

# Compito di Meccanica Razionale

## Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

### 8 Gennaio 2024

#### Primo Esercizio

Si consideri un punto materiale  $P$  di massa unitaria ( $m = 1$ ) libero di muoversi in un campo di forze centrali dato da

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

dove  $\rho = |\mathbf{x}| > 0$  e

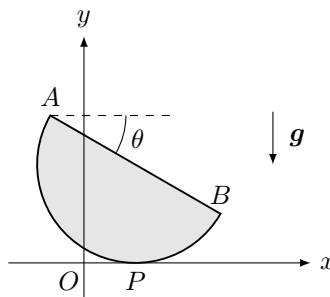
$$f(\rho) = -(\rho - 1)^2 \log \rho.$$

Assumendo che il momento angolare di  $P$  rispetto al centro delle forze sia diverso da zero,

- i) scrivere esplicitamente l'espressione dell'energia potenziale  $V(\rho)$ ;
- ii) disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate  $\rho, \dot{\rho}$ ;
- iii) dimostrare che il valore minimo che può assumere l'energia totale è minore del valore assunto dall'energia potenziale efficace per  $\rho = 1$ , cioè del valore  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(1)$ .

#### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano verticale  $Oxy$  si consideri un semidisco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $r$  che rotola senza strisciare sulla guida  $Ox$ . Introduciamo l'angolo  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  tra la direzione di  $Ox$  e la direzione della retta passante per i punti  $A$  e  $B$ . Si assuma che all'istante iniziale  $t = 0$  si abbia  $\theta = 0$  e che il punto di contatto  $P$  del semidisco con  $Ox$  coincida con  $O$ . L'angolo  $\theta$  aumenta in corrispondenza ad un rotolamento orario (rispetto ad  $Oz$ ) del semidisco. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $\mathbf{g}$  parallela ad  $Oy$  e di modulo uguale a  $g$ .



Si utilizzi  $\theta$  per descrivere il moto.

- i) Calcolare la posizione del baricentro del semidisco in funzione di  $\theta$ .
- ii) Scrivere l'equazione pura del moto del semidisco utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.

- iii) Assumendo di conoscere la soluzione  $\theta(t)$  dell'equazione del moto trovata nel punto ii), date le condizioni iniziali  $\theta(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) \neq 0$ , scrivere le componenti  $\Phi_x(t)$ ,  $\Phi_y(t)$  della reazione vincolare che la guida  $Ox$  esercita sul semidisco.

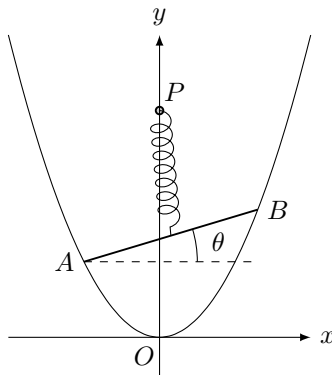
### Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano orizzontale  $Oxy$  si consideri il seguente sistema meccanico. Gli estremi  $A$  e  $B$  di un'asta di lunghezza  $\ell$  e massa  $m$  possono muoversi lungo una guida parabolica di equazione

$$y = \frac{x^2}{\ell}.$$

Il punto medio del segmento  $AB$  è collegato tramite una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla ad un punto materiale  $P$  di massa  $M$  che può muoversi lungo l'asse  $Oy$ . Sul sistema non agisce la forza di gravità. Si utilizzino come coordinate lagrangiane l'ordinata  $y$  di  $P$  e l'angolo  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  tra l'asse  $Ox$  e la direzione della retta passante per i punti  $A$ ,  $B$ . L'angolo  $\theta$  aumenta in corrispondenza ad una rotazione antioraria (rispetto ad  $Oz$ ) dell'asta.

- i) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- ii) Discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate.



### Soluzione Primo Esercizio

i)

L'energia potenziale è data da

$$V(\rho) = - \int f(\rho) d\rho = \int (\rho - 1)^2 \log \rho d\rho,$$

che si può risolvere per parti, ottenendo

$$V(\rho) = \left( \frac{\rho^3}{3} + \rho - \rho^2 \right) \log \rho - \frac{\rho^3}{9} - \rho + \frac{\rho^2}{2}.$$

ii)

Introduciamo l'energia potenziale efficace

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)} = \left( \frac{\rho^3}{3} + \rho - \rho^2 \right) \log \rho - \frac{\rho^3}{9} - \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{c^2}{2\rho^2}.$$

Notando che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^\alpha \log \rho = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

troviamo

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = +\infty.$$

Cerchiamo i punti critici di  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)$ . Da

$$\frac{d\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}}{d\rho} = (\rho - 1)^2 \log \rho - \frac{c^2}{\rho^3} = 0,$$

si ha

$$\log \rho = \frac{c^2}{\rho^3(\rho - 1)^2}.$$

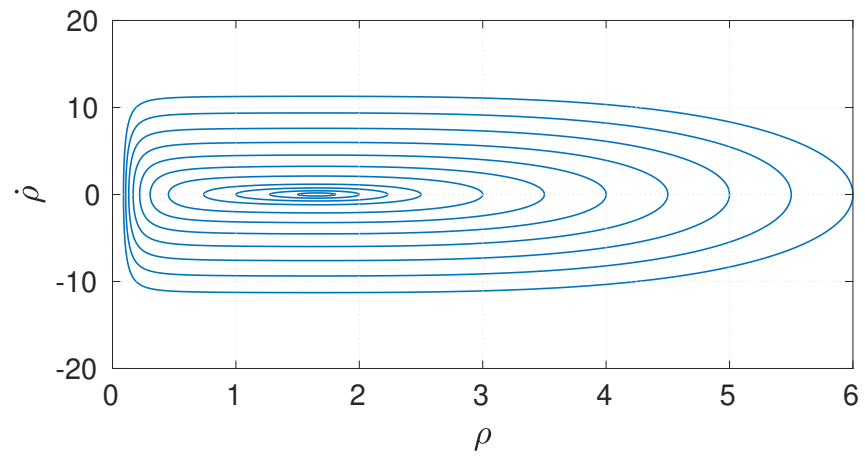
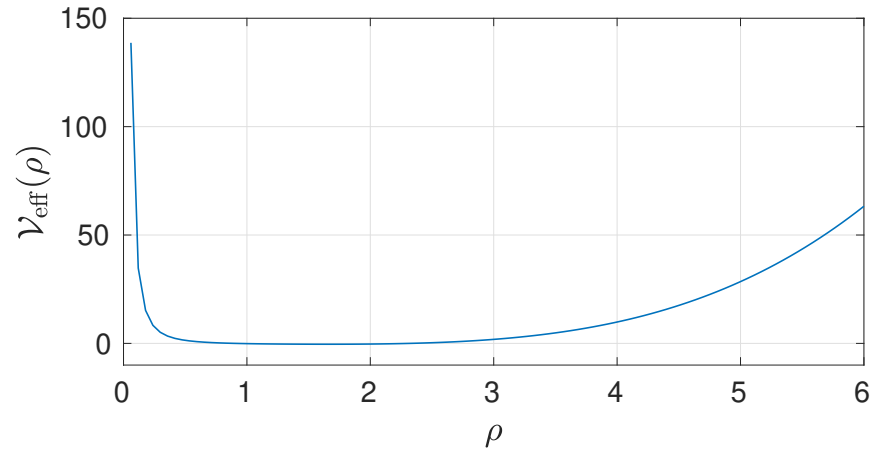
Si può mostrare che esiste un unico valore reale  $\bar{\rho}$  di  $\rho$  che soddisfa questa equazione. Inoltre  $\bar{\rho} > 1$ . Il grafico di  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)$  ed il ritratto di fase richiesto sono mostrati nelle due figure riportate nella pagina seguente.

ii)

Dal grafico di  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho)$  e da  $\bar{\rho} > 1$  si ha

$$h_{\min} = \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\bar{\rho}) < \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(1),$$

dove  $h_{\min}$  è il valore minimo che può assumere l'energia totale.



### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

Si può prima calcolare la distanza  $h$  del baricentro  $G$  dal punto medio  $C$  del segmento  $AB$ :

$$h = \frac{1}{m} \int_0^\pi \int_0^r \sigma \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta = \frac{4r}{3\pi},$$

con  $\sigma = \frac{2m}{\pi r^2}$ . Dunque si ha

$$\chi_G = \chi_C - h \sin \theta \mathbf{e}_1 - h \cos \theta \mathbf{e}_2,$$

con

$$\chi_C = \chi_P + r \mathbf{e}_2$$

e

$$\chi_P = r \theta \mathbf{e}_1.$$

Risulta

$$\chi_G = (r\theta - h \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (r - h \cos \theta) \mathbf{e}_2.$$

ii)

L'equazione pura del moto del semidisco si ottiene dalla seconda equazione cardinale della dinamica rispetto al punto di contatto  $P$ :

$$\dot{\mathbf{M}}_P = \mathbf{N}_P - m \mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_G. \quad (1)$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G &= \dot{\theta} [(r - h \cos \theta) \mathbf{e}_1 + h \sin \theta \mathbf{e}_2], \\ \mathbf{v}_P &= r \dot{\theta} \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{N}_P &= mgh \sin \theta \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Dunque

$$\mathbf{N}_P - m \mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_G = mh(g - r\dot{\theta}^2) \sin \theta \mathbf{e}_3.$$

Notando che  $P$  è il centro istantaneo di rotazione del semidisco e che la sua velocità angolare è

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_3,$$

possiamo scrivere

$$\mathbf{M}_P = I_{P,z} \boldsymbol{\omega} = -I_{P,z} \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

Il momento di inerzia  $I_{P,z}$  si può calcolare come segue:

$$I_{P,z} = I_{G,z} + m |\chi_G - \chi_P|^2,$$

con

$$I_{G,z} = I_{C,z} - mh^2 = m \left( \frac{r^2}{2} - h^2 \right).$$

Risulta

$$I_{P,z} = mr \left( \frac{3}{2} r - 2h \cos \theta \right).$$

Allora

$$\mathbf{M}_P = -mr \dot{\theta} \left( \frac{3}{2} r - 2h \cos \theta \right) \mathbf{e}_3$$

e

$$\dot{\mathbf{M}}_P = -mr \left[ \left( \frac{3}{2}r - 2h \cos \theta \right) \ddot{\theta} + 2h\dot{\theta}^2 \sin \theta \right] \mathbf{e}_3.$$

Proiettando l'equazione (1) lungo  $\mathbf{e}_3$  e dividendo entrambi i membri per  $-mr^2$  si ha infine l'equazione pura del moto

$$\left( \frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \cos \theta \right) \ddot{\theta} + \frac{4}{3\pi} \left( \dot{\theta}^2 + \frac{g}{r} \right) \sin \theta = 0.$$

iii)

Proiettando la prima equazione cardinale della dinamica

$$m\mathbf{a}_G = -mge_2 + \Phi,$$

con  $\Phi = \Phi_x \mathbf{e}_1 + \Phi_y \mathbf{e}_2$ , lungo  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \Phi_x &= m \left[ \ddot{\theta}(r - h \cos \theta) + \dot{\theta}^2 h \sin \theta \right], \\ \Phi_y &= m \left[ h(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + g \right], \end{aligned}$$

dove per semplicità abbiamo ommesso la dipendenza dal tempo e lasciato  $h$ .

### Soluzione Terzo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

Le posizioni di  $A, B$  sono date da

$$\boldsymbol{\chi}_A = x_A \mathbf{e}_1 + \frac{x_A^2}{\ell} \mathbf{e}_2,$$

$$\boldsymbol{\chi}_B = x_B \mathbf{e}_1 + \frac{x_B^2}{\ell} \mathbf{e}_2.$$

Inoltre

$$x_B = x_A + \ell \cos \theta,$$

$$x_B^2 = x_A^2 + \ell^2 \sin \theta,$$

da cui si trova

$$x_A = \frac{\ell}{2}(\tan \theta - \cos \theta).$$

Grazie a quest'ultima relazione riusciamo a scrivere le coordinate di  $A$  e  $B$  in funzione di  $\theta$ . Chiamiamo  $C$  il punto medio del segmento  $AB$ . Si ha

$$\boldsymbol{\chi}_C = \frac{\ell}{4} [2 \tan \theta \mathbf{e}_1 + (\tan^2 \theta + \cos^2 \theta) \mathbf{e}_2].$$

Introduciamo anche la posizione di  $P$ :

$$\boldsymbol{\chi}_P = y \mathbf{e}_2.$$

L'energia potenziale delle forze attive risulta

$$\begin{aligned} V(\theta, y) &= \frac{k}{2} |\boldsymbol{\chi}_P - \boldsymbol{\chi}_C|^2 \\ &= \frac{k}{2} \left( \frac{\ell}{2} \tan \theta \right)^2 + \frac{k}{2} \left( \frac{\ell}{4} (\tan^2 \theta + \cos^2 \theta) - y \right)^2. \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio sono soluzioni del sistema

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{k\ell}{2} \left[ \frac{\ell \tan \theta}{2 \cos^2 \theta} + \left( \frac{\ell}{4} (\tan^2 \theta + \cos^2 \theta) - y \right) \left( \frac{\tan \theta}{\cos^2 \theta} - \cos \theta \sin \theta \right) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -k \left( \frac{\ell}{4} (\tan^2 \theta + \cos^2 \theta) - y \right) = 0.$$

Questo sistema ammette l'unica soluzione

$$(\bar{\theta}, \bar{y}) = \left( 0, \frac{\ell}{4} \right),$$

che è l'unica configurazione di equilibrio.

ii)

Per discutere la stabilità di  $(\bar{\theta}, \bar{y})$  ci interessa calcolare la matrice hessiana  $V''(\bar{\theta}, \bar{y})$ . Si ha

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 \theta}(\bar{\theta}, \bar{y}) = \frac{k\ell^2}{4},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 y}(\bar{\theta}, \bar{y}) = k,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial y}(\bar{\theta}, \bar{y}) = 0.$$

Per il teorema di Lagrange-Dirichlet possiamo affermare che la configurazione di equilibrio  $(\tilde{\theta}, \tilde{y})$  è stabile.



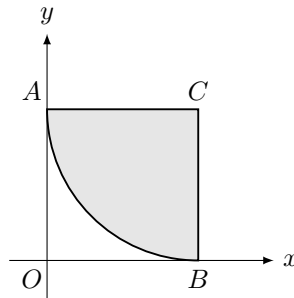
# Compito di Meccanica Razionale

## Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

25 Gennaio 2024

### Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri un quarto di disco omogeneo di massa  $m$  con centro nel punto  $C \equiv (R, R)$ . Inoltre abbiamo  $A \equiv (0, R)$ ,  $B \equiv (R, 0)$ .



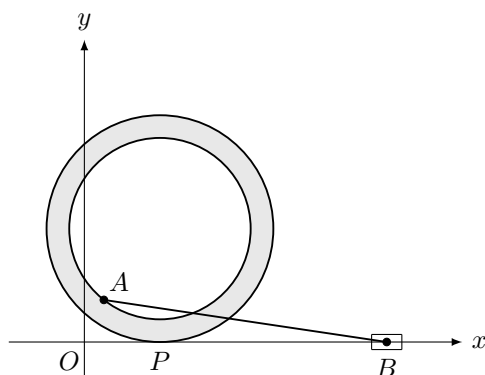
- i) Determinare un sistema di riferimento principale di inerzia con origine in  $O$  motivando la risposta.
- ii) Calcolare la matrice di inerzia  $I_O$  definita attraverso il sistema di riferimento  $Oxyz$ .

### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri un anello, con raggio interno  $r$  e raggio esterno  $R > r$ , che rotola senza strisciare sulla guida orizzontale  $Ox$ . Un'asta lunga  $\ell > R$  ha un estremo ( $A$ ) vincolato attraverso una coppia rotoidale mobile ad un punto del bordo interno dell'anello, mentre l'altro estremo ( $B$ ) può scivolare lungo la guida  $Ox$ . Si assuma che all'istante iniziale il punto di contatto  $P$  dell'anello con  $Ox$  coincida con  $O$ , che l'ascissa di  $A$  sia nulla e che l'ascissa di  $B$  sia maggiore di 0.

Utilizzando come parametro l'ascissa  $s$  di  $P$ ,

- i) calcolare la velocità angolare dell'anello;
- ii) calcolare la velocità angolare dell'asta;
- iii) ottenere graficamente la posizione del centro istantaneo di rotazione  $C_0$  dell'asta in una configurazione del sistema con  $s > 0$ , come quella mostrata nella figura, motivando la risposta;
- iv) scrivere esplicitamente la posizione di  $C_0$  rispetto ad  $O$  nel caso di  $s \neq 0$ .

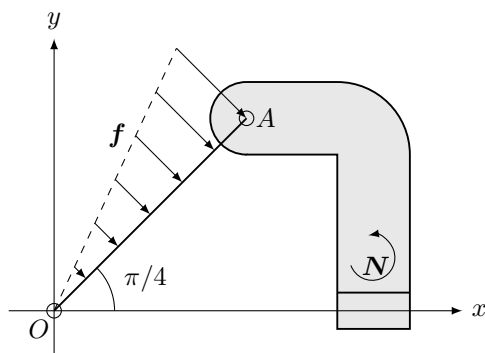


### Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano orizzontale  $Oxy$  si consideri il sistema meccanico formato da un'asta  $OA$  e da un corpo rigido  $C$  vincolati tra loro attraverso una coppia rotoidale mobile posta nel punto  $A$ . L'asta  $OA$  è inclinata di  $\pi/4$  rispetto all'asse  $Ox$  ed il suo estremo  $O$  è vincolato all'origine da una coppia rotoidale fissa. Il corpo  $C$  è vincolato all'asse  $Ox$  da una coppia prismatica. L'asta  $OA$  è sollecitata da un carico per unità di lunghezza distribuito uniformemente lungo l'asta dato da

$$\mathbf{f}(s) = \frac{F}{\ell^2} s \mathbf{u}, \quad s \in [0, \ell],$$

dove  $F > 0$  e  $\mathbf{u}$  è un versore diretto perpendicolarmente all'asta e orientato come si vede dalla figura. Su  $C$  agisce la coppia  $\mathbf{N}$ . Si assuma che tutti i vincoli siano privi di attrito.



- i) Mostrare come ottenere un sistema di forze applicate equivalente al sistema costituito dal carico distribuito applicato all'asta.
- ii) Determinare le reazioni vincolari interne ed esterne al sistema utilizzando il metodo di sovrapposizione degli effetti dovuti alla coppia applicata a  $C$  e al carico distribuito applicato all'asta.

### Soluzione Primo Esercizio

i)

Il piano  $Oxy$  è un piano di simmetria per riflessione per la lamina, quindi l'asse  $Oz$  è un asse principale di inerzia. Il piano perpendicolare al piano  $Oxy$  e passante per i punti  $O$  e  $C$  è un piano di simmetria per riflessione per la lamina. Quindi l'asse passante per  $O$  e perpendicolare al segmento  $OC$  è un asse principale di inerzia. Per il teorema spettrale, l'asse passante per i punti  $O$  e  $C$  è un asse principale di inerzia.

ii)

Notiamo che i momenti di inerzia rispetto agli assi  $Ox$ ,  $Oy$  sono uguali. Introduciamo le seguenti coordinate polari. Sia  $\rho$  la distanza di un punto  $P$  generico della lamina da  $C$  e sia  $\theta$  l'angolo compreso tra i segmenti  $CP$  e  $CB$ . Allora

$$I_{11} = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \sigma \rho (R - \rho \cos \theta)^2 d\rho d\theta = mR^2 \left( \frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi} \right),$$

dove

$$\sigma = \frac{4m}{\pi R^2}.$$

Quindi

$$I_{22} = I_{11} = mR^2 \left( \frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi} \right),$$
$$I_{33} = 2I_{11} = 2mR^2 \left( \frac{5}{4} - \frac{8}{3\pi} \right).$$

Inoltre abbiamo

$$I_{13} = I_{23} = I_{31} = I_{32} = 0.$$

e

$$I_{12} = I_{21} = - \int_0^R \int_0^{\pi/2} \sigma \rho (R - \rho \cos \theta)(R - \rho \sin \theta) d\rho d\theta = -mR^2 \left( 1 - \frac{13}{6\pi} \right).$$

### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Chiamiamo  $C$  il centro dell'anello. Introduciamo inoltre l'angolo  $\theta$  tra i segmenti  $CA$  e  $CP$ . Dalla configurazione iniziale descritta nel testo, si ha subito

$$\theta = \frac{s}{R}.$$

Le posizioni dei punti  $C, A, P$  risultano

$$\begin{aligned}\chi_C &= s\mathbf{e}_1 + R\mathbf{e}_2, \\ \chi_A &= (s - r \sin \theta)\mathbf{e}_1 + (R - r \cos \theta)\mathbf{e}_2, \\ \chi_P &= s\mathbf{e}_1.\end{aligned}$$

Scriviamo la formula fondamentale della cinematica rigida per l'anello

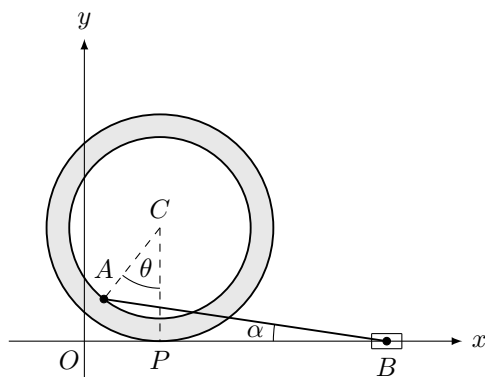
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega}^a \times (\chi_C - \chi_P),$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C &= \dot{s}\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{v}_P &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\omega}^a &= \omega^a \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Risulta

$$\boldsymbol{\omega}^a = -\frac{\dot{s}}{R}\mathbf{e}_3.$$



ii)

Introduciamo l'angolo  $\alpha$  tra l'asse  $Ox$  e l'asta. Si ha

$$l \sin \alpha = R - r \cos \theta.$$

Quindi valgono le relazioni (si noti che  $0 < \alpha < \pi/2$ )

$$\sin \alpha = \frac{1}{l}(R - r \cos \theta), \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{l}\sqrt{\ell^2 - (R - r \cos \theta)^2}. \quad (2)$$

La velocità angolare dell'asta è data da

$$\omega^{AB} = -\dot{\alpha} e_3.$$

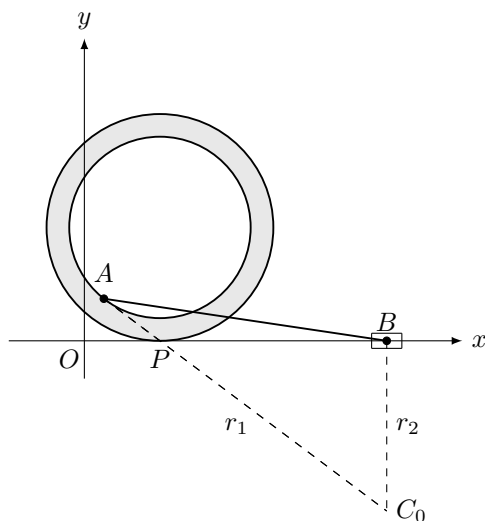
Derivando rispetto al tempo l'equazione (1) ed usando l'equazione (2) si ha

$$\dot{\alpha} = \frac{r \dot{s} \sin \theta}{R \sqrt{\ell^2 - (R - r \cos \theta)^2}},$$

dove abbiamo anche tenuto conto che  $\theta = s/R$ .

iii)

La direzione della velocità di  $A$  è perpendicolare al segmento  $AP$ , in quanto  $P$  è il centro istantaneo di rotazione dell'anello ed  $A$  può essere visto come un punto solidale all'anello. Introduciamo la retta  $r_1$  passante per  $A$  e  $P$ . Tracciamo inoltre la retta  $r_2$  perpendicolare ad  $Ox$  e passante per  $B$ . Per il teorema di Chasles le due rette si intersecano nel centro istantaneo di rotazione  $C_0$  dell'asta.



iv)

L'equazione della retta passante per  $A$  e  $P$  è data da

$$y = \frac{R - r \cos \theta}{r \sin \theta} (s - x).$$

Le coordinate di  $C_0$  risultano

$$\begin{aligned} x_{C_0} &= x_A + \ell \cos \alpha, \\ y_{C_0} &= \frac{R - r \cos \theta}{r \sin \theta} (s - x_{C_0}), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_{C_0} &= s - r \sin \theta + \sqrt{\ell^2 - (R - r \cos \theta)^2}, \\ y_{C_0} &= \frac{R - r \cos \theta}{r \sin \theta} \left( r \sin \theta - \sqrt{\ell^2 - (R - r \cos \theta)^2} \right), \end{aligned}$$

con  $\theta = s/R$ .

### Soluzione Terzo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Poichè il sistema di forze esterne attive applicate all'asta è costituito da vettori paralleli, il trinomio invariante sarà nullo. Per un risultato visto, potremo sostituire tale sistema con un unico vettore dato dalla risultante applicata in un punto dell'asse centrale, che sceglieremo coincidere con il centro dei vettori paralleli. La risultante è data da

$$\mathbf{R} = \int_0^\ell \mathbf{f}(s) ds = \frac{F}{2} \mathbf{u}.$$

Chiamiamo  $C$  il centro dei vettori paralleli e  $P$  un generico punto dell'asta. La posizione di  $C$  rispetto ad  $O$  è data da

$$\chi_C = \frac{\int_0^\ell (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) \chi_P ds}{\int_0^\ell \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} ds},$$

dove

$$\chi_P(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} s(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2).$$

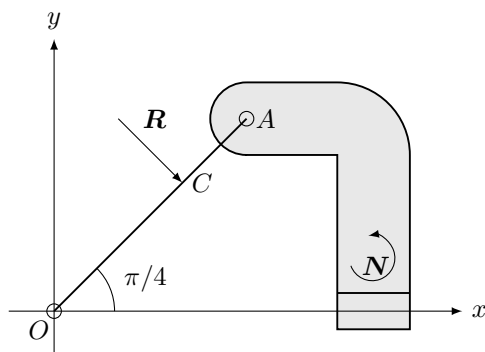
Si ottiene

$$\chi_C = \frac{\frac{\sqrt{2}F}{2\ell^2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \int_0^\ell s^2 ds}{\int_0^\ell \frac{F}{\ell^2} s ds} = \frac{\sqrt{2}}{3} \ell (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2).$$

Si noti che

$$|\chi_C| = \frac{2}{3} \ell,$$

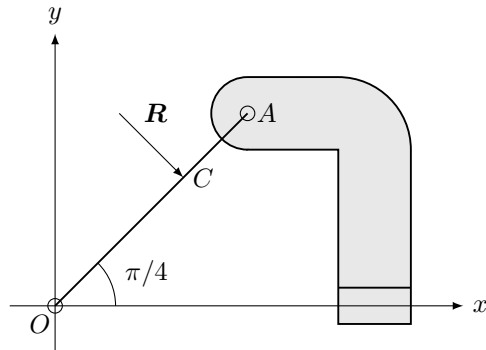
come ci aspettavamo. Sostituiamo da qui in avanti il sistema di forze esterne attive applicate all'asta con il sistem  $\{\mathbf{R}, C\}$ .



ii)

Consideriamo dapprima l'azione della sola forza esterna attiva  $\mathbf{R}$  applicata in  $C$ .

Affinchè sia  $C$  che l'asta singolarmente siano in equilibrio, la forza  $\Phi'$  esercitata dall'asta su  $C$  deve essere diversa da 0. Allora il sistema delle reazioni vincolari



esercitate su  $\mathcal{C}$  dalla guida  $Ox$  attraverso la coppia prismatica è equivalente a  $-\Phi'$  applicata in un punto qualsiasi della retta parallela ad  $Oy$  e passante per  $A$ .

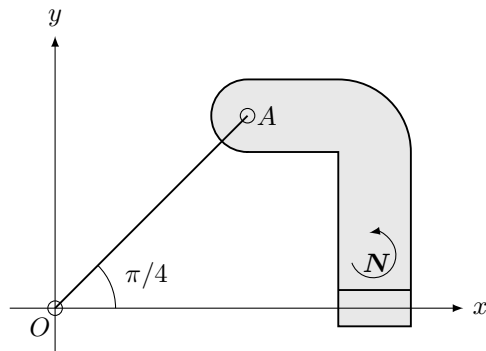
Ragioniamo adesso sull'asta. Su di essa agiscono le forze

$$\begin{aligned} -\Phi' &= -\Phi' e_2, \\ \mathbf{R} &= \frac{\sqrt{2}F}{4}(e_1 - e_2), \\ \Phi'_O &= \Phi'_{O,x} e_1 + \Phi'_{O,y} e_2. \end{aligned}$$

Le tre incognite  $\Phi'$ ,  $\Phi'_{O,x}$ ,  $\Phi'_{O,y}$  si ottengono scrivendo le due equazioni cardinali della statica per l'asta. Si ha

$$\begin{aligned} \Phi' &= -\frac{\sqrt{2}F}{3}e_2, \\ \mathbf{R} &= \frac{\sqrt{2}F}{4}(e_1 - e_2), \\ \Phi'_O &= -\frac{\sqrt{2}F}{4}\left(e_1 + \frac{1}{3}e_2\right). \end{aligned}$$

Prendiamo in considerazione l'azione del solo momento esterno attivo  $N$  applicato a  $\mathcal{C}$ .



Cominciamo dall'asta che è scarica. Affinchè sia in equilibrio le forze che agiscono in  $O$  e in  $A$  devono essere direttamente opposte. Inoltre, affinché  $\mathcal{C}$  sia

in equilibrio, la forza  $\Phi''$  esercitata dall'asta su  $\mathcal{C}$  deve necessariamente essere nulla. Di conseguenza anche la risultante del sistema delle reazioni vincolari esercitate su  $\mathcal{C}$  dalla guida  $Ox$  attraverso la coppia prismatica è nulla. In questo caso si ha

$$\begin{aligned}\Phi'' &= \mathbf{0}, \\ \Phi''_O &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Il sistema delle reazioni vincolari esercitate su  $\mathcal{C}$  dalla guida  $Ox$  è equivalente ad una coppia di momento pari a  $-\mathbf{N}$ .

In definitiva, in  $O$  agisce la reazione

$$\Phi_O = \Phi'_O + \Phi''_O = -\frac{\sqrt{2}F}{4} \left( \mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 \right).$$

La reazione interna esercitata dall'asta su  $\mathcal{C}$  è

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' = -\frac{\sqrt{2}F}{3}\mathbf{e}_2.$$

Per quanto riguarda la coppia prismatica, le reazioni esercitate dalla guida  $Ox$  sono equivalenti ad una coppia  $-\mathbf{N}$  e alla forza

$$-\Phi = \frac{\sqrt{2}F}{3}\mathbf{e}_2$$

applicata in un punto qualunque della retta parallela ad  $Oy$  e passante per  $A$ .



