

# Compito di Meccanica Razionale

## Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

### 8 Gennaio 2024

#### Primo Esercizio

Si consideri un punto materiale  $P$  di massa unitaria ( $m = 1$ ) libero di muoversi in un campo di forze centrali con energia potenziale

$$\mathbf{F}(\rho) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

dove  $\rho = |\mathbf{x}| > 0$  e

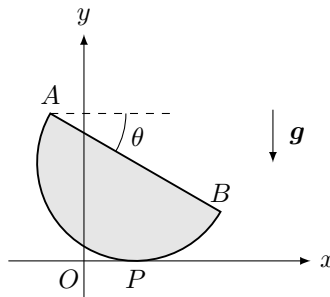
$$f(\rho) = -(\rho - 1)^2 \log \rho.$$

Assumendo che il momento angolare di  $P$  rispetto al centro delle forze sia diverso da zero,

- i) scrivere esplicitamente l'espressione dell'energia potenziale  $V(\rho)$ ;
- ii) disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate  $\rho, \dot{\rho}$ ;
- iii) dimostrare che il valore minimo che può assumere l'energia totale è minore del valore assunto dall'energia potenziale efficace per  $\rho = 1$ , cioè del valore  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(1)$ .

#### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano verticale  $Oxy$  si consideri un semidisco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $r$  che rotola senza strisciare sulla guida  $Ox$ . Introduciamo l'angolo  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  tra la direzione di  $Ox$  e la direzione della retta passante per i punti  $A$  e  $B$ . Si assuma che all'istante iniziale  $t = 0$  si abbia  $\theta = 0$  e che il punto di contatto  $P$  del semidisco con  $Ox$  coincida con  $O$ . L'angolo  $\theta$  aumenta in corrispondenza ad un rotolamento orario (rispetto ad  $Oz$ ) del semidisco. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $\mathbf{g}$  parallela ad  $Oy$  e di modulo uguale a  $g$ .



Si utilizzi  $\theta$  per descrivere il moto.

- i) Calcolare la posizione del baricentro del semidisco in funzione di  $\theta$ .
- ii) Scrivere l'equazione pura del moto del semidisco utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.

- iii) Assumendo di conoscere la soluzione  $\theta(t)$  dell'equazione del moto trovata nel punto ii), date le condizioni iniziali  $\theta(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) \neq 0$ , scrivere le componenti  $\Phi_x(t)$ ,  $\Phi_y(t)$  della reazione vincolare che la guida  $Ox$  esercita sul semidisco.

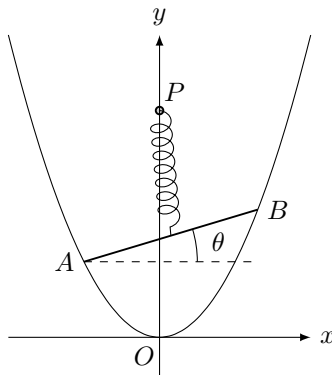
### Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano orizzontale  $Oxy$  si consideri il seguente sistema meccanico. Gli estremi  $A$  e  $B$  di un'asta di lunghezza  $\ell$  e massa  $m$  possono muoversi lungo una guida parabolica di equazione

$$y = \frac{x^2}{\ell}.$$

Il punto medio del segmento  $AB$  è collegato tramite una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla ad un punto materiale  $P$  di massa  $M$  che può muoversi lungo l'asse  $Oy$ . Sul sistema non agisce la forza di gravità. Si utilizzino come coordinate lagrangiane l'ordinata  $y$  di  $P$  e l'angolo  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  tra l'asse  $Ox$  e la direzione della retta passante per i punti  $A$ ,  $B$ . L'angolo  $\theta$  aumenta in corrispondenza ad una rotazione antioraria (rispetto ad  $Oz$ ) dell'asta.

- i) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- ii) Discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate.



### Soluzione Primo Esercizio

i)

L'energia potenziale è data da

$$V(\rho) = - \int f(\rho) d\rho = \int (\rho - 1)^2 \log \rho d\rho,$$

che si può risolvere per parti, ottenendo

$$V(\rho) = \left( \frac{\rho^3}{3} + \rho - \rho^2 \right) \log \rho - \frac{\rho^3}{9} - \rho + \frac{\rho^2}{2}.$$

ii)

Introduciamo l'energia potenziale efficace

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)} = \left( \frac{\rho^3}{3} + \rho - \rho^2 \right) \log \rho - \frac{\rho^3}{9} - \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{c^2}{2\rho^2}.$$

Notando che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^\alpha \log \rho = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

troviamo

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = +\infty.$$

Cerchiamo i punti critici di  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)$ . Da

$$\frac{d\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}}{d\rho} = (\rho - 1)^2 \log \rho - \frac{c^2}{\rho^3} = 0,$$

si ha

$$\log \rho = \frac{c^2}{\rho^3(\rho - 1)^2}.$$

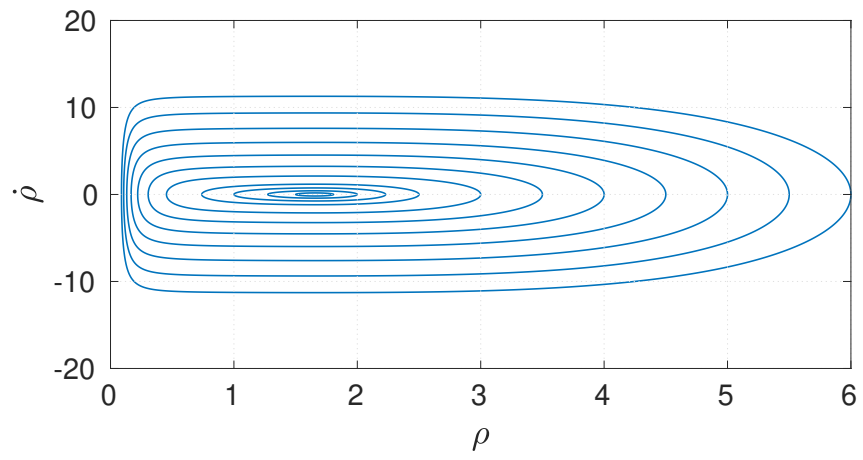
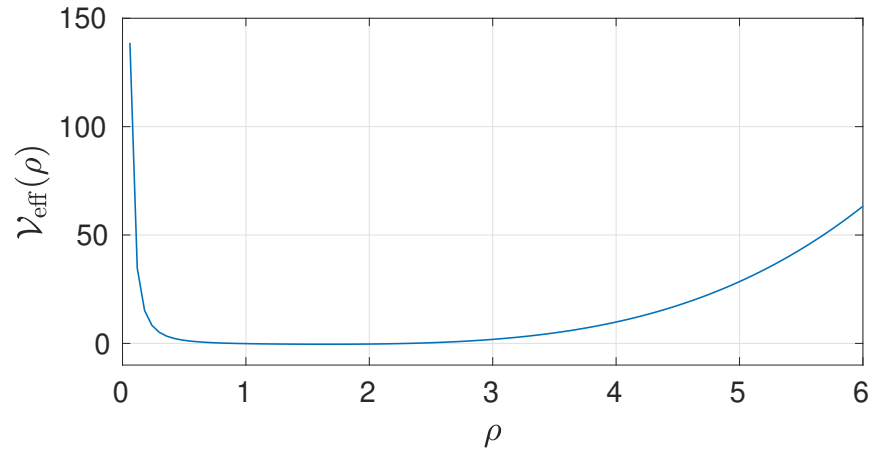
Si può mostrare che esiste un unico valore reale  $\bar{\rho}$  di  $\rho$  che soddisfa questa equazione. Inoltre  $\bar{\rho} > 1$ . Il grafico di  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)$  ed il ritratto di fase richiesto sono mostrati nelle due figure riportate nella pagina seguente.

ii)

Dal grafico di  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)$  e da  $\bar{\rho} > 1$  si ha

$$h_{\min} = \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\bar{\rho}) < \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(1),$$

dove  $h_{\min}$  è il valore minimo che può assumere l'energia totale.



### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

Si può prima calcolare la distanza  $h$  del baricentro  $G$  dal punto medio  $C$  del segmento  $AB$ :

$$h = \frac{1}{m} \int_0^\pi \int_0^r \sigma \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta = \frac{4r}{3\pi},$$

con  $\sigma = \frac{2m}{\pi r^2}$ . Dunque si ha

$$\chi_G = \chi_C - h \sin \theta \mathbf{e}_1 - h \cos \theta \mathbf{e}_2,$$

con

$$\chi_C = \chi_P + r \mathbf{e}_2$$

e

$$\chi_P = r \theta \mathbf{e}_1.$$

Risulta

$$\chi_G = (r\theta - h \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (r - h \cos \theta) \mathbf{e}_2.$$

ii)

L'equazione pura del moto del semidisco si ottiene dalla seconda equazione cardinale della dinamica rispetto al punto di contatto  $P$ :

$$\dot{\mathbf{M}}_P = \mathbf{N}_P - m \mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_G. \quad (1)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G &= \dot{\theta} [(r - h \cos \theta) \mathbf{e}_1 + h \sin \theta \mathbf{e}_2], \\ \mathbf{v}_P &= r \dot{\theta} \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{N}_P &= mgh \sin \theta \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Dunque

$$\mathbf{N}_P - m \mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_G = mh(g - r\dot{\theta}^2) \sin \theta \mathbf{e}_3.$$

Notando che  $P$  è il centro istantaneo di rotazione del semidisco e che la sua velocità angolare è

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_3,$$

possiamo scrivere

$$\mathbf{M}_P = I_{P,z} \boldsymbol{\omega} = -I_{P,z} \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

Il momento di inerzia  $I_{P,z}$  si può calcolare come segue:

$$I_{P,z} = I_{G,z} + m |\chi_G - \chi_P|^2,$$

con

$$I_{G,z} = I_{C,z} - mh^2 = m \left( \frac{r^2}{2} - h^2 \right).$$

Risulta

$$I_{P,z} = mr \left( \frac{3}{2} r - 2h \cos \theta \right).$$

Allora

$$\mathbf{M}_P = -mr \dot{\theta} \left( \frac{3}{2} r - 2h \cos \theta \right) \mathbf{e}_3$$

e

$$\dot{\mathbf{M}}_P = -mr \left[ \left( \frac{3}{2}r - 2h \cos \theta \right) \ddot{\theta} + 2h\dot{\theta}^2 \sin \theta \right] \mathbf{e}_3.$$

Proiettando l'equazione (1) lungo  $\mathbf{e}_3$  e dividendo entrambi i membri per  $-mr^2$  si ha infine l'equazione pura del moto

$$\left( \frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta \right) \ddot{\theta} + \frac{4}{3\pi} \left( \dot{\theta}^2 + \frac{g}{r} \right) \sin \theta = 0.$$

iii)

Proiettando la prima equazione cardinale della dinamica

$$m\mathbf{a}_G = -mge_2 + \Phi,$$

con  $\Phi = \Phi_x \mathbf{e}_1 + \Phi_y \mathbf{e}_2$ , lungo  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \Phi_x &= m \left[ \ddot{\theta}(r - h \cos \theta) + \dot{\theta}^2 h \sin \theta \right], \\ \Phi_y &= m \left[ h(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + g \right], \end{aligned}$$

dove per semplicità abbiamo ommesso la dipendenza dal tempo e lasciato  $h$ .

### Soluzione Terzo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

Le posizioni di  $A, B$  sono date da

$$\boldsymbol{\chi}_A = x_A \mathbf{e}_1 + \frac{x_A^2}{\ell} \mathbf{e}_2,$$

$$\boldsymbol{\chi}_B = x_B \mathbf{e}_1 + \frac{x_B^2}{\ell} \mathbf{e}_2.$$

Inoltre

$$x_B = x_A + \ell \cos \theta,$$

$$x_B^2 = x_A^2 + \ell^2 \sin^2 \theta,$$

da cui si trova

$$x_A = \frac{\ell}{2} (\tan \theta - \cos \theta).$$

Grazie a quest'ultima relazione riusciamo a scrivere le coordinate di  $A$  e  $B$  in funzione di  $\theta$ . Chiamiamo  $C$  il punto medio del segmento  $AB$ . Si ha

$$\boldsymbol{\chi}_C = \frac{\ell}{4} [2 \tan \theta \mathbf{e}_1 + (\tan^2 \theta + \cos^2 \theta) \mathbf{e}_2].$$

Introduciamo anche la posizione di  $P$ :

$$\boldsymbol{\chi}_P = y \mathbf{e}_2.$$

L'energia potenziale delle forze attive risulta

$$\begin{aligned} V(\theta, y) &= \frac{k}{2} |\boldsymbol{\chi}_P - \boldsymbol{\chi}_C|^2 \\ &= \frac{k}{2} \left( \frac{\ell}{2} \tan \theta \right)^2 + \frac{k}{2} \left( \frac{\ell}{4} (\tan^2 \theta + \cos^2 \theta) - y \right)^2. \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio sono soluzioni del sistema

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{k\ell}{2} \left[ \frac{\ell \tan \theta}{2 \cos^2 \theta} + \left( \frac{\ell}{4} (\tan^2 \theta + \cos^2 \theta) - y \right) \left( \frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta} - \cos \theta \sin \theta \right) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -k \left( \frac{\ell}{4} (\tan^2 \theta + \cos^2 \theta) - y \right) = 0.$$

Questo sistema ammette l'unica soluzione

$$(\bar{\theta}, \bar{y}) = \left( 0, \frac{\ell}{4} \right),$$

che è l'unica configurazione di equilibrio.

ii)

Per discutere la stabilità di  $(\bar{\theta}, \bar{y})$  ci interessa calcolare la matrice hessiana  $V''(\bar{\theta}, \bar{y})$ . Si ha

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\bar{\theta}, \bar{y}) = \frac{k\ell^2}{4},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 y}(\bar{\theta}, \bar{y}) = k,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial y}(\bar{\theta}, \bar{y}) = 0.$$

Per il teorema di Lagrange-Dirichlet possiamo affermare che la configurazione di equilibrio  $(\tilde{\theta}, \tilde{y})$  è stabile.



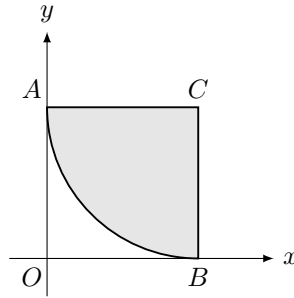
# Compito di Meccanica Razionale

## Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

25 Gennaio 2024

### Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri un quarto di disco omogeneo di massa  $m$  con centro nel punto  $C \equiv (R, R)$ . Inoltre abbiamo  $A \equiv (0, R)$ ,  $B \equiv (R, 0)$ .



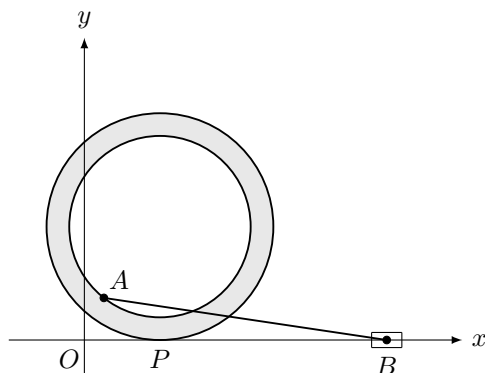
- i) Determinare un sistema di riferimento principale di inerzia con origine in  $O$  motivando la risposta.
- ii) Calcolare la matrice di inerzia  $I_O$  definita attraverso il sistema di riferimento  $Oxyz$ .

### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri un anello, con raggio interno  $r$  e raggio esterno  $R > r$ , che rotola senza strisciare sulla guida orizzontale  $Ox$ . Un'asta lunga  $\ell > R$  ha un estremo ( $A$ ) vincolato attraverso una coppia rotoidale mobile ad un punto del bordo interno dell'anello, mentre l'altro estremo ( $B$ ) può scivolare lungo la guida  $Ox$ . Si assuma che all'istante iniziale il punto di contatto  $P$  dell'anello con  $Ox$  coincida con  $O$ , che l'ascissa di  $A$  sia nulla e che l'ascissa di  $B$  sia maggiore di 0.

Utilizzando come parametro l'ascissa  $s$  di  $P$ ,

- i) calcolare la velocità angolare dell'anello;
- ii) calcolare la velocità angolare dell'asta;
- iii) ottenere graficamente la posizione del centro istantaneo di rotazione  $C_0$  dell'asta in una configurazione del sistema con  $s > 0$ , come quella mostrata nella figura, motivando la risposta;
- iv) scrivere esplicitamente la posizione di  $C_0$  rispetto ad  $O$  nel caso di  $s \neq 0$ .

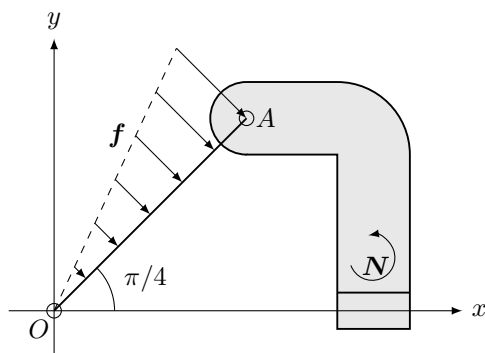


### Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano orizzontale  $Oxy$  si consideri il sistema meccanico formato da un'asta  $OA$  e da un corpo rigido  $C$  vincolati tra loro attraverso una coppia rotoidale mobile posta nel punto  $A$ . L'asta  $OA$  è inclinata di  $\pi/4$  rispetto all'asse  $Ox$  ed il suo estremo  $O$  è vincolato all'origine da una coppia rotoidale fissa. Il corpo  $C$  è vincolato all'asse  $Ox$  da una coppia prismatica. L'asta  $OA$  è sollecitata da un carico per unità di lunghezza distribuito uniformemente lungo l'asta dato da

$$\mathbf{f}(s) = \frac{F}{\ell^2} s \mathbf{u}, \quad s \in [0, \ell],$$

dove  $F > 0$  e  $\mathbf{u}$  è un versore diretto perpendicolarmente all'asta e orientato come si vede dalla figura. Su  $C$  agisce la coppia  $\mathbf{N}$ . Si assuma che tutti i vincoli siano privi di attrito.



- i) Mostrare come ottenere un sistema di forze applicate equivalente al sistema costituito dal carico distribuito applicato all'asta.
- ii) Determinare le reazioni vincolari interne ed esterne al sistema utilizzando il metodo di sovrapposizione degli effetti dovuti alla coppia applicata a  $C$  e al carico distribuito applicato all'asta.

