

# Capitolo 9

## Le equazioni cardinali della Dinamica

Studiamo la dinamica di sistemi composti da punti materiali e corpi rigidi, eventualmente soggetti ad altri vincoli. Lo studio è svolto utilizzando le equazioni cardinali. Mostriamo inoltre come calcolare le reazioni vincolari, cioè le forze esercitate dai vincoli sul sistema per mantenere le restrizioni imposte sulle posizioni e velocità. Trattiamo infine le equazioni di Eulero per il moto di un corpo rigido con un punto fisso  $O$  e la descrizione del moto dovuta a Poincot nel caso in cui il momento delle forze esterne rispetto ad  $O$  sia nullo (moti per inerzia).

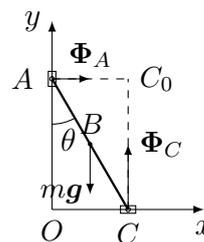
### 9.1 Equazioni cardinali e moti rigidi

Richiamiamo le due equazioni cardinali della Dinamica per un sistema di  $N$  punti materiali (5.8):

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_B &= \mathbf{R}^{(E)} \\ \dot{\mathbf{M}}_Q &= -m\mathbf{v}_Q \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_Q^{(E)} \end{cases} \quad (9.1)$$

Possiamo usare le equazioni (9.1) per determinare il moto di un corpo rigido, anche soggetto ad altri vincoli. Consideriamo un esempio semplice e determiniamo le equazioni del moto in diversi modi.

**Esempio 19.** In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento  $\Sigma = Oxyz$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Studiamo il moto di un'asta omogenea di estremi  $A, C$ , di lunghezza  $2\ell$  e massa  $m$ , che scivola mantenendo gli estremi sui due assi coordinati  $Ox, Oy$ . Assumiamo che il sistema sia soggetto alla forza di gravità, di accelerazione  $g$ , e che gli assi coordinati sviluppino le reazioni vincolari  $\Phi_A \mathbf{e}_1, \Phi_C \mathbf{e}_2$  sugli estremi dell'asta. Le componenti  $\Phi_A, \Phi_C$  sono incognite. Usiamo come coordinata l'angolo  $\theta$  che l'asta forma con la direzione verticale.



La velocità angolare dell'asta è  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_3$ . Siamo interessati a scrivere delle equazioni che abbiano una forma semplice e che siano equazioni pure, cioè non contengano reazioni vincolari. Scriviamo la seconda equazione cardinale per l'asta facendo tre scelte diverse per il polo  $Q$ .

i)  $Q = O$ , l'origine del riferimento:

$$\dot{\mathbf{M}}_O = -m\mathbf{v}_O \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_O = \mathbf{N}_O, \quad (9.2)$$

ii)  $Q = B$ , il baricentro dell'asta:

$$\dot{\mathbf{M}}_B = -m\mathbf{v}_B \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_B = \mathbf{N}_B, \quad (9.3)$$

iii)  $Q = C_0$ , il centro istantaneo di rotazione:<sup>1</sup>

$$\dot{\mathbf{M}}_{C_0} = -m\mathbf{v}_{C_0} \times \mathbf{v}_B + \mathbf{N}_{C_0} = \mathbf{N}_{C_0}. \quad (9.5)$$

<sup>1</sup>Al variare di  $\theta$  il centro istantaneo di rotazione  $C_0$  è un punto sempre diverso in un riferimento solidale al corpo, oltre che nel riferimento  $\Sigma$ . Le coordinate di  $C_0$  in  $\Sigma$  sono

$$\mathbf{x}_{C_0} = 2\ell(\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2),$$

quindi il termine  $-m\mathbf{v}_{C_0} \times \mathbf{v}_B$  è nullo perchè

$$\mathbf{v}_{C_0} = 2\dot{\theta}\ell(\cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \theta \mathbf{e}_2) \quad (9.4)$$

è parallelo a  $\mathbf{v}_B$ . Quando usiamo la formula fondamentale (6.19) con il centro istantaneo di rotazione  $C_0$  abbiamo  $\mathbf{v}_{C_0} = \mathbf{0}$ , perchè stiamo considerando la velocità di un punto solidale al corpo, cioè stiamo calcolando il limite del rapporto incrementale in cui appaiono le coordinate dello stesso punto del corpo a due tempi diversi, quindi non possiamo usare la (9.4). Nell'Esempio 19 la confusione tra le due velocità non produce effetti sulla forma dell'equazione, ma non è sempre così. Questa difficoltà nasce dalla notazione utilizzata tradizionalmente, che è la stessa per le due velocità.

La iii) è l'unica equazione pura, infatti

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_O &= \mathbf{x}_A \times \Phi_A \mathbf{e}_1 + \mathbf{x}_C \times \Phi_C \mathbf{e}_2 - \mathbf{x}_B \times mg \mathbf{e}_2 = \\
 &= (-2\Phi_A \cos \theta + 2\Phi_C \sin \theta - mg \sin \theta) \ell \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{N}_B &= (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \times \Phi_A \mathbf{e}_1 + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B) \times \Phi_C \mathbf{e}_2 = \\
 &= \ell(\sin \theta \mathbf{e}_1 - \cos \theta \mathbf{e}_2) \times (-\Phi_A \mathbf{e}_1 + \Phi_C \mathbf{e}_2) = \\
 &= (\Phi_C \sin \theta - \Phi_A \cos \theta) \ell \mathbf{e}_3, \\
 \mathbf{N}_{C_0} &= (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{C_0}) \times (-mg \mathbf{e}_2) = \mathbf{x}_B \times mg \mathbf{e}_2 = \\
 &= mg \ell \sin \theta \mathbf{e}_3.
 \end{aligned}$$

Quindi l'equazione (9.5) appare la scelta più conveniente. È comunque utile risolvere il problema nei tre modi diversi.