**Compito di Meccanica Razionale**  
**Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale**  
**12 Febbraio 2024**

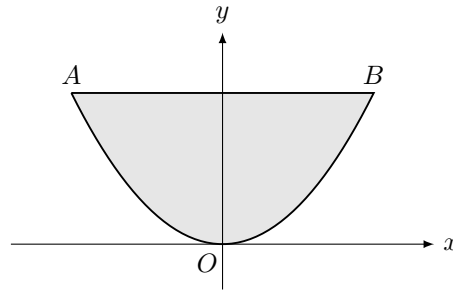
**Primo Esercizio**

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri una lamina omogenea di massa  $m$  costituita dalla regione delimitata dal segmento  $AB$ , con

$$(x_A, y_A) = (-1, 1), \quad (x_B, y_B) = (1, 1)$$

e dalla porzione di parabola

$$y = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$



Indichiamo con  $G$  il baricentro della lamina.

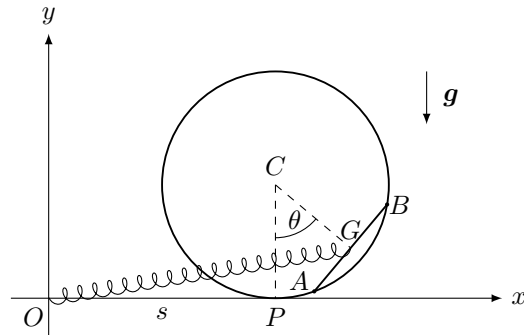
- i) la posizione di  $G$  rispetto ad  $O$ ;
- ii) i momenti di inerzia assiali della lamina rispetto agli assi  $Gx$  e  $Gy$ , paralleli rispettivamente ad  $Ox$  e  $Oy$ , esprimendoli in funzione di  $m$ ;
- iii) la posizione di un punto  $Q$ , tale che qualsiasi asse passante per  $Q$  ed ortogonale ad  $Oz$  sia un asse principale di inerzia per la lamina.

**Secondo Esercizio**

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano verticale  $Oxy$  si consideri un anello omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  che rotola senza strisciare sulla guida  $Ox$ . Gli estremi  $A$  e  $B$  di un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $R$  scivolano sull'anello. Una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega il baricentro  $G$  dell'asta con l'origine  $O$ . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $\mathbf{g}$  parallela ad  $Oy$  e di modulo uguale a  $g$ . Si assuma che i vincoli siano ideali.

Si usino come coordinate lagrangiane l'ascissa  $s$  del punto di contatto  $P$  tra l'anello e la guida  $Ox$  e l'angolo  $\theta$  tra il segmento  $CG$ , con  $C$  baricentro dell'anello, e la direzione verticale.

- i) Scrivere le equazioni pure del moto del sistema utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.
- ii) Assumendo di conoscere una soluzione  $(\theta(t), s(t))$  delle equazioni del moto trovate nel punto i), determinare la reazione vincolare che la guida  $Ox$  esercita sull'anello in  $P$ .



### Terzo Esercizio

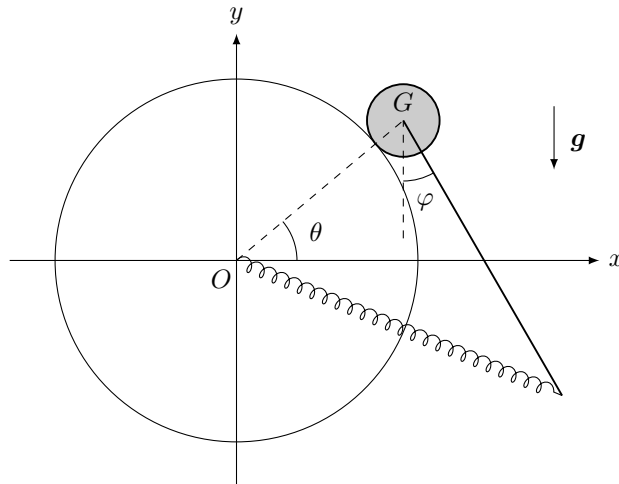
Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano verticale  $Oxy$  si consideri il seguente sistema meccanico. Un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $r$  rotola senza strisciare su una guida circolare fissa di raggio  $R$  e centro in  $O$ . Inoltre, è presente un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  con un estremo vincolato attraverso una coppia rotoidale mobile al baricentro  $G$  del disco. Una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega l'altro estremo dell'asta con l'origine  $O$ . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $\mathbf{g}$  parallela ad  $Oy$  e di modulo uguale a  $g$ . Si assuma che i vincoli siano ideali. Si usino come parametri lagrangiani l'angolo  $\theta$  che il segmento  $GO$  forma con l'asse  $Ox$  e l'angolo  $\varphi$  che l'asta forma con l'asse  $Oy$ .

- i) Scrivere l'energia potenziale delle forze attive applicate al sistema.

Assumendo che

$$m = 2M, \quad \ell = 3(R + r), \quad Mg > 2k(R + r),$$

- ii) determinare le configurazioni di equilibrio del sistema;  
 iii) studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate nel punto ii).



### Soluzione Primo Esercizio

i)

L'area della lamina è data da

$$A = 2 \int_0^1 \int_{x^2}^1 dx dy = \frac{4}{3},$$

da cui

$$\sigma = \frac{3m}{4}.$$

Si ha  $x_G = 0$  e

$$y_G = \frac{\sigma}{m} \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 y dx dy = \frac{3}{5}.$$

ii)

Abbiamo

$$I_{Gy} = I_{Oy} = 2\sigma \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^2 dx dy = \frac{4}{15}\sigma = \frac{m}{5}.$$

Calcoliamo

$$I_{Ox} = 2\sigma \int_0^1 \int_{x^2}^1 y^2 dx dy = \frac{4}{7}\sigma = \frac{3}{7}m,$$

da cui

$$I_{Gx} = I_{Ox} - my_G^2 = \frac{12}{175}m.$$

iii)

Cerco un punto  $Q$  sull'asse  $Oy$  per il quale si abbia

$$I_{Qy} = I_{Qx}.$$

Allora (per un risultato visto) poichè gli assi  $Qx$  e  $Qy$  sono principali di inerzia per la lamina, qualsiasi asse passante per  $Q$  ed ortogonale ad  $Oz$  è un asse principale di inerzia per la lamina. Da

$$I_{Qy} = I_{Oy} = \frac{m}{5}$$

si ha

$$I_{Qx} = \frac{m}{5}.$$

Pongo

$$I_{Qx} = I_{Gx} + md^2,$$

ottenendo

$$d = \sqrt{\frac{I_{Qx} - I_{Gx}}{m}} = \sqrt{\frac{23}{175}}.$$

Allora

$$x_Q = 0, \quad y_Q = y_G + d = \frac{3}{5} + \sqrt{\frac{23}{175}}.$$

### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Notiamo subito che le rette di applicazione delle reazioni vincolari che agiscono in  $A$  e in  $B$  passano per  $C$ . Sia

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

la distanza tra  $C$  e  $G$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}\chi_P &= s\mathbf{e}_1, \\ \chi_C &= s\mathbf{e}_1 + R\mathbf{e}_2, \\ \chi_G &= (s + h \sin \theta)\mathbf{e}_1 + (R - h \cos \theta)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Scriviamo la seconda equazione cardinale dell'asta rispetto a  $C$ :

$$\dot{M}_C = N_C - m\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_G.$$

Otteniamo

$$N_C = (\chi_G - \chi_C) \times (\mathbf{F}_{el} - mg\mathbf{e}_2),$$

con

$$\mathbf{F}_{el} = -k\chi_G.$$

Risulta

$$N_C = -h [(kR + mg) \sin \theta + ks \cos \theta] \mathbf{e}_3.$$

Inoltre

$$m\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_G = mh\dot{s}\theta \sin \theta \mathbf{e}_3.$$

Infine

$$M_C = M_G + m(\chi_G - \chi_C) \times \mathbf{v}_G,$$

con

$$M_G = \frac{mR^2}{12}\dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

La prima equazione pura del moto è data da

$$\frac{5}{3}mR\ddot{\theta} + \sqrt{3}m\dot{s}\cos \theta = -\sqrt{3}[(kR + mg) \sin \theta + ks \cos \theta].$$

Scriviamo la seconda equazione cardinale dell'anello rispetto a  $C$ :

$$\dot{M}_C = N_C,$$

con

$$N_C = (\chi_P - \chi_C) \times (\Phi_x\mathbf{e}_1 + \Phi_y\mathbf{e}_2)$$

e

$$M_C = -MR\dot{s}\mathbf{e}_3.$$

Si ottiene

$$\Phi_x = -M\ddot{s}. \quad (1)$$

La prima equazione cardinale per l'intero sistema porge

$$M\mathbf{a}_C + m\mathbf{a}_G = \Phi_x\mathbf{e}_1 + \Phi_y\mathbf{e}_2 - (M + m)g\mathbf{e}_2 + \mathbf{F}_{el}.$$

Proiettandola lungo  $\mathbf{e}_1$  ed utilizzando (1) si ottiene la seconda equazione pura del moto:

$$(2M + m)\ddot{s} + \frac{\sqrt{3}}{2}mR(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = -k\left(s + \frac{\sqrt{3}}{2}R \sin \theta\right).$$

iii)

Per la componente  $\Phi_x$  abbiamo già ottenuto l'equazione 1). Per la componente  $\Phi_y$  proiettiamo la prima equazione cardinale per l'intero sistema lungo  $\mathbf{e}_2$  per ottenere

$$\Phi_y = \frac{\sqrt{3}}{2}mR(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) + (M + m)g + kR\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta\right).$$

### Soluzione Terzo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Chiamiamo  $A$  l'estremo libero dell'asta e  $B$  il suo baricentro. Abbiamo

$$\begin{aligned}\chi_G &= (R+r)(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2), \\ \chi_A &= \chi_G + \ell(\sin\varphi\mathbf{e}_1 - \cos\varphi\mathbf{e}_2), \\ \chi_B &= \chi_G + \frac{\ell}{2}(\sin\varphi\mathbf{e}_1 - \cos\varphi\mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

L'energia potenziale delle forze attive è data da

$$V(\theta, \varphi) = \frac{k}{2}|\chi_A|^2 + (Mg\chi_G + mg\chi_B) \cdot \mathbf{e}_2.$$

Risulta

$$\begin{aligned}V(\theta, \varphi) &= \frac{k}{2} [(R+r)^2 + \ell^2 + 2\ell(R+r)\sin(\varphi - \theta)] \\ &\quad + g(M+m)(R+r)\sin\theta - \frac{mg\ell}{2}\cos\varphi.\end{aligned}$$

ii)

Con le assunzioni fatte  $V$  risulta

$$V(\theta, \varphi) = 3k(R+r)^2 \sin(\varphi - \theta) + 3Mg(R+r)(\sin\theta - \cos\varphi).$$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \end{cases}$$

che porta a scrivere

$$\begin{cases} -k(R+r)\cos(\varphi - \theta) + Mg\cos\theta = 0, \\ k(R+r)\cos(\varphi - \theta) + Mg\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ha

$$\cos\theta = -\sin\varphi.$$

Segue che

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} - \theta, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} + \theta. \quad (2)$$

Sostituendo la prima relazione nella prima equazione del sistema si ha

$$\cos\theta [(2k(R+r)\sin\theta + Mg)] = 0,$$

da cui, tenendo conto che  $Mg > 2k(R+r)$ , si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$(\theta_1, \varphi_1) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad (\theta_2, \varphi_2) = \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right).$$

Sostituendo la seconda relazione in (2) nella prima equazione del sistema si ha

$$\cos\theta = 0,$$

da cui si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$(\theta_3, \varphi_3) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (\theta_4, \varphi_4) = \left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right).$$

iii)

Le componenti della matrice  $V''(\theta, \varphi)$  risultano

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} &= -3k(R+r)^2 \sin(\varphi - \theta) - 3Mg(R+r) \sin \theta, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} &= -3k(R+r)^2 \sin(\varphi - \theta) + 3Mg(R+r) \cos \varphi, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} &= 3k(R+r)^2 \sin(\varphi - \theta), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \theta} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi}. \end{aligned}$$

Prima configurazione di equilibrio:

$$V''(\theta_1, \varphi_1) = (R+r) \begin{pmatrix} -3k(R+r) - 3Mg & 3k(R+r) \\ 3k(R+r) & -3k(R+r) - 3Mg \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\begin{aligned} \det V''(\theta_1, \varphi_1) &> 0, \\ \text{tr} V''(\theta_1, \varphi_1) &< 0, \end{aligned}$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Seconda configurazione di equilibrio:

$$V''(\theta_2, \varphi_2) = (R+r) \begin{pmatrix} -3k(R+r) + 3Mg & 3k(R+r) \\ 3k(R+r) & -3k(R+r) + 3Mg \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\begin{aligned} \det V''(\theta_2, \varphi_2) &= 9Mg(R+r)^2 [Mg - 2k(R+r)] > 0, \\ \text{tr} V''(\theta_2, \varphi_2) &= 6(R+r) [Mg - k(R+r)] > 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi  $Mg > 2k(R+r)$ , concludiamo che la configurazione di equilibrio è stabile per il criterio di Lagrange-Dirichelet.

Terza configurazione di equilibrio:

$$V''(\theta_3, \varphi_3) = (R+r) \begin{pmatrix} 3k(R+r) - 3Mg & -3k(R+r) \\ -3k(R+r) & 3k(R+r) + 3Mg \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\theta_3, \varphi_3) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Quarta configurazione di equilibrio:

$$V''(\theta_4, \varphi_4) = (R+r) \begin{pmatrix} 3k(R+r) + 3Mg & -3k(R+r) \\ -3k(R+r) & 3k(R+r) - 3Mg \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\theta_4, \varphi_4) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

# Compito di Meccanica Razionale

## Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

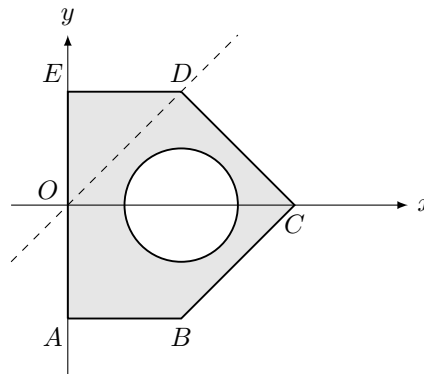
13 Aprile 2024

### Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri una lamina omogenea di massa  $m$  ottenuta rimuovendo dalla regione delimitata dal poligono  $ABCDE$ , con

$$\begin{aligned}(x_A, y_A) &= (0, -1), & (x_B, y_B) &= (1, -1), & (x_C, y_C) &= (2, 0), \\ (x_D, y_D) &= (1, 1), & (x_E, y_E) &= (0, 1),\end{aligned}$$

una porzione delimitata da un cerchio di raggio  $1/2$  e centro nel punto di coordinate  $(1, 0)$ .



Calcolare

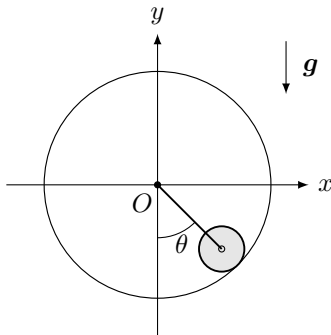
- i) i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi  $Ox$  e  $Oy$ , esprimendoli in funzione di  $m$ ;
- ii) il momento di inerzia della lamina rispetto alla retta passante per i punti  $O$  e  $D$ .

### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano verticale  $Oxy$  si consideri un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $r$  che rotola senza strisciare su una guida circolare fissa di raggio  $R > r$  e centro in  $O$ . L'estremo di un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  è vincolato tramite una coppia rotoidale mobile al baricentro del disco. L'altro estremo dell'asta è vincolato tramite una coppia rotoidale fissa al punto  $O$ . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $\mathbf{g}$  parallela ad  $Oy$  e di modulo uguale a  $g$ . Si assuma che i vincoli siano ideali. Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo  $\theta$  tra le direzioni dell'asta e dell'asse  $Oy$ .

- i) Scrivere l'equazione del moto del sistema con le equazioni cardinali della dinamica.



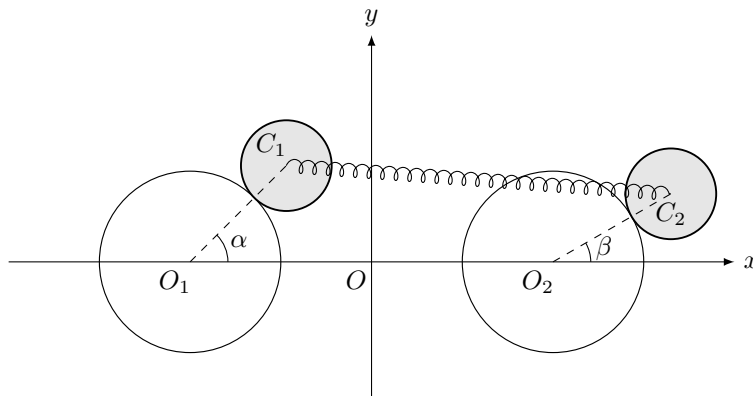


- ii) Scrivere l'equazione del moto del sistema con le equazioni di Lagrange.
- iii) Calcolare l'espressione assunta dalla componente della reazione vincolare tangente alla guida nel punto di contatto con il disco quando  $\theta = 0$ .

### Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxy$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri il seguente sistema meccanico. Due dischi di raggio  $R$  e massa  $M$  possono rotolare senza strisciare su due guide circolari fisse di raggio  $2R$  e centro nei punti di coordinate  $O_1 \equiv (-4R, 0)$ ,  $O_2 \equiv (4R, 0)$ . I centri  $C_1, C_2$  dei due dischi sono collegati tra loro da una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Si usino come parametri lagrangiani gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  che i segmenti  $O_1C_1$  e  $O_2C_2$  formano con l'asse  $Ox$ , rispettivamente.

- i) Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.
- ii) Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate nel punto i).
- iii) Scrivere la matrice cinetica del sistema.



### Soluzione Primo Esercizio

i)

Chiamiamo  $\sigma$  la densità. Si ha

$$\sigma = \frac{4m}{12 - \pi}.$$

Calcoliamo  $I_{Ox}$ .

Per la lamina rettangolare  $ABDE$  si ha

$$I_{Ox}^{(1)} = \sigma \int_0^1 \int_{-1}^1 y^2 dx dy = \frac{2}{3} \sigma.$$

Il contributo della lamina triangolare  $BCD$  è metà del contributo della lamina quadrata  $OBCD$  che ha lato pari a  $\sqrt{2}$  e massa pari a  $2\sigma$ , quindi si ha

$$I_{Ox}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{4\sigma}{12} \right) = \frac{\sigma}{6}.$$

Il contributo (da sottrarre) del disco che ha raggio  $1/2$  e massa  $\sigma\pi/4$  è

$$I_{Ox}^{(3)} = \frac{1}{4} \left( \frac{\sigma\pi}{16} \right) = \frac{\sigma\pi}{64}.$$

Risulta

$$I_{Ox} = I_{Ox}^{(1)} + I_{Ox}^{(2)} - I_{Ox}^{(3)} = \frac{\sigma}{2} \left( \frac{5}{3} - \frac{\pi}{32} \right).$$

Dunque

$$I_{Ox} = \frac{2m}{12 - \pi} \left( \frac{5}{3} - \frac{\pi}{32} \right)$$

Calcoliamo  $I_{Oy}$ .

Il contributo della lamina quadrata  $OBCD$  che ha lato pari a  $\sqrt{2}$  e massa pari a  $2\sigma$  è

$$I_{Oy}^{(1)} = \frac{4\sigma}{12} + 2\sigma = \frac{7\sigma}{3}.$$

Il contributo delle due lamine triangolari  $ABO$ ,  $ODE$  è uguale a  $I_{Ox}^{(2)}$

$$I_{Oy}^{(2)} = \frac{\sigma}{6}.$$

Il contributo (da sottrarre) del disco che ha raggio  $1/2$  e massa  $\sigma\pi/4$  è

$$I_{Oy}^{(3)} = \frac{\sigma\pi}{64} + \frac{\sigma\pi}{4} = \frac{17\sigma\pi}{64}.$$

Risulta

$$I_{Oy} = I_{Oy}^{(1)} + I_{Oy}^{(2)} - I_{Oy}^{(3)} = \frac{\sigma}{2} \left( 5 - \frac{17\pi}{32} \right).$$

Dunque

$$I_{Oy} = \frac{2m}{12 - \pi} \left( 5 - \frac{17\pi}{32} \right).$$

ii)

Introduciamo il versore

$$\mathbf{u} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^T.$$

Poichè la matrice di inerzia  $I_O$  è diagonale, si ha

$$I = \mathbf{u} \cdot I_O \mathbf{u} = \frac{1}{2}(I_{Ox} + I_{Oy}) = \frac{m}{12 - \pi} \left( \frac{20}{3} - \frac{9\pi}{16} \right).$$

### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Chiamiamo  $G$  il baricentro del disco,  $P$  il punto di contatto tra il disco e l'asta,  $C$  il baricentro dell'asta. Abbiamo

$$\begin{aligned}\chi_G &= \ell(\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2), \\ \chi_C &= \frac{\chi_G}{2}, \\ \mathbf{v}_G &= \ell\dot{\theta}(\cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

La velocità angolare dell'asta si vede subito essere

$$\boldsymbol{\omega}_a = \dot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

Per la velocità angolare del disco usiamo la relazione

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega}_d \times (\chi_G - \chi_P),$$

con  $\boldsymbol{\omega}_d = \omega_d\mathbf{e}_3$  e

$$\chi_P = (\ell + r)(\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2).$$

Si ottiene

$$\boldsymbol{\omega}_d = -\frac{\ell\dot{\theta}}{r}\mathbf{e}_3.$$

Chiamiamo  $\Phi$  la reazione che l'asta esercita sul disco in  $G$  e  $\Phi_t\mathbf{e}_t$  la reazione vincolare in  $P$  tangente alla guida con  $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_3 \times \chi_G/\ell$ .

La seconda equazione cardinale dell'asta rispetto ad  $O$  è

$$\dot{M}_{O,a} = N_{O,a}, \quad (1)$$

con

$$M_{O,a} = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

e

$$N_{O,a} = \chi_C \times (-mge_2) + \chi_G \times (-\Phi).$$

La seconda equazione cardinale del disco rispetto ad  $O$  è

$$\dot{M}_{O,d} = N_{O,d}, \quad (2)$$

con

$$M_{O,d} = M_G + M\chi_G \times \mathbf{v}_G = M\ell\left(\ell - \frac{r}{2}\right)\dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

e

$$N_{O,d} = \chi_G \times (-Mge_2 + \Phi) + \Phi_t(\ell + r)\mathbf{e}_3.$$

Dalla seconda equazione cardinale del disco rispetto ad  $G$ ,

$$\dot{M}_G = \Phi_t r\mathbf{e}_3,$$

troviamo

$$\Phi_t = -\frac{M\ell}{2}\ddot{\theta}, \quad (3)$$

che sostituito nell'equazione per  $N_{O,d}$  consente di scrivere

$$N_{O,d} = \chi_G \times (-Mge_2 + \Phi) - \frac{M\ell(\ell + r)}{2}\ddot{\theta}\mathbf{e}_3.$$

L'equazione pura del moto si ottiene sommando (1) e (2) e proiettando lungo  $\mathbf{e}_3$ :

$$\left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right) \ell \ddot{\theta} = -g \left(\frac{m}{2} + M\right) \sin \theta. \quad (4)$$

ii)

L'energia cinetica del sistema è data da

$$T = \frac{1}{2} I_{Oz} |\boldsymbol{\omega}_a|^2 + \frac{1}{2} I_{Pz} |\boldsymbol{\omega}_d|^2 = \left(\frac{m}{6} + \frac{3M}{4}\right) \ell^2 \dot{\theta}^2.$$

L'energia potenziale è data da

$$V = mgy_C + Mgy_G = -g\ell \cos \theta \left(\frac{m}{2} + M\right).$$

La lagrangiana è definita da

$$L = T - V,$$

e l'equazione di Lagrange corrispondente è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}.$$

Si ha

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{2}\right) \ell^2 \ddot{\theta},$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -g\ell \left(\frac{m}{2} + M\right) \sin \theta.$$

Si ritrova dunque l'equazione (4).

iii)

Dall'equazione (4) vediamo che per  $\theta = 0$  si ha  $\ddot{\theta} = 0$ . Quindi dall'equazione (3) si ha che

$$\Phi_t|_{\theta=0} = 0.$$

### Soluzione Terzo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}\chi_{C_1} &= (-4R + 3R \cos \alpha)\mathbf{e}_1 + 3R \sin \alpha \mathbf{e}_2, \\ \chi_{C_2} &= (4R + 3R \cos \beta)\mathbf{e}_1 + 3R \sin \beta \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

L'energia potenziale delle forze attive è data da

$$V(\alpha, \beta) = \frac{k}{2} |\chi_{C_1} - \chi_{C_2}|^2.$$

Trascurando i termini additivi costanti si ha

$$V(\alpha, \beta) = kR^2 [24(\cos \beta - \cos \alpha) - 9 \cos(\alpha - \beta)].$$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

che porta a scrivere

$$\begin{cases} kR^2 [24 \sin \alpha + 9 \sin(\alpha - \beta)] = 0, \\ kR^2 [-24 \sin \beta - 9 \sin(\alpha - \beta)] = 0. \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ha

$$\sin \alpha = \sin \beta.$$

Segue che

$$\alpha = \beta, \quad \alpha = \pi - \beta. \quad (5)$$

Sostituendo la prima relazione nella seconda equazione del sistema si ha

$$\sin \beta = 0,$$

da cui si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$(\alpha_1, \beta_1) = (0, 0), \quad (\alpha_2, \beta_2) = (\pi, \pi).$$

Sostituendo la seconda relazione in (5) nella seconda equazione del sistema si ha

$$\sin \beta (4 + 3 \cos \beta) = 0,$$

da cui si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$(\alpha_3, \beta_3) = (\pi, 0), \quad (\alpha_4, \beta_4) = (0, \pi).$$

ii)

Le componenti della matrice  $V''(\alpha, \beta)$  risultano

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} &= kR^2 [24 \cos \alpha + 9 \cos(\alpha - \beta)], \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} &= kR^2 [-24 \cos \beta + 9 \cos(\alpha - \beta)], \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta} &= -9kR^2 \cos(\alpha - \beta), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \beta \partial \alpha} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta}.\end{aligned}$$

Prima configurazione di equilibrio:

$$V''(\alpha_1, \beta_1) = kR^2 \begin{pmatrix} 33 & -9 \\ -9 & -15 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\alpha_1, \beta_1) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Seconda configurazione di equilibrio:

$$V''(\alpha_2, \beta_2) = kR^2 \begin{pmatrix} -15 & -9 \\ -9 & 33 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\alpha_2, \beta_2) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Terza configurazione di equilibrio:

$$V''(\alpha_3, \beta_3) = kR^2 \begin{pmatrix} -33 & 9 \\ 9 & -33 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\alpha_3, \beta_3) > 0,$$

$$\text{tr } V''(\alpha_3, \beta_3) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.

Quarta configurazione di equilibrio:

$$V''(\alpha_4, \beta_4) = kR^2 \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\alpha_4, \beta_4) > 0,$$

$$\text{tr } V''(\alpha_4, \beta_4) > 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

iii)

Chiamiamo  $P_1$  e  $P_2$  i punti di contatto dei dischi con le guide. Si ha

$$\begin{aligned}\chi_{P_1} &= (-4R + 2R \cos \alpha)\mathbf{e}_1 + 2R \sin \alpha \mathbf{e}_2, \\ \chi_{P_2} &= (4R + 2R \cos \beta)\mathbf{e}_1 + 2R \sin \beta \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Le velocità angolari dei due dischi possono essere calcolate dalla formula

$$\mathbf{v}_{C_i} = \mathbf{v}_{P_i} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\chi_{C_i} - \chi_{P_i}), \quad i = 1, 2,$$

con  $\mathbf{v}_{P_1} = \mathbf{v}_{P_2} = \mathbf{0}$ . Si ottiene

$$\boldsymbol{\omega}_1 = 3\dot{\alpha}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = 3\dot{\beta}.$$

L'energia cinetica del sistema può essere calcolata come segue:

$$T = \frac{1}{2}I_{P_1z}|\boldsymbol{\omega}_1|^2 + \frac{1}{2}I_{P_2z}|\boldsymbol{\omega}_2|^2,$$

con

$$I_{P_1z} = I_{P_2z} = \frac{3}{2}MR^2.$$

In definitiva la matrice cinetica risulta

$$A = \frac{27}{2}MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



# Compito di Meccanica Razionale

## Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

6 Giugno 2024

### Primo Esercizio

Si consideri un punto materiale  $P$  di massa unitaria ( $m = 1$ ) libero di muoversi in un campo di forze centrali dato da

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

dove  $\rho = |\mathbf{x}| > 0$  e

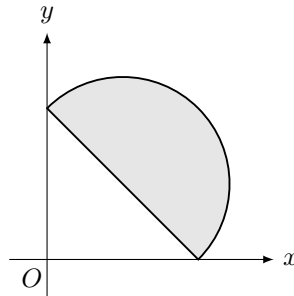
$$f(\rho) = -\frac{\alpha\rho}{1 + \rho^2},$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$  costante. Assumendo che il momento angolare di  $P$  rispetto al centro delle forze sia diverso da zero,

- i) scrivere esplicitamente l'espressione dell'energia potenziale  $V(\rho)$ ;
- ii) disegnare i ritratti di fase nel piano delle fasi ridotto  $(\rho, \dot{\rho})$  qualitativamente diversi che si presentano al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri un semidisco omogeneo di massa  $m$  e raggio  $R$  con centro nel punto  $\frac{\sqrt{2}}{2}(R, R)$ .



- i) Calcolare la matrice di inerzia  $I_O$  definita attraverso il sistema di riferimento  $Oxyz$ .
- ii) Determinare il momento di inerzia assiale rispetto ad una retta passante per il baricentro e parallela all'asse  $Oy$ .

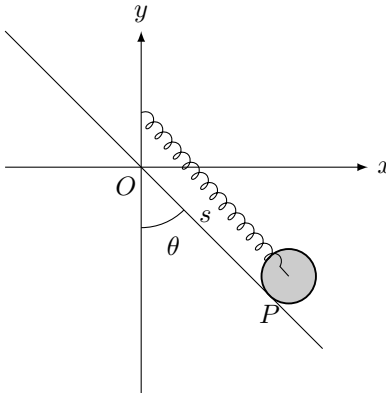
### Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri il sistema meccanico costituito da un disco di massa  $m$  e raggio  $r$ . Il disco rotola senza strisciare su una guida rettilinea passante per  $O$  e libera solamente di ruotare

intorno all'asse  $Oz$ . Una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega il centro del disco con il punto di coordinate  $(0, 2r)$ . Si assuma che i vincoli siano ideali.