### Soluzione Primo Esercizio

i)

Il piano  $Oxy$  è un piano di simmetria per riflessione per la lamina, quindi l'asse  $Oz$  è un asse principale di inerzia. Il piano perpendicolare al piano  $Oxy$  e passante per i punti  $O$  e  $C$  è un piano di simmetria per riflessione per la lamina. Quindi l'asse passante per  $O$  e perpendicolare al segmento  $OC$  è un asse principale di inerzia. Per il teorema spettrale, l'asse passante per i punti  $O$  e  $C$  è un asse principale di inerzia.

ii)

Notiamo che i momenti di inerzia rispetto agli assi  $Ox$ ,  $Oy$  sono uguali. Introduciamo le seguenti coordinate polari. Sia  $\rho$  la distanza di un punto  $P$  generico della lamina da  $C$  e sia  $\theta$  l'angolo compreso tra i segmenti  $CP$  e  $CB$ . Allora

$$I_{11} = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \sigma \rho (R - \rho \cos \theta)^2 d\rho d\theta = mR^2 \left( \frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi} \right),$$

dove

$$\sigma = \frac{4m}{\pi R^2}.$$

Quindi

$$I_{22} = I_{11} = mR^2 \left( \frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi} \right),$$
$$I_{33} = 2I_{11} = 2mR^2 \left( \frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi} \right).$$

Inoltre abbiamo

$$I_{13} = I_{23} = I_{31} = I_{32} = 0.$$

e

$$I_{12} = I_{21} = - \int_0^R \int_0^{\pi/2} \sigma \rho (R - \rho \cos \theta)(R - \rho \sin \theta) d\rho d\theta = -mR^2 \left( 1 - \frac{13}{6\pi} \right).$$

### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Chiamiamo  $C$  il centro dell'anello. Introduciamo inoltre l'angolo  $\theta$  tra i segmenti  $CA$  e  $CP$ . Dalla configurazione iniziale descritta nel testo, si ha subito

$$\theta = \frac{s}{R}.$$

Le posizioni dei punti  $C, A, P$  risultano

$$\begin{aligned}\chi_C &= s\mathbf{e}_1 + R\mathbf{e}_2, \\ \chi_A &= (s - r \sin \theta)\mathbf{e}_1 + (R - r \cos \theta)\mathbf{e}_2, \\ \chi_P &= s\mathbf{e}_1.\end{aligned}$$

Scriviamo la formula fondamentale della cinematica rigida per l'anello

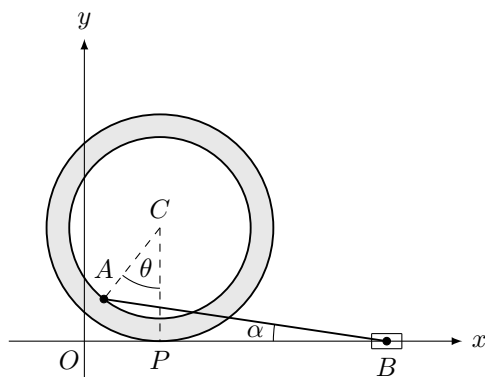
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega}^a \times (\chi_C - \chi_P),$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C &= \dot{s}\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{v}_P &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\omega}^a &= \omega^a \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Risulta

$$\boldsymbol{\omega}^a = -\frac{\dot{s}}{R}\mathbf{e}_3.$$



ii)

Introduciamo l'angolo  $\alpha$  tra l'asse  $Ox$  e l'asta. Si ha

$$l \sin \alpha = R - r \cos \theta.$$

Quindi valgono le relazioni (si noti che  $0 < \alpha < \pi/2$ )

$$\sin \alpha = \frac{1}{l}(R - r \cos \theta), \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{l}\sqrt{\ell^2 - (R - r \cos \theta)^2}. \quad (2)$$

La velocità angolare dell'asta è data da

$$\omega^{AB} = -\dot{\alpha} e_3.$$

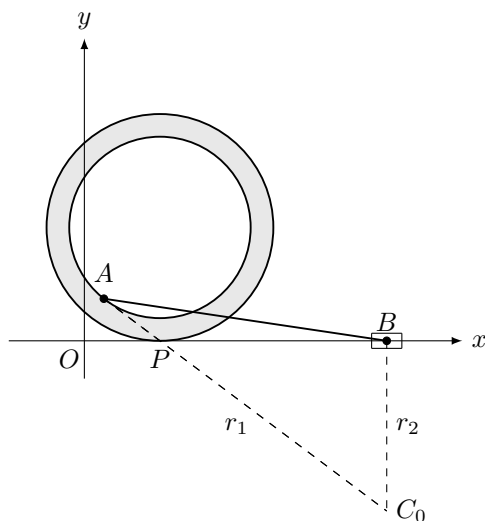
Derivando rispetto al tempo l'equazione (1) ed usando l'equazione (2) si ha

$$\dot{\alpha} = \frac{r \dot{s} \sin \theta}{R \sqrt{\ell^2 - (R - r \cos \theta)^2}},$$

dove abbiamo anche tenuto conto che  $\theta = s/R$ .

iii)

La direzione della velocità di  $A$  è perpendicolare al segmento  $AP$ , in quanto  $P$  è il centro istantaneo di rotazione dell'anello ed  $A$  può essere visto come un punto solidale all'anello. Introduciamo la retta  $r_1$  passante per  $A$  e  $P$ . Tracciamo inoltre la retta  $r_2$  perpendicolare ad  $Ox$  e passante per  $B$ . Per il teorema di Chasles le due rette si intersecano nel centro istantaneo di rotazione  $C_0$  dell'asta.



iv)

L'equazione della retta passante per  $A$  e  $P$  è data da

$$y = \frac{R - r \cos \theta}{r \sin \theta} (s - x).$$

Le coordinate di  $C_0$  risultano

$$\begin{aligned} x_{C_0} &= x_A + \ell \cos \alpha, \\ y_{C_0} &= \frac{R - r \cos \theta}{r \sin \theta} (s - x_{C_0}), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_{C_0} &= s - r \sin \theta + \sqrt{\ell^2 - (R - r \cos \theta)^2}, \\ y_{C_0} &= \frac{R - r \cos \theta}{r \sin \theta} \left( r \sin \theta - \sqrt{\ell^2 - (R - r \cos \theta)^2} \right), \end{aligned}$$

con  $\theta = s/R$ .

### Soluzione Terzo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Poichè il sistema di forze esterne attive applicate all'asta è costituito da vettori paralleli, il trinomio invariante sarà nullo. Per un risultato visto, potremo sostituire tale sistema con un unico vettore dato dalla risultante applicata in un punto dell'asse centrale, che sceglieremo coincidere con il centro dei vettori paralleli. La risultante è data da

$$\mathbf{R} = \int_0^\ell \mathbf{f}(s) ds = \frac{F}{2} \mathbf{u}.$$

Chiamiamo  $C$  il centro dei vettori paralleli e  $P$  un generico punto dell'asta. La posizione di  $C$  rispetto ad  $O$  è data da

$$\chi_C = \frac{\int_0^\ell (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) \chi_P ds}{\int_0^\ell \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} ds},$$

dove

$$\chi_P(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} s(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2).$$

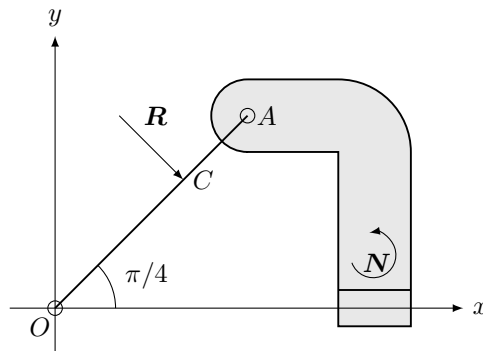
Si ottiene

$$\chi_C = \frac{\frac{\sqrt{2}F}{2\ell^2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \int_0^\ell s^2 ds}{\int_0^\ell \frac{F}{\ell^2} s ds} = \frac{\sqrt{2}}{3} \ell (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2).$$

Si noti che

$$|\chi_C| = \frac{2}{3} \ell,$$

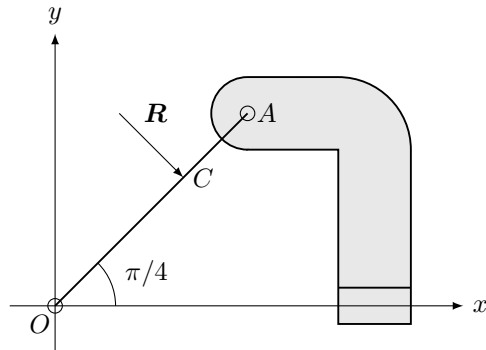
come ci aspettavamo. Sostituiamo da qui in avanti il sistema di forze esterne attive applicate all'asta con il sistem  $\{\mathbf{R}, C\}$ .



ii)

Consideriamo dapprima l'azione della sola forza esterna attiva  $\mathbf{R}$  applicata in  $C$ .

Affinchè sia  $C$  che l'asta singolarmente siano in equilibrio, la forza  $\Phi'$  esercitata dall'asta su  $C$  deve essere diversa da 0. Allora il sistema delle reazioni vincolari



esercitate su  $\mathcal{C}$  dalla guida  $Ox$  attraverso la coppia prismatica è equivalente a  $-\Phi'$  applicata in un punto qualsiasi della retta parallela ad  $Oy$  e passante per  $A$ .