Nel caso i), usando la formula fondamentale (6.19), abbiamo

$$\mathbf{M}_O = m \mathbf{x}_B \times \mathbf{v}_O + I_O \boldsymbol{\omega}. \quad (9.6)$$

Notiamo che, se l'asta si muove,  $\mathbf{v}_O \neq \mathbf{0}$  perché corrisponde alla velocità di  $O$  come punto solidale all'asta. Al variare di  $\theta$  l'origine  $O$  ha coordinate diverse in un riferimento solidale, ma nella (9.6)  $\mathbf{v}_O$  si deve intendere come la velocità di un punto solidale. Per calcolarla possiamo usare nuovamente la formula fondamentale:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_B = 2\ell\dot{\theta}(\cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \theta \mathbf{e}_2) = 2\mathbf{v}_B,$$

per cui

$$m \mathbf{x}_B \times \mathbf{v}_O = 2m \mathbf{x}_B \times \mathbf{v}_B = -2m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

Inoltre, sapendo che

$$I_3^{(B)} = \frac{m\ell^2}{3}$$

è il momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse  $B\hat{\mathbf{e}}_3$  e che  $O\hat{\mathbf{e}}_3$  è un asse principale di inerzia, dal teorema di Huygens-Steiner otteniamo

$$I_O \boldsymbol{\omega} = I_3^{(O)} \boldsymbol{\omega} = (I_3^{(B)} + m\ell^2) \dot{\theta} \mathbf{e}_3 = \frac{4}{3} m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

Abbiamo dunque

$$\mathbf{M}_O = -2m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3 + \frac{4}{3} m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3 = -\frac{2}{3} m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

In alternativa si può calcolare il momento angolare  $\mathbf{M}_O$  come segue:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_B + \mathbf{x}_B \times m \mathbf{v}_B = \frac{1}{3} m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3 - m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3 = -\frac{2}{3} m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3.$$

In questo modo sparisce l'ambiguità di notazione, che nasceva dal fatto di calcolare la velocità di un punto solidale al corpo (il punto  $O$ ), ma sempre diverso al variare di  $\theta$ . Dalla (9.2) si ottiene

$$-\frac{2}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = (-2\Phi_A \cos \theta + 2\Phi_C \sin \theta - mg \sin \theta)\ell. \quad (9.7)$$

Possiamo eliminare le reazioni vincolari  $\Phi_A, \Phi_C$  dalla (9.7) utilizzando la prima equazione cardinale proiettata lungo  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ :

$$\Phi_A = m\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{e}_1 = m\ell(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta), \quad (9.8)$$

$$\Phi_C - mg = m\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{e}_2 = -m\ell(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta). \quad (9.9)$$

Sostituendo (9.8), (9.9) nella (9.7) otteniamo l'equazione del moto:

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4\ell} \sin \theta. \quad (9.10)$$

Nel caso ii) abbiamo

$$\mathbf{M}_B = I_B \boldsymbol{\omega} = \frac{m\ell^2}{3} \dot{\theta} \mathbf{e}_3,$$

per cui dalla (9.3) si ottiene l'equazione

$$\frac{m\ell^2}{3} \ddot{\theta} = (\Phi_C \sin \theta - \Phi_A \cos \theta)\ell. \quad (9.11)$$

Sostituendo (9.8), (9.9) nella (9.11) si ottiene l'equazione del moto (9.10).

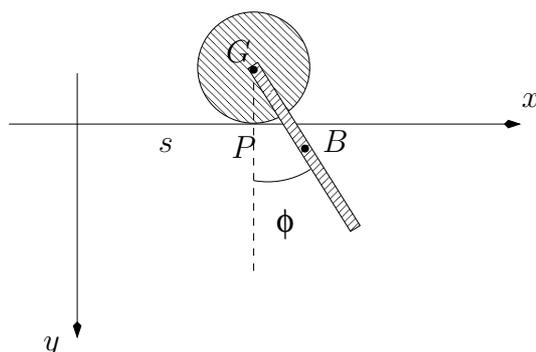
Nel caso iii) abbiamo

$$\mathbf{M}_{C_0} = \mathbf{M}_B + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{C_0}) \times m\mathbf{v}_B = \mathbf{M}_B - \mathbf{x}_B \times m\mathbf{v}_B = \frac{4}{3}m\ell^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_3,$$

e dalla (9.5) si ottiene subito l'equazione (9.10).

**Esercizio 27.** Si studi il moto di un disco omogeneo di raggio  $R$  e massa  $m$  che rotola senza strisciare su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto ad un piano orizzontale.

**Esercizio 28.** Si scrivano le equazioni del moto di un sistema costituito da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  e da un'asta omogenea di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$  vincolata per un estremo al baricentro  $G$  del disco. Il moto si svolge nel piano  $(x, y)$  (vedi figura 28), il disco è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse  $x$  mentre l'asta può oscillare liberamente rispetto alla verticale (il vincolo in  $G$  è liscio). Si utilizzino coordinate  $(s, \varphi)$  in cui  $s$  è l'ascissa del punto del disco a contatto con l'asse  $x$  e  $\varphi$  è l'angolo tra l'asta e la verticale.



**Soluzione.** Scriviamo la seconda equazione cardinale per la sola asta rispetto al polo  $G$ :

$$\dot{\mathbf{M}}_G^{(a)} = -\mathbf{v}_G \times m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_G^{(a)}.$$

Le coordinate del baricentro  $G$  del disco sono

$$\mathbf{x}_G = s\mathbf{e}_1 - R\mathbf{e}_2.$$

Le coordinate della posizione e velocità del baricentro  $B$  dell'asta sono

$$\mathbf{x}_B = (s + l \sin \varphi)\mathbf{e}_1 + (-R + l \cos \varphi)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_B = (\dot{s} + l\dot{\varphi} \cos \varphi)\mathbf{e}_1 - l\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_2.$$

Il momento angolare dell'asta rispetto al polo  $G$  si può scrivere nella forma

$$\mathbf{M}_G^{(a)} = \mathbf{M}_B^{(a)} + m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_G) \times \mathbf{v}_B,$$

in cui

$$m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_G) \times \mathbf{v}_B = -ml(\dot{s} \cos \varphi + l\dot{\varphi})\mathbf{e}_3$$

ed il momento angolare rispetto al baricentro  $B$  è

$$\mathbf{M}_B^{(a)} = -\frac{m\ell^2}{3}\dot{\varphi}\mathbf{e}_3.$$

Si ha inoltre

$$-\mathbf{v}_G \times m\mathbf{v}_B = ml\dot{s}\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_3,$$

e

$$\mathbf{N}_G^{(a)} = (B - G) \times mg\mathbf{e}_2 = mgl \sin \varphi \mathbf{e}_3.$$

