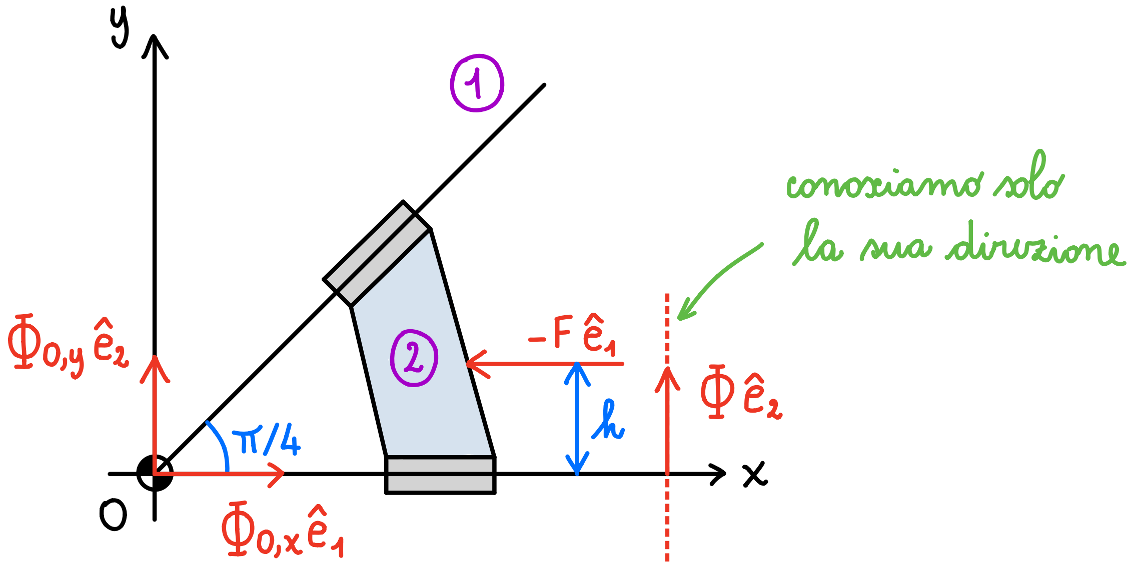
poiché deve valere la 1ª eq. cardinale per ②, cioè

$$\vec{\Phi}^{1-2} + \vec{\Phi} - F\hat{e}_1 = 0$$

sicuramente non possono essere entrambe nulle, e neppure una sola di esse può essere nulla; dunque

$$\vec{\Phi} \neq \vec{0}\,, \quad \vec{\Phi}^{1-2} \neq \vec{0}$$

Le incognite sono $\vec{\Phi}_0, \vec{\Phi}^{1-2}, \vec{\Phi} = \Phi\,\hat{e}_2$



Scriviamo la 1ª eq. cardinale per l'intero sistema

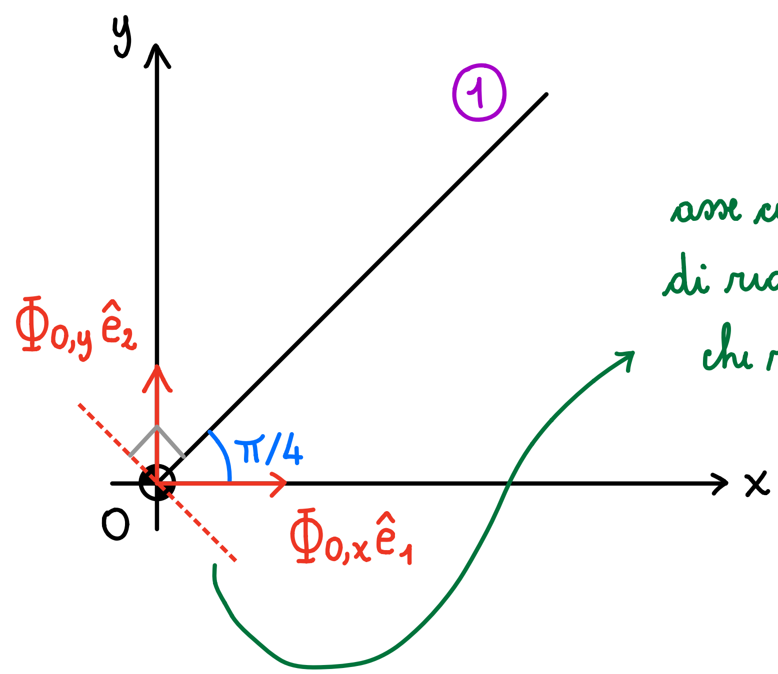
$$\begin{cases} \Phi_{0,x} - F = 0 \\ \Phi_{0,y} + \Phi = 0 \end{cases}$$

$$\Phi_{0,x} = F$$

Come già visto nell'esercizio precedente non è conveniente scrivere la 2ª eq. cardinale per l'intero sistema