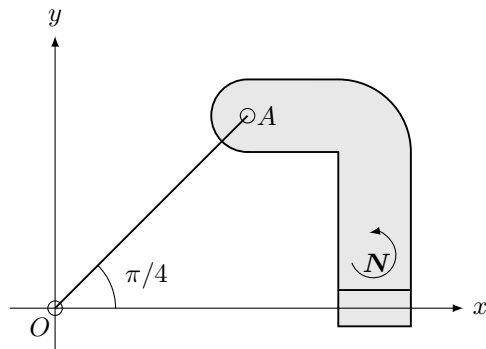
Ragioniamo adesso sull'asta. Su di essa agiscono le forze

$$\begin{aligned} -\Phi' &= -\Phi' e_2, \\ \mathbf{R} &= \frac{\sqrt{2}F}{4}(e_1 - e_2), \\ \Phi'_O &= \Phi'_{O,x} e_1 + \Phi'_{O,y} e_2. \end{aligned}$$

Le tre incognite  $\Phi'$ ,  $\Phi'_{O,x}$ ,  $\Phi'_{O,y}$  si ottengono scrivendo le due equazioni cardinali della statica per l'asta. Si ha

$$\begin{aligned} \Phi' &= -\frac{\sqrt{2}F}{3}e_2, \\ \mathbf{R} &= \frac{\sqrt{2}F}{4}(e_1 - e_2), \\ \Phi'_O &= -\frac{\sqrt{2}F}{4}\left(e_1 + \frac{1}{3}e_2\right). \end{aligned}$$

Prendiamo in considerazione l'azione del solo momento esterno attivo  $N$  applicato a  $\mathcal{C}$ .



Cominciamo dall'asta che è scarica. Affinchè sia in equilibrio le forze che agiscono in  $O$  e in  $A$  devono essere direttamente opposte. Inoltre, affinché  $\mathcal{C}$  sia

in equilibrio, la forza  $\Phi''$  esercitata dall'asta su  $\mathcal{C}$  deve necessariamente essere nulla. Di conseguenza anche la risultante del sistema delle reazioni vincolari esercitate su  $\mathcal{C}$  dalla guida  $Ox$  attraverso la coppia prismatica è nulla. In questo caso si ha

$$\begin{aligned}\Phi'' &= \mathbf{0}, \\ \Phi''_O &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Il sistema delle reazioni vincolari esercitate su  $\mathcal{C}$  dalla guida  $Ox$  è equivalente ad una coppia di momento pari a  $-\mathbf{N}$ .

In definitiva, in  $O$  agisce la reazione

$$\Phi_O = \Phi'_O + \Phi''_O = -\frac{\sqrt{2}F}{4} \left( \mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 \right).$$

La reazione interna esercitata dall'asta su  $\mathcal{C}$  è

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' = -\frac{\sqrt{2}F}{3}\mathbf{e}_2.$$

Per quanto riguarda la coppia prismatica, le reazioni esercitate dalla guida  $Ox$  sono equivalenti ad una coppia  $-\mathbf{N}$  e alla forza

$$-\Phi = \frac{\sqrt{2}F}{3}\mathbf{e}_2$$

applicata in un punto qualunque della retta parallela ad  $Oy$  e passante per  $A$ .



**Compito di Meccanica Razionale**  
**Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale**  
**12 Febbraio 2024**

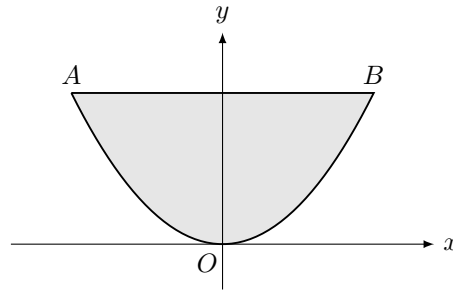
**Primo Esercizio**

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri una lamina omogenea di massa  $m$  costituita dalla regione delimitata dal segmento  $AB$ , con

$$(x_A, y_A) = (-1, 1), \quad (x_B, y_B) = (1, 1)$$

e dalla porzione di parabola

$$y = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$



Indichiamo con  $G$  il baricentro della lamina.

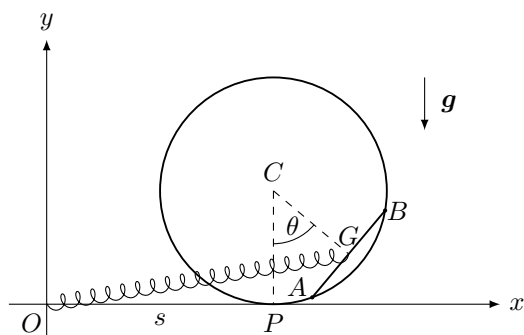
- i) la posizione di  $G$  rispetto ad  $O$ ;
- ii) i momenti di inerzia assiali della lamina rispetto agli assi  $Gx$  e  $Gy$ , paralleli rispettivamente ad  $Ox$  e  $Oy$ , esprimendoli in funzione di  $m$ ;
- iii) la posizione di un punto  $Q$ , tale che qualsiasi asse passante per  $Q$  ed ortogonale ad  $Oz$  sia un asse principale di inerzia per la lamina.

**Secondo Esercizio**

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano verticale  $Oxy$  si consideri un anello omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  che rotola senza strisciare sulla guida  $Ox$ . Gli estremi  $A$  e  $B$  di un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $R$  scivolano sull'anello. Una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro  $G$  dell'asta con l'origine  $O$ . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $\mathbf{g}$  parallela ad  $Oy$  e di modulo uguale a  $g$ . Si assuma che i vincoli siano ideali.

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa  $s$  del punto di contatto  $P$  tra l'anello e la guida  $Ox$  e l'angolo  $\theta$  tra il segmento  $CG$ , con  $C$  baricentro dell'anello, e la direzione verticale.

- i) Scrivere le equazioni pure del moto del sistema utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.
- ii) Assumendo di conoscere una soluzione  $(\theta(t), s(t))$  delle equazioni del moto trovate nel punto i), determinare la reazione vincolare che la guida  $Ox$  esercita sull'anello in  $P$ .



### Terzo Esercizio

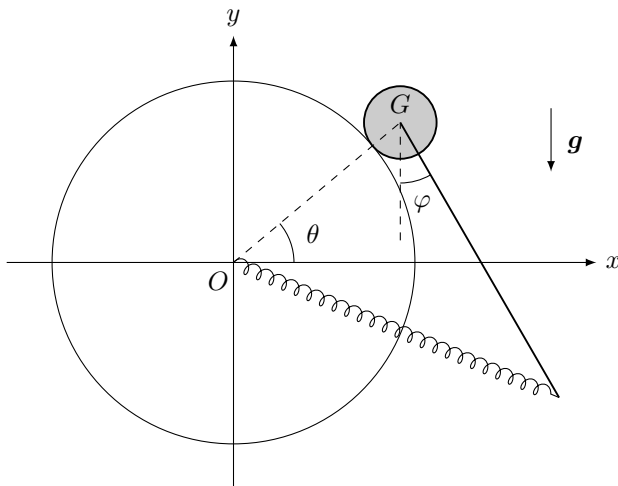
Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano verticale  $Oxy$  si consideri il seguente sistema meccanico. Un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $r$  rotola senza strisciare su una guida circolare fissa di raggio  $R$  e centro in  $O$ . Inoltre, è presente un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  con un estremo vincolato attraverso una coppia rotoidale mobile al baricentro  $G$  del disco. Una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega l'altro estremo dell'asta con l'origine  $O$ . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $\mathbf{g}$  parallela ad  $Oy$  e di modulo uguale a  $g$ . Si assuma che i vincoli siano ideali. Si usino come parametri lagrangiani l'angolo  $\theta$  che il segmento  $GO$  forma con l'asse  $Ox$  e l'angolo  $\varphi$  che l'asta forma con l'asse  $Oy$ .

- i) Scrivere l'energia potenziale delle forze attive applicate al sistema.

Assumendo che

$$m = 2M, \quad \ell = 3(R + r), \quad Mg > 2k(R + r),$$

- ii) determinare le configurazioni di equilibrio del sistema;  
 iii) studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate nel punto ii).