Otengo l'equazione

$$-ml(\ddot{s} \cos \varphi - \dot{s}\dot{\varphi} \sin \varphi + l\ddot{\varphi}) - \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\varphi} = ml\dot{s}\dot{\varphi} \sin \varphi + mgl \sin \varphi,$$

che semplificando diventa

$$\frac{4}{3}\ell\ddot{\varphi} + \ddot{s}\cos\varphi = -g\sin\varphi.$$

Sia  $P = P(t)$  il punto del disco a contatto con l'asse  $Ox$  al generico tempo  $t$ . Scriviamo la seconda equazione cardinale per il sistema completo (asta e disco) rispetto al polo  $P$ :

$$\dot{\mathbf{M}}_P^{tot} = -\mathbf{v}_P \times (M\mathbf{v}_G + m\mathbf{v}_B) + \mathbf{N}_P^{tot} = -\mathbf{v}_P \times m\mathbf{v}_B + \mathbf{N}_P^{tot}$$

Il momento angolare totale rispetto a  $P$  si può scrivere sommando i due momenti angolari del disco e dell'asta:

$$\mathbf{M}_P^{tot} = \mathbf{M}_P^{(d)} + \mathbf{M}_P^{(a)}$$

dove

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_P^{(d)} &= \mathbf{M}_G^{(d)} + (\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \times M\mathbf{v}_G, \\ \mathbf{M}_P^{(a)} &= \mathbf{M}_B^{(a)} + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_P) \times m\mathbf{v}_B,\end{aligned}$$

in cui

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_P) \times M\mathbf{v}_G &= MR\dot{s}\mathbf{e}_3, \\ (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_P) \times m\mathbf{v}_B &= (-m\ell^2\dot{\varphi} + m\ell\cos\varphi(R\dot{\varphi} - \dot{s}) + mR\dot{s})\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{M}_G^{(d)} &= \frac{MR}{2}\dot{s}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{M}_B^{(a)} = -\frac{m\ell^2}{3}\dot{\varphi}\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Inoltre

$$-m\mathbf{v}_P \times \mathbf{v}_B = m\dot{s}\mathbf{e}_1 \times -[(\dot{s} + \ell\dot{\varphi}\cos\varphi)\mathbf{e}_1 - \ell\dot{\varphi}\sin\varphi\mathbf{e}_2] = m\ell\dot{s}\dot{\varphi}\sin\varphi\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{N}_P^{tot} = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_P) \times m\mathbf{g}\mathbf{e}_2 = mgl\sin\varphi\mathbf{e}_3.$$

Mettendo insieme le espressioni precedenti e semplificando otteniamo

$$\left(\frac{3}{2}M + m\right)R\ddot{s} - \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\varphi} + m\ell R(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) - m\ell\ddot{s}\cos\varphi = mgl\sin\varphi.$$

### 9.1.1 Equazioni del moto con la conservazione dell'energia

Per un corpo rigido discreto, dal teorema dell'energia cinetica abbiamo

$$\dot{T} = \Pi, \tag{9.12}$$

dove

$$\begin{aligned}\Pi &= \sum_{h=1}^N \vec{F}_h \cdot \vec{v}_h = \sum_{h=1}^N \mathbf{F}_h \cdot [\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P_h - O')] \\ &= \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{v}_{O'} + \vec{\mathbf{N}}_{O'} \cdot \vec{\omega} = \vec{\mathbf{R}}^{(E)} \cdot \vec{v}_{O'} + \vec{\mathbf{N}}_{O'}^{(E)} \cdot \vec{\omega}.\end{aligned}\quad (9.13)$$

Nel caso di corpi rigidi continui otteniamo lo stesso risultato usando (6.38) e l'ipotesi che la risultante e il momento risultante delle forze interne siano nulli:

$$\Pi = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \mathbf{R}^{(E)} \cdot \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(E)} \cdot \boldsymbol{\omega}.\quad (9.14)$$

Nella scrittura dell'equazione (9.12) si possono quindi usare sistemi di forze equivalenti a quelli dati, sia per i corpi rigidi discreti che per quelli continui.

Se le forze esterne sono conservative allora esse ammettono un'energia potenziale  $V$  e l'energia totale

$$E = T + V$$

è un integrale primo. Ricordiamo che la conservazione di  $E$  segue dalla relazione (9.12) in cui abbiamo  $\Pi = -\dot{V} = -\nabla_{\mathbf{x}} V \cdot \dot{\mathbf{x}}$ .

Possiamo usare la conservazione dell'energia per scrivere le equazioni del moto del sistema dell'Esempio 19. Infatti in questo caso le reazioni vincolari sono forze esterne a potenza nulla, per ogni velocità possibile, quindi le possiamo tralasciare, e la forza di gravità è conservativa, con energia potenziale

$$V = mg\mathbf{x}_B \cdot \mathbf{e}_2 = mg\ell \cos \theta,$$

in cui abbiamo sostituito il sistema delle forze di gravità distribuito sugli elementi materiali che compongono l'asta con un'unica forza  $-mg\mathbf{e}_2$  applicata al baricentro. Questo è lecito perché, grazie alla relazione (9.14), possiamo usare sistemi di forze equivalenti.

L'energia cinetica si può calcolare col teorema di König:

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I_B\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Derivando rispetto al tempo l'equazione della conservazione dell'energia si ottiene

$$\left(\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - mg\ell \sin \theta\right)\dot{\theta} = 0.$$

Da questa si ottengono due equazioni: la prima,  $\dot{\theta} = 0$ , dice semplicemente che l'energia si conserva nelle configurazioni di equilibrio, la seconda ci fornisce l'equazione di moto:

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - mg\ell \sin \theta = 0.$$

**Esercizio 29.** Usando la conservazione dell'energia, scrivere l'equazione del moto per un disco che rotola senza strisciare su un piano inclinato verticale in presenza della forza di gravità, di accelerazione costante  $g$ .