Sia  $P$  il punto di contatto tra il disco e la guida. Si usino come parametri lagrangiani l'angolo  $\theta$  che la guida forma con l'asse  $Oy$  e la coordinata  $s$  del punto  $P$  definita lungo la guida a partire da  $O$  in modo che nella configurazione mostrata in figura si abbia  $s > 0$ .

- i) Scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica del disco rispetto a  $P$ .
- ii) Determinare le configurazioni di equilibrio del disco.
- iii) Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate.
- iv) Determinare la reazione vincolare che la guida esercita sul disco in  $P$  in corrispondenza delle configurazioni di equilibrio trovate.



### Soluzione Primo Esercizio

i)

L'energia potenziale è data da

$$V(\rho) = - \int f(\rho) d\rho = \int \frac{\alpha\rho}{1 + \rho^2} d\rho,$$

che si può risolvere per sostituzione, ottenendo (a meno di una costante additiva)

$$V(\rho) = \frac{\alpha}{2} \log(1 + \rho^2).$$

ii)

Introduciamo l'energia potenziale efficace

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)} = \frac{\alpha}{2} \log(1 + \rho^2) + \frac{c^2}{2\rho^2}.$$

Discutiamo dapprima il caso  $\alpha = 0$ . Si ottiene

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)} = \frac{c^2}{2\rho^2}.$$

Il grafico di  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}$  per  $\alpha = 0$  è immediato ed è mostrato nella figura 1 insieme al corrispondente ritratto di fase.

Consideriamo ora  $\alpha \neq 0$ . Calcoliamo i punti critici di  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}$ :

$$\frac{d\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}}{d\rho} = \frac{\alpha\rho^4 - c^2\rho^2 - c^2}{\rho^3(1 + \rho^2)} = 0.$$

Risolvendo

$$\alpha\rho^4 - c^2\rho^2 - c^2 = 0,$$

si ottiene

$$\rho_{1,2}^2 = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 + 4\alpha c^2}}{2\alpha}. \quad (1)$$

Innanzitutto vediamo che condizione deve soddisfare  $\alpha$  affinché il discriminante sia non negativo:

$$c^4 + 4\alpha c^2 \geq 0 \quad \iff \quad \alpha \geq -\frac{c^2}{4}.$$

Segue che per  $\alpha < -\frac{c^2}{4}$  non ci sono punti critici. Inoltre, si vede che se  $-\frac{c^2}{4} \leq \alpha < 0$

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= \frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 4\alpha c^2}}{2\alpha} < 0, \\ \rho_2^2 &= \frac{c^2 - \sqrt{c^4 + 4\alpha c^2}}{2\alpha} < 0, \end{aligned}$$

in quanto in entrambi i casi il numeratore è  $> 0$  ed il denominatore è  $< 0$ . Segue che per  $\alpha < 0$  non ci sono punti critici. Si ha poi

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) &= -\infty, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) &= +\infty. \end{aligned}$$

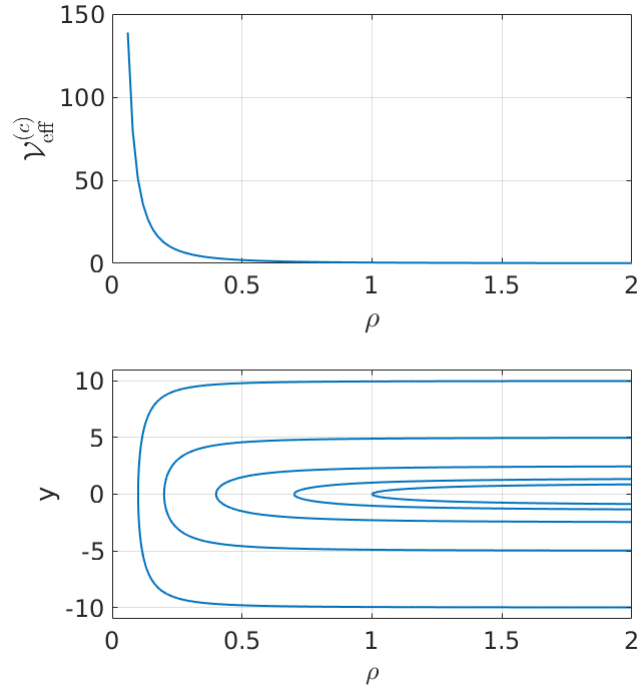


Figura 1: Caso  $\alpha = 0$ .

Il grafico di  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}$  per  $\alpha < 0$  è mostrato nella figura 2 insieme al corrispondente ritratto di fase.

Infine, per  $\alpha > 0$  si ha

$$\rho_1^2 = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 4\alpha c^2}}{2\alpha} > 0,$$

$$\rho_2^2 = \frac{c^2 - \sqrt{c^4 + 4\alpha c^2}}{2\alpha} < 0,$$

ed esiste allora un unico punto critico dato da

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 4\alpha c^2}}{2\alpha}}.$$

Si ha poi

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = +\infty,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = +\infty.$$

Il grafico di  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}$  per  $\alpha > 0$  è mostrato nella figura 3 insieme al corrispondente ritratto di fase.

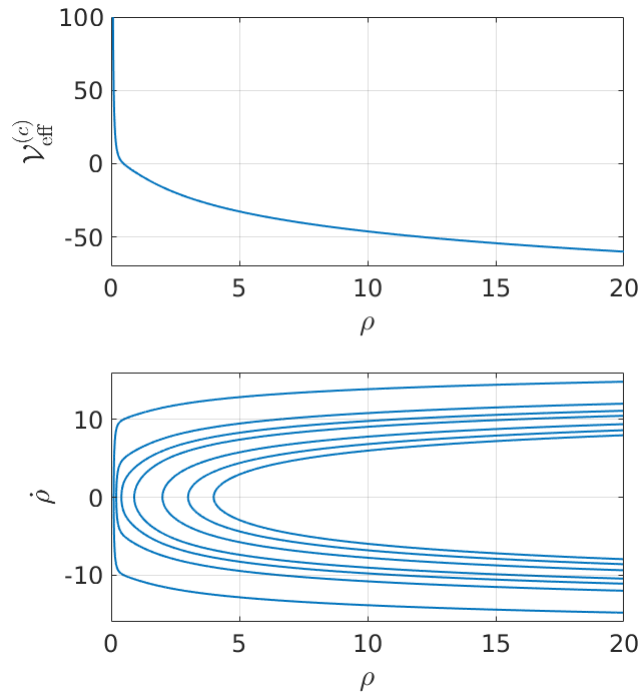


Figura 2: Caso  $\alpha < 0$ .

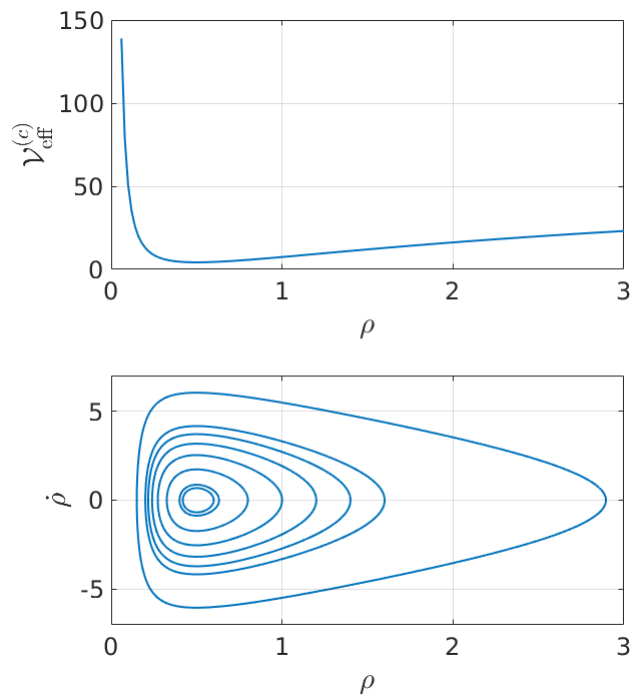


Figura 3: Caso  $\alpha > 0$ .

### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Ci sono diversi modi per rispondere.

Chiamiamo  $\sigma$  la densità. Si ha

$$\sigma = \frac{2m}{\pi R^2}.$$

Introduciamo un sistema di riferimento  $Ox'y'z'$ , con  $Oz'$  coincidente con  $Oz$  e  $Ox'$  coincidente con la bisettrice del primo e terzo quadrante. Tale riferimento è principale di inerzia.

Calcoliamo  $I_{Ox'}$ . Si ha subito

$$I_{Ox'} = \frac{1}{2} \left( \frac{2mR^2}{4} \right) = \frac{mR^2}{4}.$$

Calcoliamo  $I_{Oy'}$ . Otteniamo prima la distanza del centro  $G$  dal centro  $C$  del semidisco:

$$h = \sigma \int_0^R \int_0^\pi \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta = \frac{4R}{3\pi}.$$

Allora

$$I_{Oy'} = I_{Gy'} + m(R+h)^2,$$

dove

$$I_{Gy'} = I_{Cy'} - mh^2 = \frac{mR^2}{4} - mh^2.$$

Risulta

$$I_{Oy'} = \frac{mR^2}{4} - mh^2 + m(R+h)^2 = \frac{mR^2}{4} + mR^2 + 2mRh = mR^2 \left( \frac{5}{4} + \frac{8}{3\pi} \right).$$

Segue che

$$I_{Oz} = I_{Oz'} = I_{Ox'} + I_{Oy'} = mR^2 \left( \frac{3}{2} + \frac{8}{3\pi} \right).$$

Notando che  $I_{Ox} = I_{Oy}$  (infatti il corpo rigido è simmetrico rispetto alla retta  $y = x$ , questo implica che per ogni punto del semidisco di coordinate  $(\bar{x}, \bar{y})$  ne esiste uno di coordinate  $(\bar{y}, \bar{x})$ ), si ottiene

$$I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{I_{Oz}}{2} = mR^2 \left( \frac{3}{4} + \frac{4}{3\pi} \right).$$

Calcoliamo il momento di inerzia centrifugo

$$\begin{aligned} I_{Oxy} &= -\sigma \int_0^R \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \rho \left( \frac{\sqrt{2}}{2} R + \rho \cos \theta \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} R + \rho \sin \theta \right) d\rho d\theta \\ &= -mR^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi} \right). \end{aligned}$$

ii)

Il momento di inerzia richiesto è dato da

$$I_{Gy} = I_{Oy} - md^2,$$

con  $d = \frac{\sqrt{2}}{2}(R+h)$ . Si ha

$$I_{Gy} = \frac{mR^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right).$$

### Soluzione Terzo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  associata al riferimento  $Oxyz$ , e la base  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_3\}$ , con

$$\mathbf{e}_r = (\sin \theta, -\cos \theta, 0)^T, \quad \mathbf{e}_t = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_r.$$

Le posizioni di  $P$  e del baricentro  $G$  del disco sono date da

$$\begin{aligned}\chi_P &= s\mathbf{e}_r, \\ \chi_G &= s\mathbf{e}_r + r\mathbf{e}_t.\end{aligned}$$

Notando che  $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_t$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_t = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$ , le velocità risultano

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P &= \dot{s}\mathbf{e}_r + s\dot{\theta}\mathbf{e}_t, \\ \mathbf{v}_G &= \mathbf{v}_P - r\dot{\theta}\mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

La velocità angolare del disco si vede subito essere la somma della velocità angolare della guida e della velocità angolare del disco nel caso in cui la guida sia ferma:

$$\boldsymbol{\omega} = \left( \dot{\theta} - \frac{\dot{s}}{r} \right) \mathbf{e}_3.$$

La seconda equazione cardinale della dinamica del disco rispetto al polo  $P$  porge

$$\dot{\mathbf{M}}_P = \mathbf{N}_P - m\mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_G.$$

Otteniamo

$$-m\mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_G = -mrs\dot{\theta}^2\mathbf{e}_3.$$

Chiamiamo  $H$  l'estremo fisso della molla:

$$\mathbf{N}_P = (\chi_G - \chi_P) \times [k(\chi_H - \chi_G)],$$

con

$$\chi_H = 2r\mathbf{e}_2 = 2r(\sin \theta\mathbf{e}_t - \cos \theta\mathbf{e}_r).$$

Risulta

$$\mathbf{N}_P = kr(2r \cos \theta + s)\mathbf{e}_3.$$

Calcoliamo  $\mathbf{M}_P$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_P &= \mathbf{M}_G + m(\chi_G - \chi_P) \times \mathbf{v}_G = I_{Gz}\boldsymbol{\omega} + mr\mathbf{e}_t \times [(\dot{s} - r\dot{\theta})\mathbf{e}_r + s\dot{\theta}\mathbf{e}_t] \\ &= \frac{3}{2}mr(r\dot{\theta} - \dot{s})\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

L'equazione richiesta, proiettata lungo  $\mathbf{e}_3$ , risulta (dopo aver diviso per  $r$ )

$$\frac{3}{2}m(r\ddot{\theta} - \ddot{s}) = k(2r \cos \theta + s) - ms\dot{\theta}^2.$$

ii)

L'energia potenziale della forza elastica risulta

$$\begin{aligned}V(\theta, s) &= \frac{k}{2}|\chi_H - \chi_G|^2 \\ &= \frac{k}{2}(5r^2 + s^2 + 4rs \cos \theta - 4r^2 \sin \theta).\end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio sono soluzioni del sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \theta} &= -2krs \sin \theta - 2kr^2 \cos \theta = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial s} &= ks + 2kr \cos \theta = 0.\end{aligned}$$

Risolvendo la seconda equazione rispetto ad  $s$  si ha

$$s = -2r \cos \theta$$

e sostituendo nella prima equazione si ottiene

$$\cos \theta (2 \sin \theta - 1) = 0.$$

Le configurazioni di equilibrio risultano

$$\begin{aligned}(\theta_1, s_1) &= \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), & (\theta_2, s_2) &= \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \\ (\theta_3, s_3) &= \left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{3}r\right), & (\theta_4, s_4) &= \left(\frac{5\pi}{6}, \sqrt{3}r\right).\end{aligned}$$

iii)

Per discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate calcoliamo la matrice hessiana  $V''(\theta, s)$ . Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\theta, s) &= -2krs \cos \theta + 2kr^2 \sin \theta, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}(\theta, s) &= k, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial s}(\theta, s) &= -2kr \sin \theta.\end{aligned}$$

Prima configurazione di equilibrio:

$$V''(\theta_1, s_1) = k \begin{pmatrix} 2r^2 & -2r \\ -2r & 1 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\theta_1, s_1) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.  
Seconda configurazione di equilibrio:

$$V''(\theta_2, s_2) = k \begin{pmatrix} -2r^2 & 2r \\ 2r & 1 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\det V''(\theta_2, s_2) < 0,$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è instabile.  
Terza configurazione di equilibrio:

$$V''(\theta_3, s_3) = k \begin{pmatrix} 4r^2 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}.$$



Notando che

$$\begin{aligned}\det V''(\theta_3, s_3) &> 0, \\ \text{tr } V''(\theta_3, s_3) &> 0,\end{aligned}$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Quarta configurazione di equilibrio:

$$V''(\theta_4, s_4) = k \begin{pmatrix} 4r^2 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}.$$