### Soluzione Primo Esercizio

i)

L'area della lamina è data da

$$A = 2 \int_0^1 \int_{x^2}^1 dx dy = \frac{4}{3},$$

da cui

$$\sigma = \frac{3m}{4}.$$

Si ha  $x_G = 0$  e

$$y_G = \frac{\sigma}{m} \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 y dx dy = \frac{3}{5}.$$

ii)

Abbiamo

$$I_{Gy} = I_{Oy} = 2\sigma \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^2 dx dy = \frac{4}{15}\sigma = \frac{m}{5}.$$

Calcoliamo

$$I_{Ox} = 2\sigma \int_0^1 \int_{x^2}^1 y^2 dx dy = \frac{4}{7}\sigma = \frac{3}{7}m,$$

da cui

$$I_{Gx} = I_{Ox} - my_G^2 = \frac{12}{175}m.$$

iii)

Cerco un punto  $Q$  sull'asse  $Oy$  per il quale si abbia

$$I_{Qy} = I_{Qx}.$$

Allora (per un risultato visto) poichè gli assi  $Qx$  e  $Qy$  sono principali di inerzia per la lamina, qualsiasi asse passante per  $Q$  ed ortogonale ad  $Oz$  è un asse principale di inerzia per la lamina. Da

$$I_{Qy} = I_{Oy} = \frac{m}{5}$$

si ha

$$I_{Qx} = \frac{m}{5}.$$

Pongo

$$I_{Qx} = I_{Gx} + md^2,$$

ottenendo

$$d = \sqrt{\frac{I_{Qx} - I_{Gx}}{m}} = \sqrt{\frac{23}{175}}.$$

Allora

$$x_Q = 0, \quad y_Q = y_G + d = \frac{3}{5} + \sqrt{\frac{23}{175}}.$$

### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Notiamo subito che le rette di applicazione delle reazioni vincolari che agiscono in  $A$  e in  $B$  passano per  $C$ . Sia

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

la distanza tra  $C$  e  $G$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}\chi_P &= s\mathbf{e}_1, \\ \chi_C &= s\mathbf{e}_1 + R\mathbf{e}_2, \\ \chi_G &= (s + h \sin \theta)\mathbf{e}_1 + (R - h \cos \theta)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Scriviamo la seconda equazione cardinale dell'asta rispetto a  $C$ :

$$\dot{M}_C = N_C - m\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_G.$$

Otteniamo

$$N_C = (\chi_G - \chi_C) \times (\mathbf{F}_{el} - mg\mathbf{e}_2),$$

con

$$\mathbf{F}_{el} = -k\chi_G.$$

Risulta

$$N_C = -h [(kR + mg) \sin \theta + ks \cos \theta] \mathbf{e}_3.$$

Inoltre

$$m\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_G = mh\dot{s}\theta \sin \theta \mathbf{e}_3.$$

Infine

$$M_C = M_G + m(\chi_G - \chi_C) \times \mathbf{v}_G,$$

con

$$M_G = \frac{mR^2}{12}\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

La prima equazione pura del moto è data da

$$\frac{5}{3}mR\ddot{\theta} + \sqrt{3}m\dot{s}\cos \theta = -\sqrt{3}[(kR + mg) \sin \theta + ks \cos \theta].$$

Scriviamo la seconda equazione cardinale dell'anello rispetto a  $C$ :

$$\dot{M}_C = N_C,$$

con

$$N_C = (\chi_P - \chi_C) \times (\Phi_x\mathbf{e}_1 + \Phi_y\mathbf{e}_2)$$

e

$$M_C = -MR\dot{s}\mathbf{e}_3.$$

Si ottiene

$$\Phi_x = -M\dot{s}. \tag{1}$$

La prima equazione cardinale per l'intero sistema porge

$$M\mathbf{a}_C + m\mathbf{a}_G = \Phi_x\mathbf{e}_1 + \Phi_y\mathbf{e}_2 - (M + m)g\mathbf{e}_2 + \mathbf{F}_{el}.$$

Proiettandola lungo  $\mathbf{e}_1$  ed utilizzando (1) si ottiene la seconda equazione pura del moto:

$$(2M + m)\ddot{s} + \frac{\sqrt{3}}{2}mR(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = -k\left(s + \frac{\sqrt{3}}{2}R \sin \theta\right).$$

iii)

Per la componente  $\Phi_x$  abbiamo già ottenuto l'equazione 1). Per la componente  $\Phi_y$  proiettiamo la prima equazione cardinale per l'intero sistema lungo  $\mathbf{e}_2$  per ottenere

$$\Phi_y = \frac{\sqrt{3}}{2}mR(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + (M + m)g + kR\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta\right).$$

### Soluzione Terzo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Chiamiamo  $A$  l'estremo libero dell'asta. Abbiamo

$$\begin{aligned}\chi_G &= (R+r)(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2), \\ \chi_A &= \chi_G + \ell(\sin\varphi\mathbf{e}_1 - \cos\varphi\mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

L'energia potenziale delle forze attive è data da

$$V(\theta, \varphi) = \frac{k}{2}|\chi_A|^2 - g(M+m)(\chi_G + \chi_A) \cdot \mathbf{e}_2.$$

Risulta

$$\begin{aligned}V(\theta, \varphi) &= \frac{k}{2} [(R+r)^2 + \ell^2 + 2\ell(R+r)\sin(\varphi-\theta)] \\ &\quad + g(M+m)(R+r)\sin\theta - \frac{mg\ell}{2}\cos\varphi.\end{aligned}$$

ii)

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \end{cases}$$

che porta a scrivere

$$\begin{cases} -k(R+r)\cos(\varphi-\theta) + Mg\cos\theta = 0, \\ k(R+r)\cos(\varphi-\theta) + Mg\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ha

$$\cos\theta = -\sin\varphi.$$

Segue che

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} - \theta, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} + \theta. \quad (2)$$

Sostituendo la prima relazione nella prima equazione del sistema si ha

$$\cos\theta [(2k(R+r)\sin\theta + Mg)] = 0,$$

da cui, tenendo conto che  $Mg > 2k(R+r)$ , si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$(\theta_1, \varphi_1) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad (\theta_2, \varphi_2) = \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right).$$

Sostituendo la seconda relazione in (2) nella prima equazione del sistema si ha

$$\cos\theta = 0,$$

da cui si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$(\theta_3, \varphi_3) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (\theta_4, \varphi_4) = \left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right).$$

iii)

Le componenti della matrice  $V''(\theta, \varphi)$  risultano

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} &= -3k(R+r)^2 \sin(\varphi - \theta) - 3Mg(R+r) \sin \theta, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} &= -3k(R+r)^2 \sin(\varphi - \theta) + 3Mg(R+r) \cos \varphi, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} &= 3k(R+r)^2 \sin(\varphi - \theta), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \theta} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi}.\end{aligned}$$

Prima configurazione di equilibrio:

$$V''(\theta_1, \varphi_1) = (R+r) \begin{pmatrix} -3k(R+r) - 3Mg & 3k(R+r) \\ 3k(R+r) & -3k(R+r) - 3Mg \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\begin{aligned}\det V''(\theta_1, \varphi_1) &> 0, \\ \text{tr} V''(\theta_1, \varphi_1) &< 0,\end{aligned}$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Seconda configurazione di equilibrio:

$$V''(\theta_2, \varphi_2) = (R+r) \begin{pmatrix} -3k(R+r) + 3Mg & 3k(R+r) \\ 3k(R+r) & -3k(R+r) + 3Mg \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\begin{aligned}\det V''(\theta_2, \varphi_2) &= 9Mg(R+r)^2 [Mg - 2k(R+r)] > 0, \\ \text{tr} V''(\theta_2, \varphi_2) &= 6(R+r) [Mg - k(R+r)] > 0,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi  $Mg > 2k(R+r)$ , concludiamo che la configurazione di equilibrio è stabile per il criterio di Lagrange-Dirichelet.

Terza configurazione di equilibrio:

$$V''(\theta_3, \varphi_3) = (R+r) \begin{pmatrix} 3k(R+r) - 3Mg & -3k(R+r) \\ -3k(R+r) & 3k(R+r) + 3Mg \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\theta_3, \varphi_3) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Quarta configurazione di equilibrio:

$$V''(\theta_4, \varphi_4) = (R+r) \begin{pmatrix} 3k(R+r) + 3Mg & -3k(R+r) \\ -3k(R+r) & 3k(R+r) - 3Mg \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\theta_4, \varphi_4) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

# Compito di Meccanica Razionale

## Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

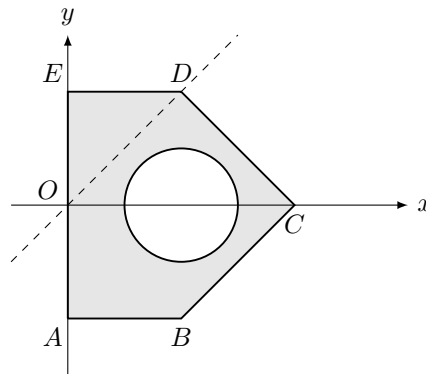
13 Aprile 2024

### Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri una lamina omogenea di massa  $m$  ottenuta rimuovendo dalla regione delimitata dal poligono  $ABCDE$ , con

$$\begin{aligned}(x_A, y_A) &= (0, -1), & (x_B, y_B) &= (1, -1), & (x_C, y_C) &= (2, 0), \\ (x_D, y_D) &= (1, 1), & (x_E, y_E) &= (0, 1),\end{aligned}$$

una porzione delimitata da un cerchio di raggio  $1/2$  e centro nel punto di coordinate  $(1, 0)$ .



Calcolare

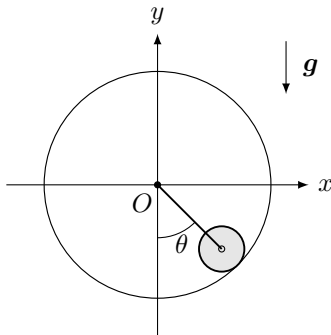
- i) i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi  $Ox$  e  $Oy$ , esprimendoli in funzione di  $m$ ;
- ii) il momento di inerzia della lamina rispetto alla retta passante per i punti  $O$  e  $D$ .

### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano verticale  $Oxy$  si consideri un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $r$  che rotola senza strisciare su una guida circolare fissa di raggio  $R > r$  e centro in  $O$ . L'estremo di un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  è vincolato tramite una coppia rotoidale mobile al baricentro del disco. L'altro estremo dell'asta è vincolato tramite una coppia rotoidale fissa al punto  $O$ . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $\mathbf{g}$  parallela ad  $Oy$  e di modulo uguale a  $g$ . Si assuma che i vincoli siano ideali. Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  tra le direzioni dell'asta e dell'asse  $Oy$ .