## 9.2 Equazioni di Eulero per il corpo rigido con un punto fisso

Fissiamo un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$  e scriviamo le equazioni che descrivono il moto di un corpo rigido  $\mathcal{C}$  con un punto fisso  $O$ . La seconda equazione cardinale in questo caso è sufficiente per determinare il moto:

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{M}_O \right|_{\Sigma} = \vec{N}_O. \quad (9.15)$$

Sia  $\vec{\omega}$  la velocità angolare del corpo rigido e consideriamo un sistema di riferimento principale  $\Sigma' = O \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$ , solidale a  $\mathcal{C}$  e centrato nel punto fisso  $O$ . Assumiamo inoltre che  $\Sigma'$  abbia la velocità angolare di minima norma tra quelle di tutti i riferimenti solidali a  $\mathcal{C}$ . Dalla relazione

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{M}_O \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d}{dt} \vec{M}_O \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{M}_O$$

si ha

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{M}_O \right|_{\Sigma'} = \vec{M}_O \times \vec{\omega} + \vec{N}_O. \quad (9.16)$$

Usando la relazione

$$\vec{M}_O = \mathfrak{I}_O \vec{\omega}$$

otteniamo le **equazioni di Eulero**

$$\left. \frac{d}{dt} (\mathfrak{I}_O \vec{\omega}) \right|_{\Sigma'} = \mathfrak{I}_O \vec{\omega} \times \vec{\omega} + \vec{N}_O. \quad (9.17)$$

Rappresentiamo la velocità angolare  $\vec{\omega}$ , il momento angolare  $\vec{M}_O$  e il momento della forza  $\vec{N}_O$  in coordinate nella base  $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ :

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \hat{e}'_i, \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^3 M_i \hat{e}'_i = \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i \hat{e}'_i, \quad \vec{N}_O = \sum_{i=1}^3 N_i \hat{e}'_i.$$

Introduciamo anche i vettori

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T, \quad \mathbf{M}_O = (M_1, M_2, M_3)^T, \quad \mathbf{N}_O = (N_1, N_2, N_3)^T.$$

Le equazioni (9.17), scritte in coordinate in questa base, diventano

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + N_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + N_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + N_3. \end{cases} \quad (9.18)$$

## 9.3 Moto per inerzia

**Definizione 25.** *Chiamiamo moti per inerzia o anche moti di Eulero-Poinsot le soluzioni delle equazioni*

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{I}_O \vec{\omega}) \Big|_{\Sigma'} = \mathfrak{I}_O \vec{\omega} \times \vec{\omega}, \quad (9.19)$$

cioè le soluzioni delle equazioni di Eulero (9.17) con  $\vec{N}_O = \vec{0}$ .

Con le equazioni (9.19) possiamo studiare il moto di un corpo rigido pesante, cioè soggetto alla forza di gravità, vincolato al suo baricentro, ma anche il moto di un corpo rigido pesante libero di muoversi nello spazio. Per quest'ultimo caso basta infatti studiare il moto nel riferimento del baricentro, che quindi diventa un punto fisso. Le equazioni (9.19), scritte in coordinate nella base  $\mathcal{B}'$ , diventano

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2. \end{cases} \quad (9.20)$$

Si può descrivere la soluzione generale di queste equazioni tramite l'uso di funzioni speciali, vedi [18]. È comunque interessante ottenere una descrizione delle soluzioni dal punto di vista geometrico utilizzando solo gli integrali primi della norma del momento angolare e dell'energia cinetica. Le componenti  $M_1, M_2, M_3$  del momento angolare nella base  $\mathcal{B}'$  in generale non si conservano, ma si conserva la loro norma euclidea  $|\mathbf{M}_O|$ , in quanto si conservano le componenti di  $\vec{M}_O$  nella base  $\mathcal{B}$  e la matrice di cambiamento di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$  è una matrice di rotazione. L'energia cinetica si conserva poiché la potenza della reazione vincolare è nulla, infatti

$$\dot{T} = \Pi = \vec{R}^{(E)} \cdot \vec{v}_O + \vec{N}_O^{(E)} \cdot \vec{\omega} = 0,$$

dove  $\vec{R}^{(E)}$  è la risultante delle forze esterne e  $\vec{N}_O^{(E)}$  è il momento risultante delle forze esterne rispetto al punto fisso  $O$ , vedi (9.13) e (9.14).

Introduciamo la seguente

**Definizione 26.** *L'insieme*

$$\mathcal{E}_O = \{O + \vec{x} \in \mathbb{E}^3 : \vec{x} \cdot \mathfrak{I}_O \vec{x} = 1\}$$

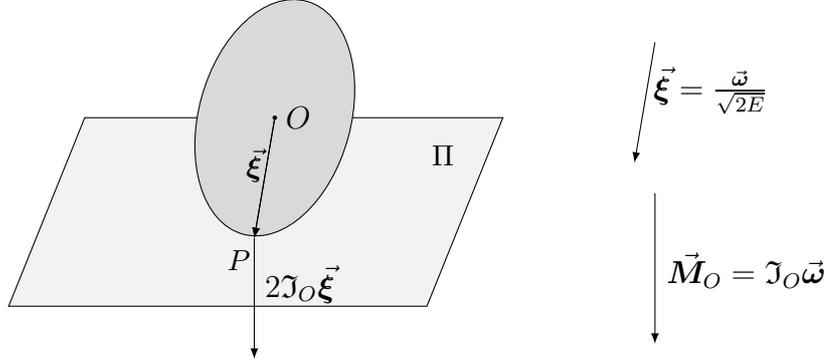
si dice **ellissoide di inerzia** relativo al punto  $O$ .