Notando che

$$\begin{aligned}\det V''(\theta_4, s_4) &> 0, \\ \text{tr } V''(\theta_4, s_4) &> 0,\end{aligned}$$

concludiamo che la configurazione di equilibrio è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

iv)

Per le due configurazioni di equilibrio instabili si nota che la guida è allineata all'asse  $Ox$ , inoltre  $P$  coincide con  $O$ . Nella configurazione  $(\theta_1, s_1)$  si ha

$$\chi_G = r\mathbf{e}_2$$

e la prima equazione cardinale della statica porge

$$\Phi_P^{(1)} = -kr\mathbf{e}_2.$$

Nella configurazione  $(\theta_2, s_2)$  si ha

$$\chi_G = -r\mathbf{e}_2$$

e la prima equazione cardinale della statica porge

$$\Phi_P^{(2)} = -\frac{3}{2}kr\mathbf{e}_2.$$

Per le due configurazioni di equilibrio stabili si nota che il centro del disco coincide con  $H$ , quindi l'estensione della molla è nulla. La prima equazione cardinale della statica porge

$$\Phi_P^{(3)} = \Phi_P^{(4)} = \mathbf{0}.$$

# Compito di Meccanica Razionale

## Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

27 Giugno 2024

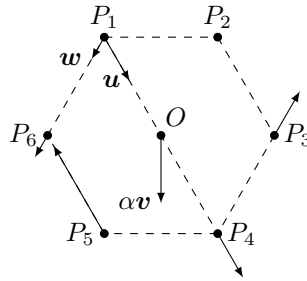
### Primo Esercizio

Si consideri il sistema di vettori applicati

$$\mathcal{S} = \{(\vec{w}, P_1), (\vec{u}, P_1), (-2\vec{w}, P_3), (\vec{u}, P_4), (-2\vec{u}, P_5), (\vec{w}, P_6), (\alpha\vec{v}, O)\},$$

dove  $P_1, \dots, P_6$  sono posti ai vertici di un esagono di lato  $\ell$  che ha centro in  $O$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{w}$ ,  $\vec{v}$  sono paralleli a  $P_4 - P_1$ ,  $P_6 - P_1$ ,  $P_5 - P_1$ , rispettivamente,  $\alpha$  è una costante e

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2, \quad |\vec{w}| = 1.$$



- i) Nei due casi  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$  dire se  $\mathcal{S}$  è equilibrato, motivando la risposta.
- ii) Nei due casi  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$  determinare un sistema di vettori applicati equivalente ad  $\mathcal{S}$  costituito dal minimo numero di vettori applicati.
- iii) Nel caso  $\alpha = 1$  mostrare che è possibile aggiungere ad  $\mathcal{S}$  un vettore  $\vec{f}$  applicato in un qualche punto  $Q$  dell'esagono in modo che l'asse centrale del nuovo sistema

$$\mathcal{S}' = \{\mathcal{S}, (\vec{f}, Q)\}$$

passi per  $P_1$  e  $P_5$ .

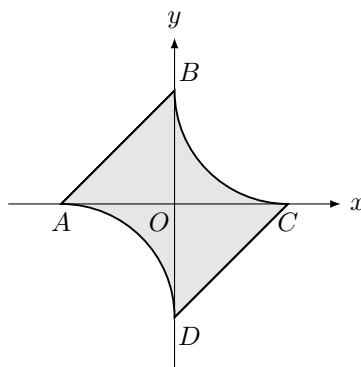
### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri una lamina omogenea  $ABCD$  di massa  $m$  con

$$A \equiv (-\ell, 0), \quad B \equiv (0, \ell), \quad C \equiv (\ell, 0), \quad D \equiv (0, -\ell).$$

La lamina è ottenuta dall'unione delle due lamine triangolari uguali  $AOB$ ,  $COD$  e di due porzioni uguali  $BOC$ ,  $AOD$ . I due bordi  $BC$  e  $AD$  corrispondono a due quarti di circonferenza con centro in  $(\ell, \ell)$  e  $(-\ell, -\ell)$ , rispettivamente.

- i) Calcolare i momenti di inerzia assiali  $I_{Ox}$ ,  $I_{Oy}$  della lamina.



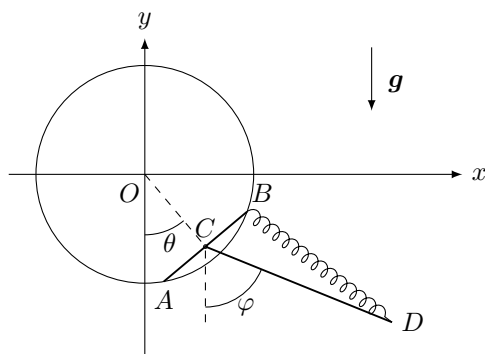
- ii) Dire se il sistema di riferimento  $Oxyz$  è principale di inerzia motivando la risposta.

### Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri il sistema meccanico costituito da un'asta omogenea  $AB$  di massa  $m$  e lunghezza  $R$  i cui estremi possono scivolare lungo una guida circolare fissa di centro in  $O$  e raggio  $R$ . Al baricentro dell'asta  $AB$  è vincolato tramite una coppia rotoidale mobile l'estremo  $C$  dell'asta omogenea  $CD$  di massa sempre  $m$  e lunghezza  $\ell$ . Una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega i punti  $B$  e  $D$ . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $\mathbf{g}$  parallela ad  $Oy$  e di modulo uguale a  $g$ . Si assuma che i vincoli siano ideali.

Si usino come parametri lagrangiani l'angolo  $\theta$  che il segmento  $CO$  forma con l'asse  $Oy$  e l'angolo  $\varphi$  che l'asta  $CD$  forma con l'asse  $Oy$ .

- i) Scrivere le equazioni pure del moto del sistema utilizzando le equazioni di Lagrange.
- ii) Assumendo che  $\ell = 2\sqrt{3}R$  e  $mg = kR$ , determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.<sup>1</sup>



<sup>1</sup>Potrebbe tornare utile la formula  $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ .

### Soluzione Primo Esercizio

i)

Introduciamo  $\hat{e}_3$  versore perpendicolare al piano su cui giace l'esagono e orientato come  $\vec{w} \times \vec{u}$ . Calcoliamo la risultante di  $\mathcal{S}$ :

$$\vec{R} = \vec{w} + \vec{u} - 2\vec{w} + \vec{u} + \vec{w} + \alpha\vec{v} = \alpha\vec{v}.$$

Se  $\alpha = 1$  allora  $\mathcal{S}$  non è equilibrato.

Calcoliamo il momento rispetto ad  $O$  nel caso  $\alpha = 0$ . Il sottosistema

$$\{(\vec{u}, P_1), (\vec{u}, P_4), (-2\vec{u}, P_5)\}$$

è equivalente alla coppia

$$\{(2\vec{u}, P_1), (-2\vec{u}, P_5)\}$$

il cui momento è dato da  $-2|\vec{u}|h\hat{e}_3$ , con  $h = \ell\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Inoltre, il sottosistema

$$\{(\vec{w}, P_1), (-2\vec{w}, P_3), (\vec{w}, P_6)\}$$

è equivalente alla coppia

$$\{(2\vec{w}, P_6), (-2\vec{w}, P_3)\}$$

il cui momento è dato da  $4|\vec{w}|h\hat{e}_3$ . Il momento risultante rispetto ad  $O$  nel caso  $\alpha = 0$  risulta

$$\vec{N}_O = (-2|\vec{u}| + 4|\vec{w}|)h\hat{e}_3 = \vec{0}.$$

Segue che  $\mathcal{S}$  con  $\alpha = 0$  è equilibrato.

ii)

Nel caso  $\alpha = 0$  il sistema  $\mathcal{S}$  è equivalente ad un sistema in cui non vi è nessun vettore applicato.

Nel caso  $\alpha = 1$ , poiché il trinomio invariante è nullo il sistema è equivalente alla risultante  $\vec{v}$  applicata in un qualsiasi punto dell'asse centrale, che coincide con la retta passante per  $O$  e parallela a  $\vec{v}$ .

iii)

Sicuramente  $\vec{f}$  deve essere parallela a  $\vec{v}$ . Poiché per  $\mathcal{S}'$  si ha che il trinomio invariante è nullo, allora per qualsiasi punto dell'asse centrale desiderato, cioè la retta passante per i punti  $P_1$  e  $P_5$ , il momento risultante deve essere nullo. Posso quindi scegliere

$$\{(\vec{f}, Q)\} = \{(\vec{v}, P_6)\}.$$

### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Chiamiamo  $\sigma$  la densità. Si ha

$$\sigma = \frac{2m}{\ell^2(6 - \pi)}.$$

Calcoliamo il momento di inerzia della porzione triangolare  $ODC$  rispetto all'asse  $Oy$ :

$$I_{Oy}^{ODC} = \sigma \int_0^\ell \int_{x-\ell}^0 x^2 dx dy = \sigma \int_0^\ell x^2(\ell - x) dx = \frac{\sigma \ell^4}{12} = \frac{m \ell^2}{6(6 - \pi)}.$$

Notiamo che

$$I_{Ox}^{ODC} = I_{Oy}^{ODC}$$

e che

$$I_{Ox}^{AOB} = I_{Oy}^{AOB} = I_{Oy}^{ODC}.$$

Calcoliamo il momento di inerzia della porzione di lamina  $OCB$  rispetto all'asse  $Ox$

$$I_{Ox}^{OCB} = I_{Ox}^q - I_{Ox}^c,$$

dove  $I_{Ox}^q$  è il contributo di una lamina quadrata di lato  $\ell$  e vertici  $O, B, C$  ed  $E = (\ell, \ell)$ , e  $I_{Ox}^c$  è il contributo di una lamina data da un quarto di disco ottenuto da un disco con centro in  $E$  e raggio  $\ell$ . Si ha

$$I_{Ox}^q = \sigma \int_0^\ell \int_0^\ell y^2 dx dy = \frac{\sigma \ell^4}{3}$$

e

$$\begin{aligned} I_{Ox}^c &= \sigma \int_0^{\pi/2} \int_0^\ell \rho(\ell - \rho \sin \theta)^2 d\rho d\theta \\ &= \sigma \ell^4 \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin^2 \theta - \frac{2}{3} \sin \theta \right) d\theta = \left( \frac{5\pi}{16} - \frac{2}{3} \right) \sigma \ell^4. \end{aligned}$$

Risulta

$$I_{Ox}^{OCB} = \left( 1 - \frac{5\pi}{16} \right) \sigma \ell^4 = \frac{2}{6 - \pi} \left( 1 - \frac{5\pi}{16} \right) m \ell^2.$$

Notiamo che

$$I_{Oy}^{OCB} = I_{Ox}^{OCB}$$

e che

$$I_{Ox}^{ADO} = I_{Oy}^{ADO} = I_{Oy}^{OCD}.$$

Abbiamo

$$I_{Ox} = I_{Oy} = 2I_{Oy}^{ODC} + 2I_{Ox}^{OCB} = \frac{m \ell^2}{6 - \pi} \left( \frac{13}{3} - \frac{5\pi}{4} \right).$$

ii)

Il momento di inerzia centrifugo della lamina è dato da

$$I_{xy} = 2(I_{xy}^{ODC} + I_{xy}^{OCB}),$$

ma si vede subito che

$$|I_{xy}^{OCB}| < |I_{xy}^{ODC}|.$$

Dunque, essendo  $I_{xy} \neq 0$ , il sistema di riferimento  $Oxyz$  non è principale di inerzia.

### Soluzione Terzo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  associata al riferimento  $Oxyz$ . Chiamiamo  $G$  il baricentro dell'asta  $CD$ .

Le posizioni di  $C, G, B, D$  sono date da

$$\begin{aligned}\chi_C &= h(\sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \theta \mathbf{e}_2), \\ \chi_G &= \chi_C + \frac{\ell}{2}(\sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2), \\ \chi_B &= \chi_C + \frac{R}{2}(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2), \\ \chi_D &= \chi_C + \ell(\sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2),\end{aligned}$$

con  $h = \sqrt{3}R/2$ . La velocità di  $G$  risulta

$$\mathbf{v}_G = \frac{1}{2} \left[ (\sqrt{3}R\dot{\theta} \cos \theta + \ell\dot{\varphi} \cos \varphi) \mathbf{e}_1 + (\sqrt{3}R\dot{\theta} \sin \theta + \ell\dot{\varphi} \sin \varphi) \mathbf{e}_2 \right].$$

Le velocità angolari delle due aste sono

$$\boldsymbol{\omega}_{AB} = \dot{\theta} \mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\omega}_{CD} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3.$$

L'energia cinetica dell'asta  $AB$  è data da

$$T_{AB} = \frac{1}{2} I_{Oz} |\boldsymbol{\omega}_{AB}|^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{mR^2}{12} + mh^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{5}{12} mR^2 \dot{\theta}^2.$$

L'energia cinetica dell'asta  $CD$  è data da

$$\begin{aligned}T_{CD} &= \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_G|^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} |\boldsymbol{\omega}_{CD}|^2 \\ &= \frac{1}{8} m \left[ 3R^2 \dot{\theta}^2 + \ell^2 \dot{\varphi}^2 + 2\sqrt{3}R\ell\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) \right] + \frac{m\ell^2}{24} \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{m}{2} \left[ \frac{3}{4} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{3} \ell^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} R\ell\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) \right].\end{aligned}$$

L'energia cinetica del sistema risulta

$$\begin{aligned}T &= T_{AB} + T_{CD} \\ &= \frac{m}{2} \left[ \frac{19}{12} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{3} \ell^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} R\ell\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) \right].\end{aligned}$$

L'energia potenziale si trova dalla formula

$$\begin{aligned}V &= mg(y_C + y_G) + \frac{k}{2} |\chi_B - \chi_D|^2 \\ &= -mg \left( \sqrt{3}R \cos \theta + \frac{\ell}{2} \cos \varphi \right) + \frac{k}{2} \left[ \ell^2 + \frac{R^2}{4} + R\ell \sin(\theta - \varphi) \right].\end{aligned}$$

Dalla lagrangiana  $L = T - V$  possiamo scrivere le due equazioni di Lagrange

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial L}{\partial \varphi},\end{aligned}$$

come segue:

$$\begin{aligned}\frac{19}{12}R\ddot{\theta} + \frac{\sqrt{3}\ell}{4} [\ddot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin(\theta - \varphi)] &= -g\sqrt{3} \sin \theta - \frac{k\ell}{2m} \cos(\theta - \varphi), \\ \frac{1}{3}\ell\ddot{\varphi} + \frac{\sqrt{3}R}{4} [\ddot{\theta} \cos(\theta - \varphi) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \varphi)] &= -\frac{g}{2} \sin \varphi + \frac{kR}{2m} \cos(\theta - \varphi).\end{aligned}$$

ii)

L'energia potenziale a meno di termini costanti additivi è data da

$$\tilde{V} = -mg \left( \sqrt{3}R \cos \theta + \frac{\ell}{2} \cos \varphi \right) + \frac{kR\ell}{2} \sin(\theta - \varphi).$$

Ponendo  $\ell = 2\sqrt{3}R$  e  $mg = kR$ , diventa

$$\tilde{V} = kR^2\sqrt{3} [-\cos \theta - \cos \varphi + \sin(\theta - \varphi)].$$

Le configurazioni di equilibrio sono soluzioni del sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} &= kR^2\sqrt{3} [\sin \theta + \cos(\theta - \varphi)] = 0, \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \varphi} &= kR^2\sqrt{3} [\sin \varphi - \cos(\theta - \varphi)] = 0.\end{aligned}$$

Sommando queste due equazioni si ottiene

$$\sin \theta = -\sin \varphi$$

che ha come soluzioni

$$\theta = -\varphi, \quad \theta = \varphi + \pi.$$

Sostituendo  $\theta = -\varphi$  nella seconda equazione del sistema si ottiene

$$\sin \varphi - \cos(2\varphi) = 2 \sin^2 \varphi + \sin \varphi - 1 = 0$$

che è risolta da

$$\sin \varphi = -1, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2}.$$

Si ottengono allora le configurazioni di equilibrio

$$(\theta_1, \varphi_1) = \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right), \quad (\theta_2, \varphi_2) = \left( \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right), \quad (\theta_3, \varphi_3) = \left( \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right).$$

Infine, sostituendo  $\theta = \pi + \varphi$  nella seconda equazione si ottiene

$$\sin \varphi = -1$$

che non produce nuove configurazioni di equilibrio.