- i) Scrivere l'equazione del moto del sistema con le equazioni cardinali della dinamica.



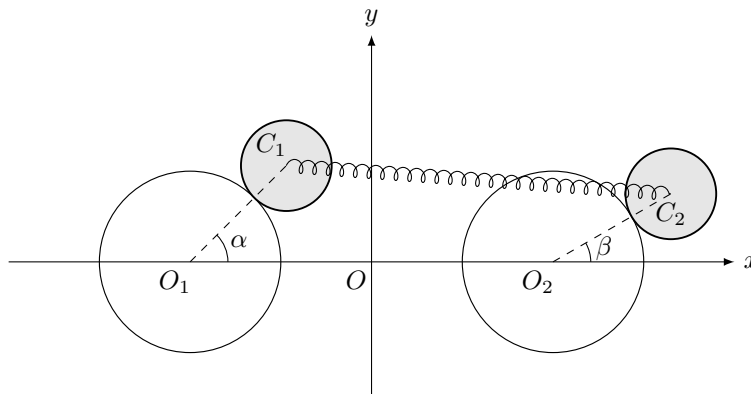


- ii) Scrivere l'equazione del moto del sistema con le equazioni di Lagrange.
- iii) Calcolare l'espressione assunta dalla componente della reazione vincolare tangente alla guida nel punto di contatto con il disco quando  $\theta = 0$ .

### Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri il seguente sistema meccanico. Due dischi di raggio  $R$  e massa  $M$  possono rotolare senza strisciare su due guide circolari fisse di raggio  $2R$  e centro nei punti di coordinate  $O_1 \equiv (-4R, 0)$ ,  $O_2 \equiv (4R, 0)$ . I centri  $C_1, C_2$  dei due dischi sono collegati tra loro da una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Si usino come parametri lagrangiani gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  che i segmenti  $O_1C_1$  e  $O_2C_2$  formano con l'asse  $Ox$ , rispettivamente.

- i) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- ii) Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate nel punto i).
- iii) Scrivere la matrice cinetica del sistema.



### Soluzione Primo Esercizio

i)

Chiamiamo  $\sigma$  la densità. Si ha

$$\sigma = \frac{4m}{12 - \pi}.$$

Calcoliamo  $I_{Ox}$ .

Per la lamina rettangolare  $ABDE$  si ha

$$I_{Ox}^{(1)} = \sigma \int_0^1 \int_{-1}^1 y^2 dx dy = \frac{2}{3} \sigma.$$

Il contributo della lamina triangolare  $BCD$  è metà del contributo della lamina quadrata  $OBCD$  che ha lato pari a  $\sqrt{2}$  e massa pari a  $2\sigma$ , quindi si ha

$$I_{Ox}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{4\sigma}{12} \right) = \frac{\sigma}{6}.$$

Il contributo (da sottrarre) del disco che ha raggio  $1/2$  e massa  $\sigma\pi/4$  è

$$I_{Ox}^{(3)} = \frac{1}{4} \left( \frac{\sigma\pi}{16} \right) = \frac{\sigma\pi}{64}.$$

Risulta

$$I_{Ox} = I_{Ox}^{(1)} + I_{Ox}^{(2)} - I_{Ox}^{(3)} = \frac{\sigma}{2} \left( \frac{5}{3} - \frac{\pi}{32} \right).$$

Dunque

$$I_{Ox} = \frac{2m}{12 - \pi} \left( \frac{5}{3} - \frac{\pi}{32} \right)$$

Calcoliamo  $I_{Oy}$ .

Il contributo della lamina quadrata  $OBCD$  che ha lato pari a  $\sqrt{2}$  e massa pari a  $2\sigma$  è

$$I_{Oy}^{(1)} = \frac{4\sigma}{12} + 2\sigma = \frac{7\sigma}{3}.$$

Il contributo delle due lamine triangolari  $ABO$ ,  $ODE$  è uguale a  $I_{Ox}^{(2)}$

$$I_{Oy}^{(2)} = \frac{\sigma}{6}.$$

Il contributo (da sottrarre) del disco che ha raggio  $1/2$  e massa  $\sigma\pi/4$  è

$$I_{Oy}^{(3)} = \frac{\sigma\pi}{64} + \frac{\sigma\pi}{4} = \frac{17\sigma\pi}{64}.$$

Risulta

$$I_{Oy} = I_{Oy}^{(1)} + I_{Oy}^{(2)} - I_{Oy}^{(3)} = \frac{\sigma}{2} \left( 5 - \frac{17\pi}{32} \right).$$

Dunque

$$I_{Oy} = \frac{2m}{12 - \pi} \left( 5 - \frac{17\pi}{32} \right).$$

ii)

Introduciamo il versore

$$\mathbf{u} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^T.$$

Poichè la matrice di inerzia  $I_O$  diagonale, si ha

$$I = \mathbf{u} \cdot I_O \mathbf{u} = \frac{1}{2}(I_{Ox} + I_{Oy}) = \frac{m}{12 - \pi} \left( \frac{20}{3} - \frac{9\pi}{16} \right).$$

### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Chiamiamo  $G$  il baricentro del disco,  $P$  il punto di contatto tra il disco e l'asta,  $C$  il baricentro dell'asta. Abbiamo

$$\begin{aligned}\chi_G &= \ell(\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2), \\ \chi_C &= \frac{\chi_G}{2}, \\ \mathbf{v}_G &= \ell\dot{\theta}(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

La velocità angolare dell'asta si vede subito essere

$$\boldsymbol{\omega}_a = \dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

Per la velocità angolare del disco usiamo la relazione

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega}_d \times (\chi_G - \chi_P),$$

con  $\boldsymbol{\omega}_d = \omega_d\mathbf{e}_3$  e

$$\chi_P = (\ell + r)(\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2).$$

Si ottiene

$$\boldsymbol{\omega}_d = -\frac{\ell\dot{\theta}}{r}\mathbf{e}_3.$$

Chiamiamo  $\Phi$  la reazione che l'asta esercita sul disco in  $G$  e  $\Phi_t\mathbf{e}_t$  la reazione vincolare in  $P$  tangente alla guida con  $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_3 \times \chi_G/\ell$ .

La seconda equazione cardinale dell'asta rispetto ad  $O$  è

$$\dot{M}_{O,a} = N_{O,a}, \quad (1)$$

con

$$M_{O,a} = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

e

$$N_{O,a} = \chi_C \times (-mge_2) + \chi_G \times (-\Phi).$$

La seconda equazione cardinale del disco rispetto ad  $O$  è

$$\dot{M}_{O,d} = N_{O,d}, \quad (2)$$

con

$$M_{O,d} = M_G + M\chi_G \times \mathbf{v}_G = M\ell\left(\ell - \frac{r}{2}\right)\dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

e

$$N_{O,d} = \chi_G \times (-Mge_2 + \Phi) + \Phi_t(\ell + r)\mathbf{e}_3.$$

Dalla seconda equazione cardinale del disco rispetto ad  $G$ ,

$$\dot{M}_G = \Phi_t r\mathbf{e}_3,$$

troviamo

$$\Phi_t = -\frac{M\ell}{2}\ddot{\theta}, \quad (3)$$

che sostituito nell'equazione per  $N_{O,d}$  consente di scrivere

$$N_{O,d} = \chi_G \times (-Mge_2 + \Phi) - \frac{M\ell(\ell + r)}{2}\ddot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

L'equazione pura del moto si ottiene sommando (1) e (2) e proiettando lungo  $\mathbf{e}_3$ :

$$\left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right) \ell \ddot{\theta} = -g \left(\frac{m}{2} + M\right) \sin \theta. \quad (4)$$

ii)

L'energia cinetica del sistema è data da

$$T = \frac{1}{2} I_{Oz} |\boldsymbol{\omega}_a|^2 + \frac{1}{2} I_{Pz} |\boldsymbol{\omega}_d|^2 = \left(\frac{m}{6} + \frac{3M}{4}\right) \ell^2 \dot{\theta}^2.$$

L'energia potenziale è data da

$$V = mgy_C + Mgy_G = -g\ell \cos \theta \left(\frac{m}{2} + M\right).$$

La lagrangiana è definita da

$$L = T - V,$$

e l'equazione di Lagrange corrispondente è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}.$$

Si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right) \ell^2 \ddot{\theta},$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -g\ell \left(\frac{m}{2} + M\right) \sin \theta.$$

Si ritrova dunque l'equazione (4).

iii)

Dall'equazione (4) vediamo che per  $\theta = 0$  si ha  $\ddot{\theta} = 0$ . Quindi dall'equazione (3) si ha che

$$\Phi_t|_{\theta=0} = 0.$$

### Soluzione Terzo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}\chi_{C_1} &= (-4R + 3R \cos \alpha)\mathbf{e}_1 + 3R \sin \alpha \mathbf{e}_2, \\ \chi_{C_2} &= (4R + 3R \cos \beta)\mathbf{e}_1 + 3R \sin \beta \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