Le coordinate  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  dei punti dell'ellissoide di inerzia nel riferimento  $\Sigma'$  soddisfano la relazione

$$I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1,$$

quindi gli assi principali dell'ellissoide sono diretti lungo le direzioni principali di inerzia e le loro lunghezze sono  $1/\sqrt{I_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

**Proposizione 56. (Poinsot)** *In un moto per inerzia di un corpo rigido con punto fisso  $O$  l'ellissoide di inerzia relativo al polo  $O$  rotola senza strisciare su un piano fisso  $\Pi$  perpendicolare al vettore momento angolare  $\vec{M}_O$ .*



*Dimostrazione.* Sia  $E$  il valore costante dell'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathcal{I}_O \vec{\omega} = E.$$

Il punto  $P = O + \vec{\xi}$ , con  $\vec{\xi} = \vec{\omega} / \sqrt{2E}$ , appartiene all'ellissoide di inerzia  $\mathcal{E}_O$ , infatti

$$\vec{\xi} \cdot \mathcal{I}_O \vec{\xi} = \frac{\vec{\omega} \cdot \mathcal{I}_O \vec{\omega}}{2E} = 1.$$

Osserviamo inoltre che:

1. ad ogni istante il piano tangente all'ellissoide nel punto  $P$  è ortogonale a  $\vec{M}_O$ , infatti

$$\nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{x} \cdot I_O \mathbf{x}) = 2I_O \mathbf{x}$$

e, sostituendo  $\xi = \omega / \sqrt{2E}$  al posto di  $\mathbf{x}$ , otteniamo

$$2I_O \xi = \sqrt{\frac{2}{E}} I_O \omega = \sqrt{\frac{2}{E}} \mathbf{M}_O.$$

Quindi  $2I_O \xi$ , che rappresenta un vettore normale all'ellissoide in  $P$ , è parallelo al momento angolare, che è costante nel riferimento  $\Sigma$ .

2. La distanza di tale piano da  $O$  è costante, infatti questa è data da

$$\frac{\xi \cdot \mathbf{M}_O}{|\mathbf{M}_O|} = \frac{\omega \cdot \mathbf{M}_O}{\sqrt{2E} |\mathbf{M}_O|} = \frac{\sqrt{2E}}{|\mathbf{M}_O|}.$$

3. La velocità del punto dell'ellissoide a contatto col piano è nulla, infatti l'ellissoide è solidale al corpo e  $O\vec{\xi}$  è l'asse istantaneo di rotazione perché da  $\vec{v}_O = \vec{0}$  e  $\vec{\xi} \parallel \vec{\omega}$  segue che tutti i punti solidali al corpo su  $O\vec{\xi}$  hanno velocità nulla.

□

Si chiama **poloide** la curva tracciata sulla superficie dell'ellissoide di inerzia dai punti dell'ellissoide a contatto con il piano fisso; si chiama **erpoloide** la curva tracciata sul piano fisso dai punti del piano  $\Pi$ .

Esaminiamo in dettaglio il caso perfettamente simmetrico ( $I_1 = I_2 = I_3$ ), il caso a simmetria giroscopica ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ) e il caso generico ( $I_1 > I_2 > I_3$ ).

**Caso 1:**  $I_1 = I_2 = I_3 = I$

Ad esempio, questo è il caso di un corpo sferico omogeneo o di un corpo formato da 8 masse uguali disposte ai vertici di un cubo, vedi Esercizio 17.

Se la matrice che rappresenta  $\mathfrak{J}_O$  nella base principale  $\mathcal{B}'$  è un multiplo dell'identità, allora lo è in qualunque altra base. Abbiamo quindi la relazione

$$\vec{M}_O = I \vec{\omega} \quad (9.21)$$

Siccome  $\vec{M}_O$  è un integrale primo nel sistema di riferimento  $\Sigma$ , anche  $\vec{\omega} = \vec{M}_O/I$  è costante lungo le orbite, quindi il moto per inerzia è un moto rotatorio uniforme attorno a un asse fisso nello spazio (nel riferimento inerziale), che è l'asse istantaneo di rotazione. Questo segue dalla formula fondamentale della cinematica rigida applicata ad un generico punto  $P$  e al punto fisso  $O$ :

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times (P - O). \quad (9.22)$$

Se ruotiamo il sistema di riferimento  $\Sigma$  in modo da avere  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ , con  $\omega \in \mathbb{R}$ , e denotiamo con  $x, y, z$  le coordinate di  $P$  in  $\Sigma$ , l'equazione (9.22) si scrive

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x, \quad \dot{z} = 0,$$

che ha per soluzione

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}, \quad z(t) = z(0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che in questo caso i vettori  $\vec{\omega}$  e  $\vec{M}_O$  sono costanti anche nel sistema di riferimento  $\Sigma'$ , solidale al corpo.

**Caso 2:**  $I_1 = I_2 \neq I_3$  (simmetria giroscopica)

**Proposizione 57.** I vettori  $\vec{\omega}$ ,  $\hat{e}'_3$ ,  $\vec{M}_O$  soddisfano le seguenti proprietà:

1.  $\omega_3$  e  $|\boldsymbol{\omega}|$  sono costanti;
2. il momento angolare  $\vec{M}_O$ , la velocità angolare  $\vec{\omega}$  e l'asse  $\hat{e}'_3$  sono complanari;
3. gli angoli tra due qualsiasi dei vettori  $\vec{M}_O, \vec{\omega}, \hat{e}'_3$  sono costanti.

**Osservazione 35.** La terza proprietà ci dice in particolare che sono costanti le componenti del vettore velocità angolare  $\vec{\omega}$  sui vettori  $\hat{e}'_3$  ed  $\vec{M}_O$ .

*Dimostrazione.* Le equazioni di Eulero si scrivono nel modo seguente

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3, \\ I_1 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1, \\ I_3 \dot{\omega}_3 = 0, \end{cases} \quad (9.23)$$

dunque otteniamo

$$\omega_3 = \text{costante}, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{costante},$$

per cui è costante anche  $|\boldsymbol{\omega}|$ .

