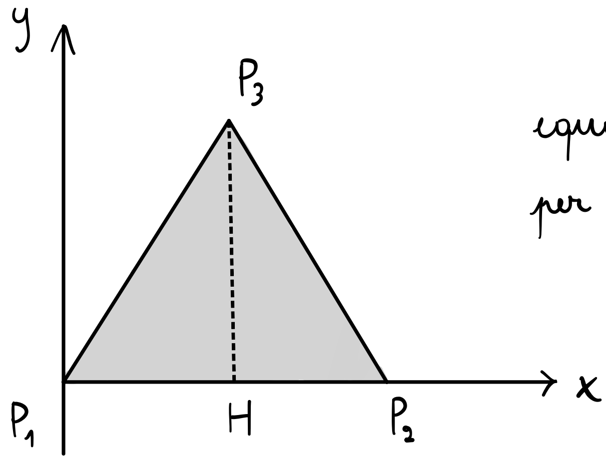
Calcolo del baricentro di una lamina triangolare equilatera omogenea



equazione della retta per P_1 e P_3

$$y = \sqrt{3}x$$

Coordinata x del baricentro

Consideriamo la porzione di lamina triangolare P_1HP_3. Chiamiamo B' il suo baricentro ed m' la sua massa

$$x_{B'} = \frac{1}{m'}\int_0^{l/2}\int_0^{\sqrt{3}x} \mu x \, dx\, dy = \frac{1}{m'}\int_0^{l/2} \mu x \left(\int_0^{\sqrt{3}x} dy\right) dx$$

$$= \frac{1}{m'}\int_0^{l/2} \mu \sqrt{3} x^2 \, dx = \frac{\sqrt{3}\mu}{m'} \frac{1}{3} \frac{l^3}{8} = \frac{\sqrt{3}\mu l^3}{24 m'}$$

$$\text{dove} \quad \mu = \frac{m'}{\frac{l}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}l\frac{1}{2}} = \frac{8m'}{\sqrt{3}l^2}$$

Risulta $x_{B'} = \frac{\ell}{3}$

Indicando con B'' il baricentro di P_3HP_2 si ha subito

$$x_{B''} = \ell - \frac{\ell}{3} = \frac{2}{3}\ell$$

Per il baricentro B della lamina si ottiene

$$x_B = \frac{1}{m}\left(m' x_{B'} + m'' x_{B''}\right) = \frac{\ell}{2}$$

con $m' = m'' = \frac{m}{2}$

<u>Coordinata y del baricentro</u>

Considериamo la porzione di lamina triangolare P_1HP_3

$$y_{B'} = \frac{1}{m'}\int_0^{\ell/2}\int_0^{\sqrt{3}x} \mu y \, dx\, dy = \frac{1}{m'}\int_0^{\ell/2}\mu\left(\int_0^{\sqrt{3}x} y\, dy\right)dx$$

$$= \frac{1}{m'}\int_0^{\ell/2}\mu\,\frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{3\mu}{2m'}\,\frac{1}{3}\,\frac{\ell^3}{8} = \frac{\mu\ell^3}{16\,m'}$$

dove $\mu = \frac{8m'}{\sqrt{3}\,l^2}$

Risulta $y_{B'} = \frac{\sqrt{3}\,l}{6}$

Si ha subito

$$x_{B''} = y_{B''} = \frac{\sqrt{3}\,l}{6}$$

Per il baricentro B della lamina si ottiene

$$y_B = \frac{1}{m}\left(m' y_{B'} + m'' y_{B''}\right) = \frac{\sqrt{3}\,l}{6}$$

Le coordinate di B sono

$$x_B = \frac{l}{2}, \quad y_B = \frac{\sqrt{3}\,l}{6}$$