Procediamo considerando la sola asta

su di essa agiscono la reazione in O e $\vec{\Phi}^{2-1} = -\vec{\Phi}^{1-2}$ di cui conosciamo la direzione che è perpendicolare all'asta allora perchè ci sia equilibrio la retta di applicazione di $\vec{\Phi}^{2-1}$, e quindi anche di $\vec{\Phi}^{1-2}$, deve passare per O



asse centrale del sistema di reazioni vincolari che rappresentano l'azione di 2 su 1

1^a eq. cardinale per il corpo 1

$$\begin{cases} \Phi_{0,x} + \Phi^{2-1}_x = 0 \\ \Phi_{0,y} + \Phi^{2-1}_y = 0 \end{cases}$$

$(\Phi_{0,x} = F)$ $\quad \Phi^{2-1}_x = -F$

dunque dovrà essere $\Phi^{2-1}_y = F$

$$\Phi_{0,y} = -F$$

e dall'equazione $\Phi_{0,y} + \Phi = 0$ (trovata prima) si ha

$$\Phi = F$$

Abbiamo trovato

$$\vec{\Phi}_O = F\hat{e}_1 - F\hat{e}_2$$

$$\vec{\Phi} = F\hat{e}_2$$

$$\vec{\Phi}^{2-1} = -F\hat{e}_1 + F\hat{e}_2 = -\vec{\Phi}^{1-2}$$

Ci resta da determinare la retta di applicazione di $\vec{\Phi}$ (cioè l'asse centrale del sistema di reazioni vincolari che la guida Ox esercita sul corpo ②)

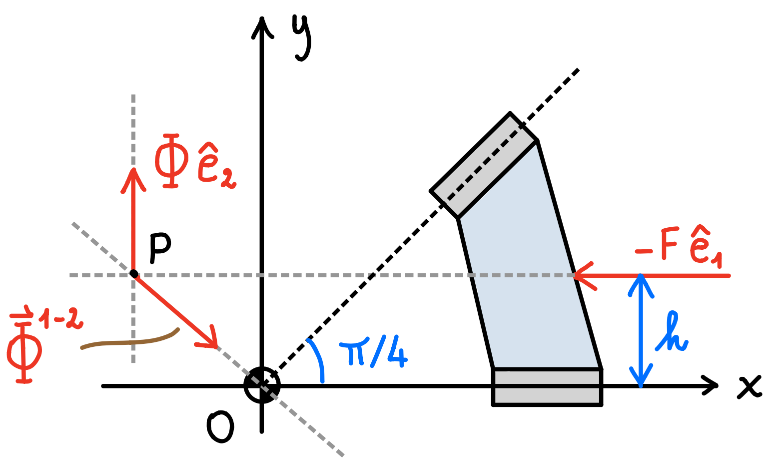
A tal fine consideriamo il corpo ②, esso è soggetto a tre forze esterne

$$-F\hat{e}_1, \quad \vec{\Phi}^{1-2}, \quad \vec{\Phi}$$

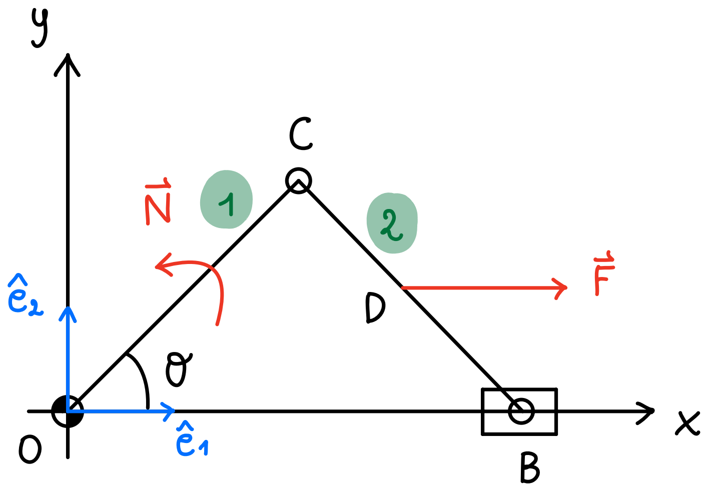
che devono formare un sistema equilibrato

Le rette di applicazione di $-F\hat{e}_1$, $\vec{\Phi}^{1-2}$ sono note e si intersecano in P, $P - O = -h\hat{e}_1 + h\hat{e}_2$

allora la retta di applicazione di $\vec{\Phi}$ deve necessariamente passare per P



Esercizio (8 gennaio 2019)



2 aste uguali, ciascuna di massa m e lunghezza 2ℓ

l'asta OC è soggetta ad una coppia di momento $\vec{N} = N\hat{e}_3$, $N > 0$

l'asta CB è soggetta ad una forza $-F\hat{e}_1$, $F > 0$, applicata nel punto medio D di CB