Siano  $\alpha$  l'angolo tra  $\vec{M}_O$  ed  $\vec{\omega}$ ,  $\beta$  l'angolo tra  $\vec{\omega}$  ed  $\hat{e}'_3$  e  $\gamma$  l'angolo tra  $\vec{M}_O$  ed  $\hat{e}'_3$ . Scriviamo le espressioni dei coseni di tali angoli:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\vec{M}_O| |\boldsymbol{\omega}|} = \frac{2E}{|\vec{M}_O| |\boldsymbol{\omega}|}, \\ \cos \beta &= \frac{\omega_3}{|\boldsymbol{\omega}|}, \\ \cos \gamma &= \frac{M_3}{|\vec{M}_O|} = \frac{I_3 \omega_3}{|\vec{M}_O|}. \end{aligned}$$

Usando il punto 1., la conservazione dell'energia cinetica e della norma del momento angolare otteniamo che  $\cos \alpha$  è costante. Dal punto 1. segue immediatamente che anche  $\cos \beta$  è costante. La dimostrazione che  $\cos \gamma$  è costante si fa in modo analogo.

Il fatto che i vettori  $\vec{M}_O, \vec{\omega}, \hat{e}'_3$  siano coplanari durante il moto si ottiene dalla relazione

$$\det \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 & I_1 \omega_2 & I_3 \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

□

**Proposizione 58. (coni di Poinsot)** *Si consideri il moto di un corpo rigido con un punto fisso  $O$  avente simmetria giroscopica attorno all'asse  $\hat{e}'_3$ . Il vettore  $\vec{\omega}$  ruota uniformemente attorno alla direzione fissa del momento angolare  $\vec{M}_O$  descrivendo un cono di rotazione  $\mathcal{C}$  con velocità angolare costante. Analogamente la traccia di  $\vec{\omega}$  sul corpo descrive un cono di rotazione  $\mathcal{C}'$  con velocità angolare costante. Considerando  $\mathcal{C}$  fisso e  $\mathcal{C}'$  solidale al corpo rigido, si ha che i due coni rotolano l'uno sull'altro senza strisciare.*

*Dimostrazione.* Il vettore  $\vec{\omega}$  descrive un cono in entrambi i sistemi di riferimento poiché l'angolo tra  $\vec{\omega}$  ed  $\vec{M}_O$  e l'angolo tra  $\vec{\omega}$  ed  $\hat{e}'_3$  sono costanti. A questi due coni, denotati con  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$ , possiamo attribuire un moto considerandoli solidali a  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  rispettivamente. Si ottiene che  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  rotolano senza strisciare l'uno sull'altro poiché i punti del corpo che si trovano sull'asse passante per  $O$  e parallelo ad  $\vec{\omega}$  hanno tutti velocità nulla ( $O\vec{\omega}$  è l'asse istantaneo di rotazione e  $\vec{v}_O = \vec{0}$ ). Tale asse corrisponde alla retta istantanea di contatto tra i due coni e ha velocità istantanea nulla sia nel sistema di riferimento inerziale che nel riferimento solidale (la derivata temporale di  $\vec{\omega}$  fatta nei due riferimenti è la stessa).

Dimostriamo adesso che il moto di rotazione è uniforme. Posto

$$\hat{e}_{M_O} = \frac{\vec{M}_O}{|\vec{M}_O|}$$

si ha

$$\vec{\omega} = \omega' \hat{e}_{M_O} + \omega'' \hat{e}'_3,$$

con  $\omega', \omega''$  costanti. Dalle formule di Poisson segue che

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}'_3 \right|_{\Sigma} = \vec{\omega} \times \hat{e}'_3 = \omega' \hat{e}_{M_O} \times \hat{e}'_3.$$

Quindi  $\hat{e}'_3$  ruota uniformemente attorno a  $O\hat{e}_{M_O}$ , costante in  $\Sigma$ , e per la coplanarità di  $\hat{e}'_3$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{M}_O$  e l'invarianza dell'angolo tra  $\vec{\omega}$  ed  $\hat{e}'_3$  trascina nel suo moto uniforme attorno ad  $O\hat{e}_{M_O}$  anche  $\vec{\omega}$ .

La dimostrazione del moto rotatorio uniforme di  $\vec{\omega}$  attorno ad  $\hat{e}'_3$  in  $\Sigma'$  si fa in modo analogo a partire dall'equazione differenziale

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma'} = -\vec{\omega} \times \hat{e}_{M_O} = -\omega'' \hat{e}'_3 \times \hat{e}_{M_O},$$

che segue dalla relazione

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \hat{e}_{M_O}$$

e dal fatto che

$$\left. \frac{d}{dt} \hat{e}_{M_O} \right|_{\Sigma} = \vec{0}.$$

□

**Caso 3:**  $I_1 > I_2 > I_3$

Le equazioni di Eulero (9.19) ammettono sempre gli integrali primi

$$\begin{cases} |\mathbf{M}_O|^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2, \\ T = \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2). \end{cases}$$

**Definizione 27.** Chiamiamo **rotazioni stazionarie** le soluzioni  $\vec{\omega}_s$  costanti delle equazioni di Eulero (9.19).

Ricordiamo che  $\vec{\omega}$  è costante nel riferimento  $\Sigma'$  se e solo se è costante in  $\Sigma$ .

Dalla (9.19) si vede che se  $\vec{\omega}_s$  è una rotazione stazionaria si ha

$$\mathfrak{I}_O \vec{\omega}_s \parallel \vec{\omega}_s,$$

cioè le rotazioni stazionarie sono gli autovettori di  $\mathfrak{I}_O$  e quindi sono necessariamente parallele ad uno degli  $\hat{e}'_j$ . Si parla dunque di rotazioni stazionarie attorno agli assi  $O\hat{e}'_1$ ,  $O\hat{e}'_2$ ,  $O\hat{e}'_3$ . Dalla relazione  $\vec{M}_O = \mathfrak{I}_O \vec{\omega}_s$  si ottiene che anche  $\vec{M}_O$  deve essere parallelo ad  $\vec{\omega}_s$ . Quindi in questo caso  $\vec{M}_O$  è costante anche in  $\Sigma'$ . Per capire la geometria delle traiettorie delle soluzioni di (9.19) consideriamo le equazioni di Eulero scritte nella forma

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{M}_O \right|_{\Sigma'} = \vec{M}_O \times \vec{\omega}. \quad (9.24)$$