# Compito di Meccanica Razionale

## Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

18 Luglio 2024

### Primo Esercizio

Si consideri il moto unidimensionale di un punto di massa unitaria definito dall'equazione differenziale

$$\ddot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

con

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

- i) Scrivere l'espressione dell'energia potenziale  $V(x)$  assumendo  $V(1) = -5$ .
- ii) Calcolare i valori dell'energia che corrispondono agli equilibri e tracciare il ritratto di fase.
- iii) Considerato il moto corrispondente alle condizioni iniziali

$$(x_0, \dot{x}_0) = (-3/2, \sqrt{5/3}),$$

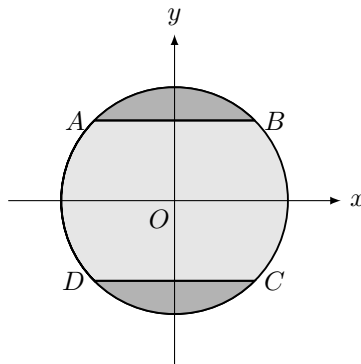
trovare i punti di inversione del moto e determinare il valore massimo assunto durante il moto da  $|\dot{x}|$ .

- iv) Descrivere il moto corrispondente alle condizioni iniziali

$$(x_0, \dot{x}_0) = (1/2, 1).$$

### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri una lamina che ha la forma di un disco di raggio  $R$  e centro in  $O$ . Consideriamo i vertici  $A, B, C, D$  del quadrato inscritto nel bordo del disco con i lati paralleli agli assi  $Ox$  e  $Oy$ . Congiungiamo i vertici  $A, B$  e  $C, D$ . La porzione del disco  $ABCD$  ha densità  $\sigma$ , mentre le due porzioni rimanenti, hanno densità  $2\sigma$ .





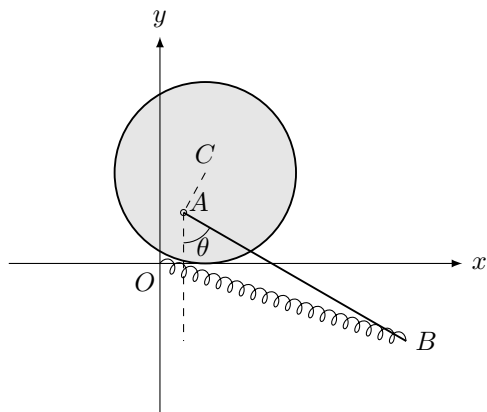
- i) Sia  $m$  la massa della lamina. Scrivere la relazione tra  $\sigma$  ed  $m$ .
- ii) Calcolare i momenti di inerzia assiali  $I_{Ox}$ ,  $I_{Oy}$  della lamina.

### Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  che rotola senza strisciare sulla guida  $Ox$ . In un punto  $A$  solidale al disco è vincolato tramite una coppia rotoidale mobile l'estremo di un'asta  $AB$  omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$ . Il punto  $A$  è distante  $R/2$  dal baricentro  $C$  del disco. Assumiamo che nell'istante in cui il punto di contatto  $P$  tra il disco e la guida  $Ox$  coincide con l'origine  $O$  il punto  $A$  appartenga all'asse  $Oy$ . Una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega i punti  $O$  e  $B$ . Si assuma che i vincoli siano ideali.

Si usino come parametri lagrangiani l'angolo  $\theta$  che l'asta  $AB$  forma con la direzione dell'asse  $Oy$  e l'ascissa  $s$  di  $P$ .

- i) Scrivere le equazioni pure del moto del sistema utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.
- ii) Assumendo che  $\ell = R/4$ , determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.



### Soluzione Primo Esercizio

i)

L'energia potenziale è data da

$$V(x) = - \int f(x) dx = \int \left( \frac{1}{x^2} - 1 \right) d\rho = -x - \frac{1}{x} + c,$$

dove la costante  $c$  si determina dalla condizione  $V(1) = -5$ :

$$V(1) = -2 + c = -5 \quad \rightarrow \quad c = -3.$$

ii)

I punti di equilibrio sono le coppie  $(x_0, \dot{x}_0)$ , con  $\dot{x}_0 = 0$  e  $V'(x_0) = 0$ . Abbiamo

$$V'(x) = \frac{1}{x^2} - 1 = 0,$$

da cui si ha che  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$  sono due punti di equilibrio. I valori assunti dall'energia in corrispondenza di tali punti sono

$$E(-1, 0) = V(-1) = -1, \quad E(1, 0) = V(1) = -5.$$

Notando che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} V(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^-} V(x) &= +\infty, \end{aligned}$$

si può tracciare il grafico di  $V(x)$  (figura 1) e quindi il ritratto di fase (figura 2).

iii)

Calcoliamo il valore assunto dall'energia:

$$\bar{E} = E(x_0, \dot{x}_0) = 0.$$

I punti di inversione sono soluzioni dell'equazione

$$\bar{E} - V(x) = 0 \quad \rightarrow \quad V(x) = 0.$$

Risultano

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Inoltre si ha che  $|\dot{x}|$  assume il valore massimo quando  $V(x)$  assume il suo valore minimo, cioè  $V(-1) = -1$ . Dunque

$$\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + V(-1) = \bar{E} = 0 \quad \rightarrow \quad |\dot{x}| = \sqrt{2}.$$

iv)

Calcoliamo il valore assunto dall'energia:

$$\bar{E} = E(x_0, \dot{x}_0) = -5.$$

Riconosciamo che è un valore critico dell'energia, corrispondente al massimo dell'energia potenziale. Il moto corrispondente è un moto limitato con

$$x(t) \rightarrow 1 \quad \text{per} \quad t \rightarrow +\infty.$$

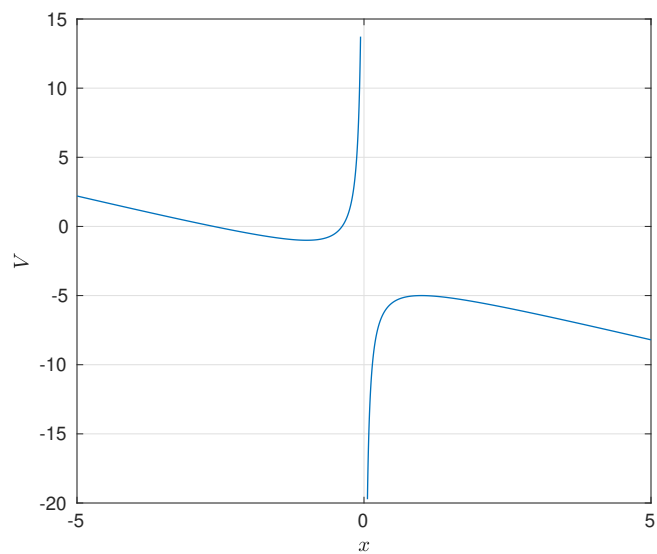


Figura 1: Grafico di  $V(x)$ .

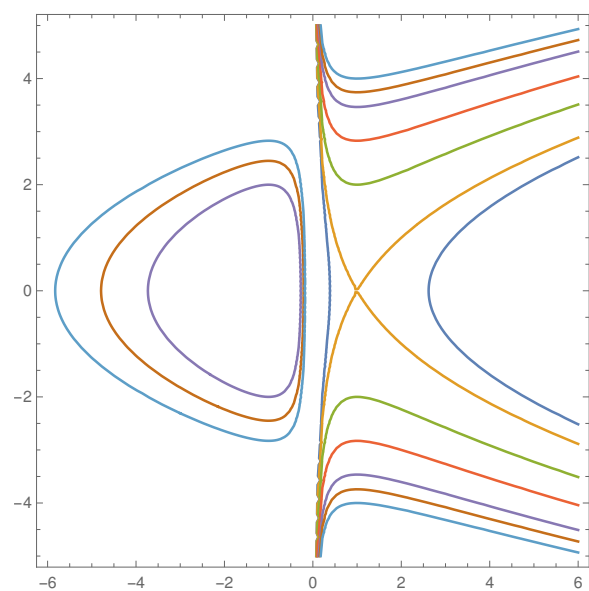


Figura 2: Ritratto di fase nel piano  $(x, \dot{x})$ . Si noti che valori di energia  $\geq -1$  producono curve di livello sia nel semipiano  $x < 0$  sia in quello  $x > 0$ .

### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Il lato del quadrato  $ABCD$  ha lato uguale a  $\sqrt{2}R$ . Si ha

$$m = \sigma \left( 2R^2 + \frac{\pi R^2 - 2R^2}{2} \right) + 2\sigma \left( \frac{\pi R^2 - 2R^2}{2} \right) = \frac{(3\pi - 2)}{2} \sigma R^2.$$

ii)

Calcoliamo il momento di inerzia  $I_{Ox}$ .

Il contributo della mezzaluna  $BC$  di densità  $\sigma$  è

$$I_{Ox}^{BC} = \sigma \left( 2 \int_0^R \int_0^{\pi/4} \rho^3 \sin^2 \theta d\rho d\theta - 2 \int_0^{\sqrt{2}R/2} \int_0^x y^2 dx dy \right) = \sigma R^4 \left( \frac{\pi}{16} - \frac{1}{6} \right).$$

Il contributo del disco di densità  $\sigma$  è

$$I_{Ox}^d = \frac{\sigma \pi R^4}{4}.$$

Il contributo del quadrato  $ABCD$  di densità  $\sigma$  è

$$I_{Ox}^q = \frac{\sigma R^4}{3}.$$

Risulta

$$I_{Ox} = 2I_{Ox}^d - I_{Ox}^q - 2I_{Ox}^{BC} = \frac{3}{8} \pi \sigma R^4 = \frac{3\pi}{4(3\pi - 2)} m R^2.$$

Calcoliamo il momento di inerzia  $I_{Oy}$ .

Il contributo della mezzaluna  $BC$  di densità  $\sigma$  è

$$I_{Oy}^{BC} = \sigma \left( 2 \int_0^R \int_0^{\pi/4} \rho^3 \cos^2 \theta d\rho d\theta - 2 \int_0^{\sqrt{2}R/2} \int_0^x x^2 dx dy \right) = \frac{\pi}{16} \sigma R^4.$$

Il contributo del disco di densità  $\sigma$  è

$$I_{Oy}^d = I_{Ox}^d.$$

Il contributo del quadrato  $ABCD$  di densità  $\sigma$  è

$$I_{Oy}^q = I_{Ox}^q.$$

Risulta

$$I_{Oy} = 2I_{Oy}^d - I_{Oy}^q - 2I_{Oy}^{BC} = \left( \frac{3}{8} \pi - \frac{1}{3} \right) \sigma R^4 = \left( \frac{3}{4} \pi - \frac{2}{3} \right) \frac{m R^2}{3\pi - 2}.$$

### Soluzione Terzo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  associata al riferimento  $Oxyz$ .

Notiamo subito che l'angolo tra il segmento  $CA$  e la retta passante per  $C$  e parallela ad  $Oy$  è dato da  $s/R$  per la condizione di puro rotolamento. Le coordinate dei punti  $P, C, A, B$  sono date da

$$\begin{aligned}\chi_P &= s\mathbf{e}_1, \\ \chi_C &= s\mathbf{e}_1 + R\mathbf{e}_2, \\ \chi_A &= \left(s - \frac{R}{2} \sin \frac{s}{R}\right) \mathbf{e}_1 + \left(R - \frac{R}{2} \cos \frac{s}{R}\right) \mathbf{e}_2, \\ \chi_B &= \chi_A + \ell \sin \theta \mathbf{e}_1 - \ell \cos \theta \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Chiamiamo  $G$  il baricentro dell'asta, si ha

$$\chi_G = \chi_A + \frac{\ell}{2} \sin \theta \mathbf{e}_1 - \frac{\ell}{2} \cos \theta \mathbf{e}_2.$$

Scriviamo la seconda equazione cardinale della dinamica dell'asta rispetto ad  $A$ :

$$\dot{\mathbf{M}}_A = \mathbf{N}_A - m\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_G.$$

Abbiamo

$$\mathbf{N}_A = (\chi_B - \chi_A) \times \mathbf{F}_{el} = k\ell \left[ \frac{R}{2} \sin \left( \theta + \frac{s}{R} \right) - s \cos \theta - R \sin \theta \right] \mathbf{e}_3,$$

con

$$\mathbf{F}_{el} = -k\chi_B.$$

Inoltre

$$m\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_G = \frac{m\ell\dot{\theta}\dot{s}}{4} \left[ 2 \sin \theta - \sin \left( \theta + \frac{s}{R} \right) \right] \mathbf{e}_3.$$

Infine, da

$$\mathbf{M}_A = I_{A,z} \boldsymbol{\omega}^a + m(\chi_G - \chi_A) \times \mathbf{v}_A,$$

con

$$I_{A,z} = \frac{m\ell^2}{3}, \quad \boldsymbol{\omega}^a = \dot{\theta} \mathbf{e}_3,$$

si ottiene

$$\mathbf{M}_A = \frac{m\ell^2\dot{\theta}}{3} \mathbf{e}_3 - \frac{m\ell\dot{s}}{4} \left[ \cos \left( \theta + \frac{s}{R} \right) - 2 \cos \theta \right] \mathbf{e}_3$$

e

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}}_A &= \frac{m\ell^2\ddot{\theta}}{3} \mathbf{e}_3 - \frac{m\ell\ddot{s}}{4} \left[ \cos \left( \theta + \frac{s}{R} \right) - 2 \cos \theta \right] \mathbf{e}_3 \\ &\quad - \frac{m\ell\dot{s}}{4} \left[ 2\dot{\theta} \sin \theta - \left( \dot{\theta} + \frac{\dot{s}}{R} \right) \sin \left( \theta + \frac{s}{R} \right) \right] \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

La prima equazione pura del moto risulta

$$\begin{aligned}\frac{\ell\ddot{\theta}}{3} - \frac{\ddot{s}}{4} \left[ \cos \left( \theta + \frac{s}{R} \right) - 2 \cos \theta \right] + \frac{\dot{s}^2}{4R} \sin \left( \theta + \frac{s}{R} \right) = \\ \frac{k}{m} \left[ \frac{R}{2} \sin \left( \theta + \frac{s}{R} \right) - s \cos \theta - R \sin \theta \right].\end{aligned}$$

Scriviamo la seconda equazione cardinale della dinamica del sistema rispetto a  $P$  (l'apice  $a$  si riferisce all'asta e l'apice  $d$  al disco):

$$\dot{\mathbf{M}}_P^a + \dot{\mathbf{M}}_P^d = \mathbf{N}_P - \mathbf{v}_P \times (m\mathbf{v}_G + M\mathbf{v}_C).$$