L'energia potenziale delle forze attive è data da

$$V(\alpha, \beta) = \frac{k}{2} |\chi_{C_1} - \chi_{C_2}|^2.$$

Trascurando i termini additivi costanti si ha

$$V(\alpha, \beta) = kR^2 [24(\cos \beta - \cos \alpha) - 9 \cos(\alpha - \beta)].$$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

che porta a scrivere

$$\begin{cases} kR^2 [24 \sin \alpha + 9 \sin(\alpha - \beta)] = 0, \\ kR^2 [-24 \sin \beta - 9 \sin(\alpha - \beta)] = 0. \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ha

$$\sin \alpha = \sin \beta.$$

Segue che

$$\alpha = \beta, \quad \alpha = \pi - \beta. \quad (5)$$

Sostituendo la prima relazione nella seconda equazione del sistema si ha

$$\sin \beta = 0,$$

da cui si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$(\alpha_1, \beta_1) = (0, 0), \quad (\alpha_2, \beta_2) = (\pi, \pi).$$

Sostituendo la seconda relazione in (5) nella seconda equazione del sistema si ha

$$\sin \beta (4 + 3 \cos \beta) = 0,$$

da cui si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$(\alpha_3, \beta_3) = (\pi, 0), \quad (\alpha_4, \beta_4) = (\pi, 0).$$

ii)

Le componenti della matrice  $V''(\alpha, \beta)$  risultano

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} &= kR^2 [24 \cos \alpha + 9 \cos(\alpha - \beta)], \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} &= kR^2 [-24 \cos \beta + 9 \cos(\alpha - \beta)], \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta} &= -9kR^2 \cos(\alpha - \beta), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \beta \partial \alpha} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta}.\end{aligned}$$

Prima configurazione di equilibrio:

$$V''(\alpha_1, \beta_1) = kR^2 \begin{pmatrix} 33 & -9 \\ -9 & -15 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\alpha_1, \beta_1) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Seconda configurazione di equilibrio:

$$V''(\alpha_2, \beta_2) = kR^2 \begin{pmatrix} -15 & -9 \\ -9 & 33 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\alpha_2, \beta_2) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Terza configurazione di equilibrio:

$$V''(\alpha_3, \beta_3) = kR^2 \begin{pmatrix} -33 & 9 \\ 9 & -33 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\alpha_3, \beta_3) > 0,$$

$$\text{tr } V''(\alpha_3, \beta_3) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Quarta configurazione di equilibrio:

$$V''(\alpha_4, \beta_4) = kR^2 \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\alpha_4, \beta_4) > 0,$$

$$\text{tr } V''(\alpha_4, \beta_4) > 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

iii)

Chiamiamo  $P_1$  e  $P_2$  i punti di contatto dei dischi con le guide. Si ha

$$\begin{aligned}\chi_{P_1} &= (-4R + 2R \cos \alpha)\mathbf{e}_1 + 2R \sin \alpha \mathbf{e}_2, \\ \chi_{P_2} &= (4R + 2R \cos \beta)\mathbf{e}_1 + 2R \sin \beta \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Le velocità angolari dei due dischi possono essere calcolate dalla formula

$$\mathbf{v}_{C_i} = \mathbf{v}_{P_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\chi_{C_i} - \chi_{P_i}), \quad i = 1, 2,$$

con  $\mathbf{v}_{P_1} = \mathbf{v}_{P_2} = \mathbf{0}$ . Si ottiene

$$\boldsymbol{\omega}_1 = 3\dot{\alpha}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = 3\dot{\beta}.$$

L'energia cinetica del sistema può essere calcolata come segue:

$$T = \frac{1}{2}I_{P_1z}|\boldsymbol{\omega}_1|^2 + \frac{1}{2}I_{P_2z}|\boldsymbol{\omega}_2|^2,$$

con

$$I_{P_1z} = I_{P_2z} = \frac{3}{2}MR^2.$$

In definitiva la matrice cinetica risulta

$$A = \frac{27}{2}MR^2 \begin{pmatrix} \dot{\alpha}^2 & 0 \\ 0 & \dot{\beta}^2 \end{pmatrix}.$$



# Compito di Meccanica Razionale

## Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

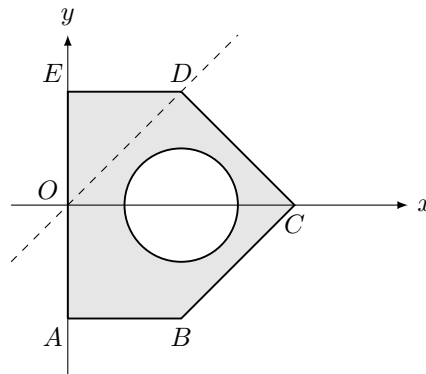
13 Aprile 2024

### Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri una lamina omogenea di massa  $m$  ottenuta rimuovendo dalla regione delimitata dal poligono  $ABCDE$ , con

$$\begin{aligned}(x_A, y_A) &= (0, -1), & (x_B, y_B) &= (1, -1), & (x_C, y_C) &= (2, 0), \\ (x_D, y_D) &= (1, 1), & (x_E, y_E) &= (0, 1),\end{aligned}$$

una porzione delimitata da un cerchio di raggio  $1/2$  e centro nel punto di coordinate  $(1, 0)$ .



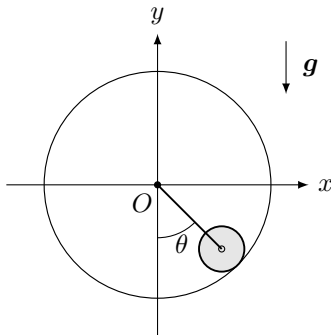
Calcolare

- i) i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi  $Ox$  e  $Oy$ , esprimendoli in funzione di  $m$ ;
- ii) il momento di inerzia della lamina rispetto alla retta passante per i punti  $O$  e  $D$ .

### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano verticale  $Oxy$  si consideri un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $r$  che rotola senza strisciare su una guida circolare fissa di raggio  $R > r$  e centro in  $O$ . L'estremo di un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  è vincolato tramite una coppia rotoidale mobile al baricentro del disco. L'altro estremo dell'asta è vincolato tramite una coppia rotoidale fissa al punto  $O$ . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $\mathbf{g}$  parallela ad  $Oy$  e di modulo uguale a  $g$ . Si assuma che i vincoli siano ideali. Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  tra le direzioni dell'asta e dell'asse  $Oy$ .

- i) Scrivere l'equazione del moto del sistema con le equazioni cardinali della dinamica.

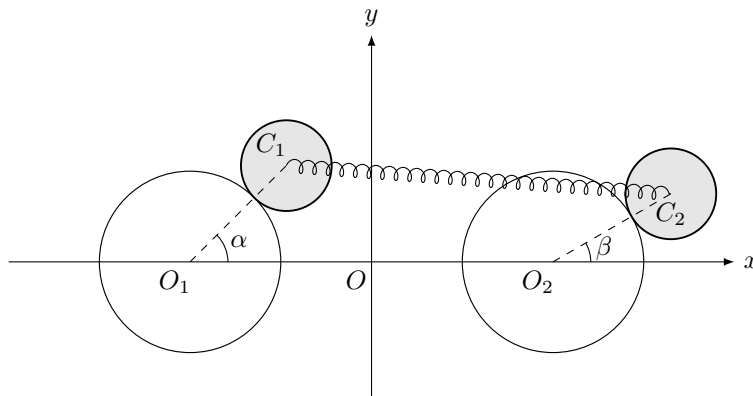


- ii) Scrivere l'equazione del moto del sistema con le equazioni di Lagrange.
- iii) Calcolare l'espressione assunta dalla componente della reazione vincolare tangente alla guida nel punto di contatto con il disco quando  $\theta = 0$ .

### Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri il seguente sistema meccanico. Due dischi di raggio  $R$  e massa  $M$  possono rotolare senza strisciare su due guide circolari fisse di raggio  $2R$  e centro nei punti di coordinate  $O_1 \equiv (-4R, 0)$ ,  $O_2 \equiv (4R, 0)$ . I centri  $C_1, C_2$  dei due dischi sono collegati tra loro da una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Si usino come parametri lagrangiani gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  che i segmenti  $O_1C_1$  e  $O_2C_2$  formano con l'asse  $Ox$ , rispettivamente.

- i) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- ii) Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate nel punto i).
- iii) Scrivere la matrice cinetica del sistema.



### Soluzione Primo Esercizio

i)

Chiamiamo  $\sigma$  la densità. Si ha

$$\sigma = \frac{4m}{12 - \pi}.$$

Calcoliamo  $I_{Ox}$ .

Per la lamina rettangolare  $ABDE$  si ha

$$I_{Ox}^{(1)} = \sigma \int_0^1 \int_{-1}^1 y^2 dx dy = \frac{2}{3} \sigma.$$

Il contributo della lamina triangolare  $BCD$  è metà del contributo della lamina quadrata  $OBCD$  che ha lato pari a  $\sqrt{2}$  e massa pari a  $2\sigma$ , quindi si ha

$$I_{Ox}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{4\sigma}{12} \right) = \frac{\sigma}{6}.$$

Il contributo (da sottrarre) del disco che ha raggio  $1/2$  e massa  $\sigma\pi/4$  è

$$I_{Ox}^{(3)} = \frac{1}{4} \left( \frac{\sigma\pi}{16} \right) = \frac{\sigma\pi}{64}.$$

Risulta

$$I_{Ox} = I_{Ox}^{(1)} + I_{Ox}^{(2)} - I_{Ox}^{(3)} = \frac{\sigma}{2} \left( \frac{5}{3} - \frac{\pi}{32} \right).$$

Dunque

$$I_{Ox} = \frac{2m}{12 - \pi} \left( \frac{5}{3} - \frac{\pi}{32} \right)$$

Calcoliamo  $I_{Oy}$ .