Siano  $c^2, E$  i valori degli integrali primi  $|\mathbf{M}_O|^2, T$ . Le relazioni

$$\begin{cases} M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = c^2, \\ \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E \end{cases} \quad (9.25)$$

rappresentano l'intersezione di una sfera di raggio  $|c|$  con un ellissoide di semiasse  $\sqrt{2EI_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , e individuano le traiettorie possibili per le coordinate  $(M_1, M_2, M_3)$  del momento angolare nella base  $\mathcal{B}'$ . Fissiamo un valore  $E$  per l'energia e consideriamo l'insieme delle coordinate  $(M_1, M_2, M_3)$  che soddisfano (9.25). Il fatto che questo insieme sia non vuoto è garantito dalle relazioni

$$2EI_3 \leq c^2 \leq 2EI_1.$$

Descriviamo l'insieme delle traiettorie delle soluzioni di (9.20) nei vari casi. Ci sono cinque possibilità:

- 1)  $2EI_3 = c^2$ ,
- 2)  $2EI_3 < c^2 < 2EI_2$ ,
- 3)  $c^2 = 2EI_2$ ,
- 4)  $2EI_2 < c^2 < 2EI_1$ ,
- 5)  $c^2 = 2EI_1$ .

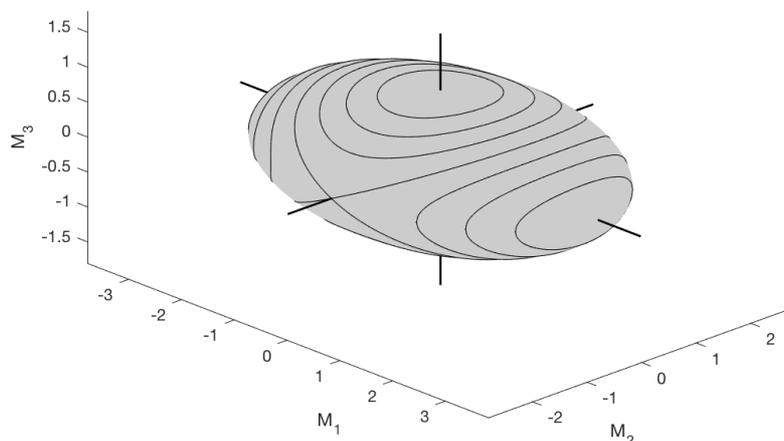


Figura 9.1: Possibili traiettorie della curva  $t \mapsto \mathbf{M}_O(t)$ , soluzione di (9.24), ottenute fissando un valore di  $T$  e usando valori diversi di  $|\mathbf{M}|$ .

Nel caso 1) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse  $O\hat{e}'_3$ , che corrispondono alle rotazioni stazionarie con  $\vec{\omega}$  parallelo a  $\hat{e}'_3$ . Nel caso 2) abbiamo due curve chiuse attorno all'asse  $O\hat{e}'_3$ . Nel caso 3) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse  $O\hat{e}'_2$  e quattro curve che li congiungono, che corrispondono alle separatrici stabili e instabili delle equazioni (9.24) ristrette all'ellissoide di energia costante. Nel caso 4) abbiamo due curve chiuse attorno all'asse  $O\hat{e}'_1$ . Nel caso 5) abbiamo due punti di equilibrio sull'asse  $O\hat{e}'_1$ .

Osservando le curve disegnate nella Figura 9.1 possiamo concludere che le rotazioni stazionarie attorno agli assi  $O\hat{e}'_1$  e  $O\hat{e}'_3$ , corrispondenti ai momenti principali di inerzia massimo e minimo, sono stabili. Invece, le rotazioni stazionarie attorno a  $O\hat{e}'_2$  sono instabili. La definizione formale di stabilità degli equilibri è enunciata di seguito.

### 9.3.1 Equilibri e stabilità

Consideriamo un sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad m \geq 1. \quad (9.26)$$

**Definizione 28.** Si definiscono **equilibri** di (9.26) i punti  $\mathbf{x}_0$  tali che  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .

**Definizione 29.** Un equilibrio  $\mathbf{x}_0$  è **stabile** (per tempi positivi) se per ogni intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  esiste un intorno  $V$  di  $\mathbf{x}_0$ ,  $V \subseteq U$ , tale che per ogni  $\mathbf{y} \in V$ , la soluzione  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{y})$  di (9.26) con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}$  soddisfa

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{y}) \in U, \quad \forall \mathbf{y} \in V, \forall t \geq 0.$$

**Definizione 30.** Un equilibrio  $\mathbf{x}_0$  è **instabile** (per tempi positivi) se non è stabile, cioè se esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che per ogni intorno  $V$  di  $\mathbf{x}_0$  con  $V \subseteq U$  esistono  $\mathbf{y} \in V$  e  $\bar{t} > 0$  tali che la soluzione  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{y})$  di (9.26) con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}$  soddisfa

$$\mathbf{x}(\bar{t}; \mathbf{y}) \notin U.$$

Descriviamo due esempi standard di equilibri di sistemi autonomi piani lineari: uno è stabile, l'altro instabile.

**Esempio 20.** (*centro*) Il sistema

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x \tag{9.27}$$

ha l'origine  $(x, y) = (0, 0)$  come unico equilibrio. Inoltre esso ammette l'integrale primo

$$G(x, y) = x^2 + y^2,$$

infatti

$$\dot{G}(x, y) = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2(-xy + yx) = 0,$$

per cui le traiettorie delle soluzioni diverse dall'equilibrio sono circonferenze centrate nell'origine. Questo ci permette di dire che l'origine è stabile.

**Esempio 21.** (*sella*) Il sistema

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = y \tag{9.28}$$

ha l'origine  $(x, y) = (0, 0)$  come unico equilibrio. Inoltre esso ammette l'integrale primo

$$G(x, y) = xy,$$

infatti

$$\dot{G}(x, y) = \dot{x}y + x\dot{y} = -xy + xy = 0,$$

per cui le traiettorie delle soluzioni diverse da quelle che giacciono sugli assi coordinati sono delle iperboli. Questo ci permette di dire che l'origine è instabile.