Abbiamo

$$\mathbf{v}_P \times (m\mathbf{v}_G + M\mathbf{v}_C) = m\mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_G = \frac{m\dot{s}}{2} \left( \dot{s} \sin \frac{s}{R} + \ell \dot{\theta} \sin \theta \right) \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{N}_P = (\boldsymbol{\chi}_B - \boldsymbol{\chi}_P) \times \mathbf{F}_{el} = k\boldsymbol{\chi}_P \times \boldsymbol{\chi}_B = ks \left( R - \frac{R}{2} \cos \frac{s}{R} - \ell \cos \theta \right) \mathbf{e}_3.$$

Inoltre, da

$$\mathbf{M}_P^d = I_{P,z}^d \boldsymbol{\omega}^d,$$

con

$$I_{P,z}^d = \frac{3}{2}MR^2, \quad \boldsymbol{\omega}^d = -\frac{\dot{s}}{R}\mathbf{e}_3,$$

si ottiene

$$\mathbf{M}_P^d = -\frac{3MR\dot{s}}{2}\mathbf{e}_3.$$

Infine, da

$$\mathbf{M}_P^a = \mathbf{M}_A^a + m(\boldsymbol{\chi}_A - \boldsymbol{\chi}_P) \times \mathbf{v}_G,$$

con  $\mathbf{M}_A^a$  già trovato prima, si ottiene

$$\mathbf{M}_P^a = m \left( R\dot{s} \left( \cos \frac{s}{R} - \frac{5}{4} \right) + \frac{\ell}{4}(R\dot{\theta} - \dot{s}) \left[ \cos \left( \theta + \frac{s}{R} \right) - 2 \cos \theta \right] + \frac{\ell^2 \dot{\theta}}{3} \right) \mathbf{e}_3$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}_P^a = m \left( R\ddot{s} \left( \cos \frac{s}{R} - \frac{5}{4} \right) - \dot{s}^2 \sin \frac{s}{R} + \frac{\ell}{4}(R\ddot{\theta} - \ddot{s}) \left[ \cos \left( \theta + \frac{s}{R} \right) - 2 \cos \theta \right] \right. \\ \left. + \frac{\ell}{4}(R\dot{\theta} - \dot{s}) \left[ 2\dot{\theta} \sin \theta - \left( \dot{\theta} + \frac{\dot{s}}{R} \right) \sin \left( \theta + \frac{s}{R} \right) \right] + \frac{\ell^2 \ddot{\theta}}{3} \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

La seconda equazione pura del moto risulta

$$\begin{aligned} R\ddot{s} \left( \cos \frac{s}{R} - \frac{5}{4} - \frac{3M}{2m} \right) - \frac{\dot{s}^2}{2} \sin \frac{s}{R} + \frac{\ell}{4}(R\ddot{\theta} - \ddot{s}) \left[ \cos \left( \theta + \frac{s}{R} \right) - 2 \cos \theta \right] \\ - \frac{\ell}{4R}(R^2 \dot{\theta}^2 - \dot{s}^2) \sin \left( \theta + \frac{s}{R} \right) + \frac{\ell R \dot{\theta}^2}{2} \sin \theta + \frac{\ell^2 \ddot{\theta}}{3} = \\ \frac{ks}{m} \left( R - \frac{R}{2} \cos \frac{s}{R} - \ell \cos \theta \right). \end{aligned}$$

ii)

L'energia potenziale della forza elastica è data da

$$V(\theta, s) = \frac{k}{2} |\boldsymbol{\chi}_B|^2.$$

A meno di costanti additive risulta

$$\begin{aligned} V(\theta, s) = \\ \frac{k}{2} \left( s^2 + 2s\ell \sin \theta - 2R\ell \cos \theta - sR \sin \frac{s}{R} - R^2 \cos \frac{s}{R} + R\ell \cos \left( \theta + \frac{s}{R} \right) \right). \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio sono soluzioni del sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \theta} &= k\ell \left( s \cos \theta + R \sin \theta - \frac{R}{2} \sin \left( \theta + \frac{s}{R} \right) \right) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial s} &= k \left( s + \ell \sin \theta - \frac{s}{2} \cos \frac{s}{R} - \frac{\ell}{2} \sin \left( \theta + \frac{s}{R} \right) \right) = 0.\end{aligned}$$

Moltiplicando la seconda equazione per  $R$  e sottraendo la nuova seconda equazione dalla prima si ottiene

$$s \left( R - \frac{R}{2} \cos \frac{s}{R} - \ell \cos \theta \right) = 0.$$

Da  $s = 0$  si trovano subito le configurazioni di equilibrio

$$(\theta_1, s_1) = (0, 0), \quad (\theta_2, s_2) = (\pi, 0).$$

Ponendo  $\ell = R/4$  si vede che

$$R - \frac{R}{2} \cos \frac{s}{R} - \ell \cos \theta = \frac{R}{4} \left( 4 - 2 \cos \frac{s}{R} - \cos \theta \right),$$

che non si annulla mai. Non ci sono altre configurazioni di equilibrio.

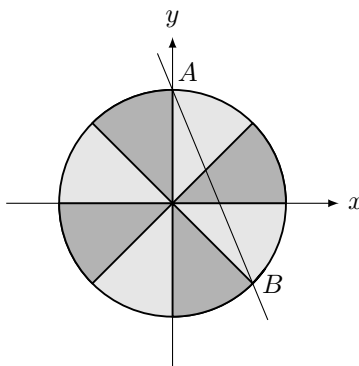
# Compito di Meccanica Razionale

## Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

12 Settembre 2024

### Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano  $Oxy$  si consideri una lamina di massa  $m$  che ha la forma di un disco di raggio  $R$  e centro in  $O$ . Il disco è formato da otto settori circolari di uguale area e diversa densità, ottenuti considerando gli assi  $Ox$ ,  $Oy$  e le bisettrici del primo e del secondo quadrante. I quattro settori di colore più scuro hanno densità  $2\sigma$  e gli altri quattro hanno densità  $\sigma$ .



- i) Calcolare la matrice di inerzia della lamina rispetto al sistema di riferimento  $Oxyz$ .
- ii) Calcolare il momento di inerzia assiale della lamina rispetto alla retta passante per i punti  $A \equiv (0, R)$ ,  $B \equiv \frac{\sqrt{2}}{2}(R, -R)$ .

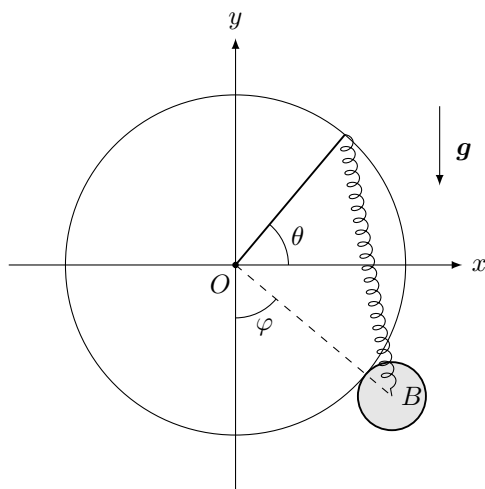


### Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$ . Sul piano verticale  $Oxy$  si consideri una guida circolare fissa di raggio  $\ell$  con centro in  $O$  sulla quale rotola senza strisciare un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $r$ . Un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $\ell$  ha un estremo vincolato in  $O$  attraverso una coppia rotoidale fissa, mentre l'altro estremo è collegato al baricentro  $B$  del disco attraverso una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione  $\mathbf{g}$  parallela ad  $Oy$  e di modulo uguale a  $g$ . Si assuma che i vincoli siano ideali.

Si usino come parametri lagrangiani l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con la direzione dell'asse  $Ox$  e l'angolo  $\varphi$  che il segmento  $OB$  forma con la direzione dell'asse  $Oy$ .

- i) Scrivere le equazioni pure del moto del sistema utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.
- ii) Assumendo che  $m\ell = 2M(\ell+r)$ , determinare le configurazioni di equilibrio del sistema.



### Soluzione Primo Esercizio

i)

Notiamo subito che i momenti di inerzia rispetto agli assi  $Ox$  e  $Oy$  sono uguali tra loro. Calcoliamo allora il momento di inerzia rispetto all'asse  $Oz$ . Lo calcoliamo come la somma del contributo di un semidisco di densità  $\sigma$  e del contributo di un semidisco di densità  $2\sigma$ :

$$I_{Oz} = \frac{1}{4}\sigma\pi R^4 + \frac{2}{4}\sigma\pi R^4 = \frac{3}{4}\sigma\pi R^4.$$

Allora

$$I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{3}{8}\sigma\pi R^4.$$

Si vede che il sistema di riferimento  $Oxyz$  è principale di inerzia. Infatti il contributo al momento di inerzia centrifugo dei quattro settori di densità  $\sigma$  è nullo così come il contributo dei quattro settori di densità  $2\sigma$ . Consideriamo per esempio i settori di densità  $\sigma$  (un ragionamento analogo vale per quelli di densità  $2\sigma$ ). I settori nel primo e nel terzo quadrante danno lo stesso contributo, potendo ottenere l'uno dall'altro attraverso la mappa  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ . Lo stesso dicasi per i settori nel secondo e nel quarto quadrante. Inoltre, il contributo del settore nel primo quadrante è opposto a quello del settore nel quarto quadrante dato che possiamo ottenere l'uno dall'altro attraverso la mappa  $(x, y) \rightarrow (-y, x)$ .

Infine, dato che

$$\sigma = \frac{2m}{3\pi R^2},$$

otteniamo la matrice di inerzia

$$I_O = \frac{mR^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

ii)

Il momento di inerzia della lamina rispetto ad una retta parallela a quella assegnata e passante per  $O$  è dato da  $mR^2/4$ . Notiamo inoltre che  $O$  coincide con il baricentro della lamina. L'equazione della retta  $r$  passante per  $A$  e  $B$  è

$$y = -(1 + \sqrt{2})x + R.$$

Introduciamo un versore con la stessa direzione di questa retta:

$$\mathbf{u} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}}, \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, 0 \right),$$

ed il vettore posizione rispetto ad  $O$  del punto di intersezione della retta  $r$  con l'asse  $Ox$ :

$$\mathbf{v} = \left( \frac{R}{1 + \sqrt{2}}, 0, 0 \right).$$

La distanza  $d$  di  $O$  dalla retta  $r$  si calcola come segue:

$$d = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \frac{R}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Il momento di inerzia cercato è allora

$$I_r = \frac{mR^2}{4} + md^2 = \frac{3 - \sqrt{2}}{4}mR^2.$$

### Soluzione Secondo Esercizio

i)

Introduciamo la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  associata al riferimento  $Oxyz$ .

Chiamiamo  $A$  l'estremo libero dell'asta,  $G$  il suo baricentro e  $P$  il punto di contatto tra il disco e la guida. Abbiamo

$$\begin{aligned}\chi_A &= \ell(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2), \\ \chi_G &= \frac{1}{2} \chi_A, \\ \chi_P &= \ell(\sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2), \\ \chi_B &= (\ell + r)(\sin \varphi \mathbf{e}_1 - \cos \varphi \mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

Scriviamo la seconda equazione cardinale della dinamica dell'asta rispetto ad  $O$ :

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O.$$

La forza elastica agente su  $A$  è data da

$$\mathbf{F}_{el} = k(\chi_B - \chi_A).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_O &= (\chi_A - \chi_O) \times \mathbf{F}_{el} - (\chi_A - \chi_O) \times mg\mathbf{e}_2 \\ &= -k\ell(\ell + r) \cos(\theta - \varphi) \mathbf{e}_3 - \frac{mg\ell}{2} \cos \theta \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\mathbf{M}_O = I_{O,z} \boldsymbol{\omega}^a = \frac{m\ell^2}{3} \dot{\theta} \mathbf{e}_3,$$

con

$$I_{O,z} = \frac{m\ell^2}{3}, \quad \boldsymbol{\omega}^a = \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

La prima equazione pura del moto risulta

$$\frac{m\ell}{3} \ddot{\theta} = -k(\ell + r) \cos(\theta - \varphi) - \frac{mg}{2} \cos \theta.$$

Scriviamo la seconda equazione cardinale della dinamica del disco rispetto al punto di contatto  $P$  tra il disco e la guida:

$$\dot{\mathbf{M}}_P = \mathbf{N}_P.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_P &= -(\chi_B - \chi_P) \times (\mathbf{F}_{el} + Mg\mathbf{e}_2) \\ &= k\ell r \cos(\theta - \varphi) \mathbf{e}_3 - Mgr \sin \varphi \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\mathbf{M}_P = I_{P,z} \boldsymbol{\omega}^d = \frac{3}{2} (\ell + r) Mr \dot{\varphi} \mathbf{e}_3,$$

con

$$I_{P,z} = \frac{3}{2} Mr^2, \quad \boldsymbol{\omega}^d = \left( \frac{\ell}{r} + 1 \right) \dot{\varphi} \mathbf{e}_3.$$

La seconda equazione pura del moto risulta

$$\frac{3}{2}(\ell + r) M \ddot{\varphi} = k\ell \cos(\theta - \varphi) - Mg \sin \varphi.$$

ii)

L'energia potenziale delle forze attive è data da

$$V(\theta, \varphi) = \frac{k}{2} |\chi_B - \chi_A|^2 - (mg\chi_G + Mg\chi_B) \cdot \mathbf{e}_2.$$

A meno di costanti additive risulta

$$V(\theta, \varphi) = k\ell(\ell + r) \sin(\theta - \varphi) + mg\frac{\ell}{2} \sin \theta - Mg(\ell + r) \cos \varphi.$$

Le configurazioni di equilibrio sono soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= k\ell(\ell + r) \cos(\theta - \varphi) + mg\frac{\ell}{2} \cos \theta = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= -k\ell(\ell + r) \cos(\theta - \varphi) + Mg(\ell + r) \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Sommando le due equazioni si ottiene

$$mg\frac{\ell}{2} \cos \theta + Mg(\ell + r) \sin \varphi = 0.$$

Assumendo che  $mg\ell = 2Mg(\ell + r)$  scriviamo

$$\cos \theta = -\sin \varphi,$$

che ha come soluzioni

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} + \theta, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} - \theta. \quad (1)$$

Sostituendo la prima espressione che compare in (1) nella seconda equazione del sistema si ha

$$\sin \varphi = 0.$$

Allora esistono le due configurazioni di equilibrio

$$(\theta_1, \varphi_1) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad (\theta_2, \varphi_2) = \left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right).$$

Sostituendo la seconda espressione che compare in (1) nella seconda equazione del sistema si ha

$$k\ell \sin(2\theta) - Mg \cos \theta = 0$$

che può essere riscritta come

$$\cos \theta (2k\ell \sin \theta - Mg) = 0.$$

Allora esistono le altre due configurazioni di equilibrio

$$(\theta_3, \varphi_3) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad (\theta_4, \varphi_4) = \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right).$$

Inoltre, se

$$\frac{Mg}{2k\ell} < 1,$$

esistono due ulteriori configurazioni di equilibrio:

$$(\theta_5, \varphi_5) = \left(\arcsin \frac{Mg}{2k\ell}, \frac{3\pi}{2} - \theta_5\right) \quad (\theta_6, \varphi_6) = \left(\pi - \theta_5, \frac{3\pi}{2} - \theta_6\right).$$