Il contributo della lamina quadrata  $OBCD$  che ha lato pari a  $\sqrt{2}$  e massa pari a  $2\sigma$  è

$$I_{Oy}^{(1)} = \frac{4\sigma}{12} + 2\sigma = \frac{7\sigma}{3}.$$

Il contributo delle due lamine triangolari  $ABO$ ,  $ODE$  è uguale a  $I_{Ox}^{(2)}$

$$I_{Oy}^{(2)} = \frac{\sigma}{6}.$$

Il contributo (da sottrarre) del disco che ha raggio  $1/2$  e massa  $\sigma\pi/4$  è

$$I_{Oy}^{(3)} = \frac{\sigma\pi}{64} + \frac{\sigma\pi}{4} = \frac{17\sigma\pi}{64}.$$

Risulta

$$I_{Oy} = I_{Oy}^{(1)} + I_{Oy}^{(2)} - I_{Oy}^{(3)} = \frac{\sigma}{2} \left( 5 - \frac{17\pi}{32} \right).$$

Dunque

$$I_{Oy} = \frac{2m}{12 - \pi} \left( 5 - \frac{17\pi}{32} \right).$$

ii)

Introduciamo il versore

$$\mathbf{u} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^T.$$

Poichè la matrice di inerzia  $I_O$  è diagonale, si ha

$$I = \mathbf{u} \cdot I_O \mathbf{u} = \frac{1}{2}(I_{Ox} + I_{Oy}) = \frac{m}{12 - \pi} \left( \frac{20}{3} - \frac{9\pi}{16} \right).$$

### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Chiamiamo  $G$  il baricentro del disco,  $P$  il punto di contatto tra il disco e l'asta,  $C$  il baricentro dell'asta. Abbiamo

$$\begin{aligned}\chi_G &= \ell(\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2), \\ \chi_C &= \frac{\chi_G}{2}, \\ \mathbf{v}_G &= \ell\dot{\theta}(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

La velocità angolare dell'asta si vede subito essere

$$\boldsymbol{\omega}_a = \dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

Per la velocità angolare del disco usiamo la relazione

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega}_d \times (\chi_G - \chi_P),$$

con  $\boldsymbol{\omega}_d = \omega_d\mathbf{e}_3$  e

$$\chi_P = (\ell + r)(\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2).$$

Si ottiene

$$\boldsymbol{\omega}_d = -\frac{\ell\dot{\theta}}{r}\mathbf{e}_3.$$

Chiamiamo  $\Phi$  la reazione che l'asta esercita sul disco in  $G$  e  $\Phi_t\mathbf{e}_t$  la reazione vincolare in  $P$  tangente alla guida con  $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_3 \times \chi_G/\ell$ .

La seconda equazione cardinale dell'asta rispetto ad  $O$  è

$$\dot{M}_{O,a} = N_{O,a}, \quad (1)$$

con

$$M_{O,a} = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

e

$$N_{O,a} = \chi_C \times (-mge_2) + \chi_G \times (-\Phi).$$

La seconda equazione cardinale del disco rispetto ad  $O$  è

$$\dot{M}_{O,d} = N_{O,d}, \quad (2)$$

con

$$M_{O,d} = M_G + M\chi_G \times \mathbf{v}_G = M\ell\left(\ell - \frac{r}{2}\right)\dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

e

$$N_{O,d} = \chi_G \times (-Mge_2 + \Phi) + \Phi_t(\ell + r)\mathbf{e}_3.$$

Dalla seconda equazione cardinale del disco rispetto ad  $G$ ,

$$\dot{M}_G = \Phi_t r\mathbf{e}_3,$$

troviamo

$$\Phi_t = -\frac{M\ell}{2}\ddot{\theta}, \quad (3)$$

che sostituito nell'equazione per  $N_{O,d}$  consente di scrivere

$$N_{O,d} = \chi_G \times (-Mge_2 + \Phi) - \frac{M\ell(\ell + r)}{2}\ddot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

L'equazione pura del moto si ottiene sommando (1) e (2) e proiettando lungo  $\mathbf{e}_3$ :

$$\left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right) \ell \ddot{\theta} = -g \left(\frac{m}{2} + M\right) \sin \theta. \quad (4)$$

ii)

L'energia cinetica del sistema è data da

$$T = \frac{1}{2} I_{Oz} |\boldsymbol{\omega}_a|^2 + \frac{1}{2} I_{Pz} |\boldsymbol{\omega}_d|^2 = \left(\frac{m}{6} + \frac{3M}{4}\right) \ell^2 \dot{\theta}^2.$$

L'energia potenziale è data da

$$V = mgy_C + Mgy_G = -g\ell \cos \theta \left(\frac{m}{2} + M\right).$$

La lagrangiana è definita da

$$L = T - V,$$

e l'equazione di Lagrange corrispondente è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}.$$

Si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right) \ell^2 \ddot{\theta},$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -g\ell \left(\frac{m}{2} + M\right) \sin \theta.$$

Si ritrova dunque l'equazione (4).

iii)

Dall'equazione (4) vediamo che per  $\theta = 0$  si ha  $\ddot{\theta} = 0$ . Quindi dall'equazione (3) si ha che

$$\Phi_t|_{\theta=0} = 0.$$

### Soluzione Terzo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}\chi_{C_1} &= (-4R + 3R \cos \alpha)\mathbf{e}_1 + 3R \sin \alpha \mathbf{e}_2, \\ \chi_{C_2} &= (4R + 3R \cos \beta)\mathbf{e}_1 + 3R \sin \beta \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

L'energia potenziale delle forze attive è data da

$$V(\alpha, \beta) = \frac{k}{2} |\chi_{C_1} - \chi_{C_2}|^2.$$

Trascurando i termini additivi costanti si ha

$$V(\alpha, \beta) = kR^2 [24(\cos \beta - \cos \alpha) - 9 \cos(\alpha - \beta)].$$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

che porta a scrivere

$$\begin{cases} kR^2 [24 \sin \alpha + 9 \sin(\alpha - \beta)] = 0, \\ kR^2 [-24 \sin \beta - 9 \sin(\alpha - \beta)] = 0. \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ha

$$\sin \alpha = \sin \beta.$$

Segue che

$$\alpha = \beta, \quad \alpha = \pi - \beta. \quad (5)$$

Sostituendo la prima relazione nella seconda equazione del sistema si ha

$$\sin \beta = 0,$$

da cui si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$(\alpha_1, \beta_1) = (0, 0), \quad (\alpha_2, \beta_2) = (\pi, \pi).$$

Sostituendo la seconda relazione in (5) nella seconda equazione del sistema si ha

$$\sin \beta (4 + 3 \cos \beta) = 0,$$

da cui si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$(\alpha_3, \beta_3) = (\pi, 0), \quad (\alpha_4, \beta_4) = (0, \pi).$$

ii)

Le componenti della matrice  $V''(\alpha, \beta)$  risultano

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} &= kR^2 [24 \cos \alpha + 9 \cos(\alpha - \beta)], \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} &= kR^2 [-24 \cos \beta + 9 \cos(\alpha - \beta)], \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta} &= -9kR^2 \cos(\alpha - \beta), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \beta \partial \alpha} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta}.\end{aligned}$$

Prima configurazione di equilibrio:

$$V''(\alpha_1, \beta_1) = kR^2 \begin{pmatrix} 33 & -9 \\ -9 & -15 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\alpha_1, \beta_1) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Seconda configurazione di equilibrio:

$$V''(\alpha_2, \beta_2) = kR^2 \begin{pmatrix} -15 & -9 \\ -9 & 33 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\alpha_2, \beta_2) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Terza configurazione di equilibrio:

$$V''(\alpha_3, \beta_3) = kR^2 \begin{pmatrix} -33 & 9 \\ 9 & -33 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\alpha_3, \beta_3) > 0,$$

$$\text{tr } V''(\alpha_3, \beta_3) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Quarta configurazione di equilibrio:

$$V''(\alpha_4, \beta_4) = kR^2 \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\alpha_4, \beta_4) > 0,$$

$$\text{tr } V''(\alpha_4, \beta_4) > 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.



iii)

Chiamiamo  $P_1$  e  $P_2$  i punti di contatto dei dischi con le guide. Si ha

$$\begin{aligned}\chi_{P_1} &= (-4R + 2R \cos \alpha)\mathbf{e}_1 + 2R \sin \alpha \mathbf{e}_2, \\ \chi_{P_2} &= (4R + 2R \cos \beta)\mathbf{e}_1 + 2R \sin \beta \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Le velocità angolari dei due dischi possono essere calcolate dalla formula

$$\mathbf{v}_{C_i} = \mathbf{v}_{P_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\chi_{C_i} - \chi_{P_i}), \quad i = 1, 2,$$

con  $\mathbf{v}_{P_1} = \mathbf{v}_{P_2} = \mathbf{0}$ . Si ottiene

$$\boldsymbol{\omega}_1 = 3\dot{\alpha}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = 3\dot{\beta}.$$

L'energia cinetica del sistema può essere calcolata come segue:

$$T = \frac{1}{2}I_{P_1z}|\boldsymbol{\omega}_1|^2 + \frac{1}{2}I_{P_2z}|\boldsymbol{\omega}_2|^2,$$

con

$$I_{P_1z} = I_{P_2z} = \frac{3}{2}MR^2.$$

In definitiva la matrice cinetica risulta

$$A = \frac{27}{2}MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$