### 9.3.2 Fase geometrica nel moto del corpo rigido

Consideriamo adesso un moto periodico attorno ad una rotazione stazionaria stabile, per esempio attorno a  $O\hat{e}_1$ . Vogliamo calcolare l'angolo  $\Delta\theta$ , che ci dice di quanto è ruotato il corpo rigido dopo un periodo di  $\mathbf{M}_O$ .

Riportiamo qui una formula dimostrata da Montgomery in [14]:

$$\Delta\theta = 2\frac{ET}{|\mathbf{M}_O|} - \Omega \quad (9.29)$$

in cui  $T$  è il periodo del moto ed  $\Omega$  è l'angolo solido tracciato sulla sfera unitaria centrata in  $O$  e solidale al corpo dalla direzione del momento angolare  $\vec{\mathbf{M}}_O$ .

In [10] si trova una dimostrazione della formula (9.29) utilizzando il teorema di Gauss-Bonnet e la Proposizione 56.

## 9.4 Effetto giroscopico

Si consideri un corpo rigido a simmetria giroscopica, con un punto fisso  $O$  e momenti principali di inerzia  $I_j$ , con  $I_1 = I_2 \neq I_3$

Se il corpo è omogeneo, per esempio una trottola, l'asse  $O\hat{e}'_3$  corrisponde al suo asse di simmetria (**asse giroscopico**). Introduciamo la componente della velocità angolare  $\vec{\omega}$  ortogonale a tale asse:

$$\vec{\omega}^\perp = \omega_1\hat{e}'_1 + \omega_2\hat{e}'_2.$$

Il momento angolare rispetto ad  $O$  si può scrivere

$$\vec{\mathbf{M}}_O = I_1\vec{\omega}^\perp + I_3\omega_3\hat{e}'_3.$$

Supponiamo che la componente lungo  $\hat{e}'_3$  del momento delle forze attive esterne rispetto ad  $O$  sia nulla:

$$N_3 = \vec{\mathbf{N}}_O \cdot \hat{e}'_3 = 0.$$

L'equazione di bilancio del momento angolare diventa quindi

$$\left. \frac{d}{dt}\vec{\mathbf{M}}_O \right|_\Sigma = \left. \frac{d}{dt}(I_1\vec{\omega}^\perp + I_3\omega_3\hat{e}'_3) \right|_\Sigma = \vec{\mathbf{N}}_O = N_1\hat{e}'_1 + N_2\hat{e}'_2. \quad (9.30)$$

Le equazioni di Eulero si scrivono

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 + N_1, \\ I_1\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + N_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 = 0. \end{cases}$$

Consideriamo condizioni iniziali della forma

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0, \quad \omega_3(0) \gg 1.$$

Osserviamo che, anche se in generale non si avrà  $\omega_1(t) = \omega_2(t) = 0$  per ogni  $t > 0$ , in questo caso si potrà assumere che

$$\vec{\omega}^\perp(t) \simeq \vec{0} \quad (9.31)$$

insieme con la sua derivata temporale in  $\Sigma$  di  $\vec{\omega}^\perp$ .

almeno per un certo intervallo di tempo. Dato che  $\omega_3(t) = \omega_3(0)$ ,  $\forall t > 0$ , per l'ipotesi (9.31) possiamo approssimare l'equazione (9.30) con

$$I_3 \omega_3(0) \left. \frac{d}{dt} \hat{e}'_3 \right|_\Sigma = \vec{N}_O. \quad (9.32)$$

Dalla (9.32) segue che, se il momento  $\vec{N}_O$  è prodotto da una forza  $\vec{F}$  applicata in un punto  $P \neq O$  dell'asse giroscopico  $O\hat{e}'_3$ , quest'ultimo non si sposta nella direzione della forza ma nella direzione di  $\vec{N}_O$ , ad essa perpendicolare (**tendenza al parallelismo** dell'asse giroscopico al momento  $\vec{N}_O$ ).

Dalla (9.32) segue anche che per provocare un determinato spostamento dell'asse giroscopico è necessario un momento delle forze attive di norma tanto più grande quanto più grande è  $\omega_3(0)$  (**tenacia dell'asse giroscopico**).

Commento sulla **poloide** (si veda la prop. 56 sui moti alla Poincaré)

Vediamo intanto il caso in cui  $I_1 = I_2 = I$  e  $I_3 \neq I$

Equazione dell'ellissoide d'inertzia con centro in  $O$

$$I(x_1^2 + x_2^2) + I_3 x_3^2 = 1$$

Consideriamo il piano tangente all'ellissoide in un suo punto. Sia  $d$  la distanza di tale piano dal centro dell'ellissoide. Allora i punti sull'ellissoide per cui  $d$  assume lo stesso valore  $c$  soddisfano l'equazione

$$\frac{x \cdot I_0 x}{|I_0 x|} = c$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad I_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Poichè  $x \cdot I_0 x = 1$  si ha

$$\frac{1}{|I_0 x|} = c \longrightarrow |I_0 x| = \frac{1}{c}$$

$$\longrightarrow I^2(x_1^2 + x_2^2) + I_3^2 x_3^2 = \frac{1}{c^2}$$

L'intersezione dei due ellissoidi

$$\begin{cases} I(x_1^2 + x_2^2) + I_3 x_3^2 = 1 \\ I^2(x_1^2 + x_2^2) + I_3^2 x_3^2 = \frac{1}{c^2} \end{cases}$$

è una circonferenza (verificarlo).

Vediamo adesso il caso in cui  $I_1 > I_2 > I_3$ .

In questo caso le coordinate  $(x_1, x_2, x_3)$  dei punti della poloide sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1 \\ I_1^2 x_1^2 + I_2^2 x_2^2 + I_3^2 x_3^2 = \frac{1}{c^2} \end{cases}$$

L'intersezione di questi due ellissoidi in generale non

solo non è un'ellisse, ma non è neppure una curva  
piana (si può verificare per esempio con  
GeoGebra, [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)).

Esempio

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ 9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 = \frac{15}{8} \end{cases}$$