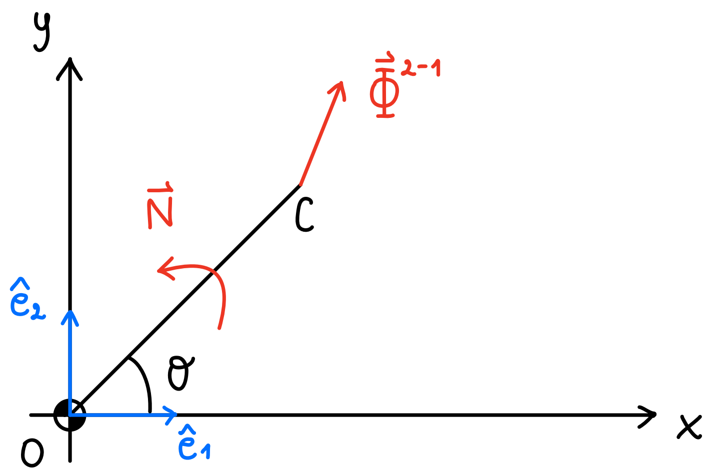
Determinare le configurazioni di equilibrio con il PLV

Sol

Per un corpo rigido il PLV assume la forma

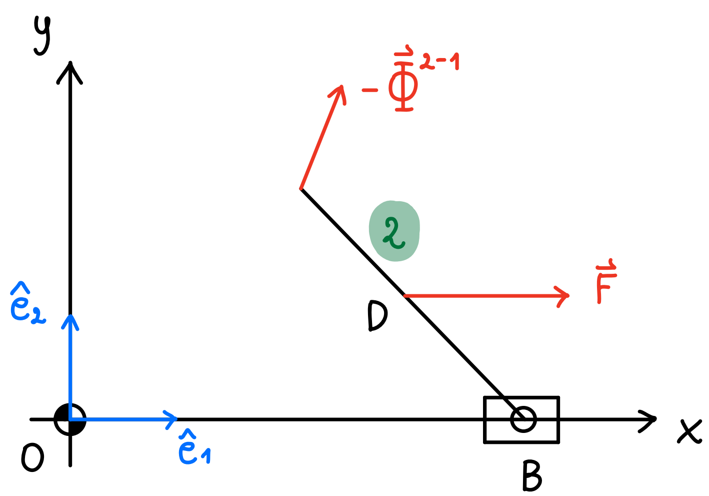
$$\vec{R}^{(a)} \cdot \delta\vec{X}_Q + \vec{N}_Q^{(a)} \cdot \vec{\omega}\, dt = 0$$

Consideriamo l'asta OC



$$\vec{\Phi}^{2-1}\cdot\delta\vec{X}_C + \vec{N}\cdot\big(\overbrace{\dot{\theta}\,\hat{e}_3}^{=\vec{\omega}^{(1)}}\big)\,dt = 0$$

Consideriamo l'asta CB



$$\left(-\vec{\Phi}^{2-1}+\vec{F}\right)\cdot\delta\vec{X}_C \; +$$

$$\left[\left(\vec{X}_D-\vec{X}_C\right)\times\vec{F}\right]\cdot\big(\underbrace{-\dot{\theta}\,\hat{e}_3}_{=\vec{\omega}^{(2)}}\big)\,dt = 0$$

$$-\vec{\Phi}^{2-1} \cdot \delta \vec{x}_C \; +$$

$$\underbrace{\vec{F} \cdot \delta \vec{x}_C + (-\dot{\theta}\,\hat{e}_3)\,dt \times (\vec{x}_D - \vec{x}_C) \cdot \vec{F}}_{\substack{\parallel \\ \vec{F} \cdot \{ \delta \vec{x}_C + (-\dot{\theta}\,\hat{e}_3)\,dt \times (\vec{x}_D - \vec{x}_C) \}}} = 0$$

$$-\vec{\Phi}^{2-1} \cdot \delta \vec{x}_C + \vec{F} \cdot \delta x_D = 0$$

Sommando e si ottiene

$$\vec{N} \cdot (\dot{\theta}\,\hat{e}_3)\,dt + \vec{F} \cdot \delta \vec{x}_D = 0$$

$$\vec{x}_D = 3\ell \cos\theta\,\hat{e}_1 + \ell \,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_2$$

$$\delta \vec{x}_D = \delta\theta\,(-3\ell\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_1 + \ell\cos\theta\,\hat{e}_2)$$

$$\vec{N} = N\,\hat{e}_3$$

$$\dot{\theta}\,dt = \delta\theta$$

$$\vec{F} = F\,\hat{e}_1$$

Si ha

$$N\delta\theta - 3F\ell \operatorname{sen}\theta\, \delta\theta = 0, \quad \forall \delta\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{N}{3F\ell}$$

se $N \leqslant 3F\ell$ allora

$$\theta_1 = \operatorname{arcsen}\frac{N}{3F\ell}, \quad \theta_2 = \pi - \theta_1$$