

# Capitolo 8

## Statica dei sistemi meccanici

Studiamo la Statica dei sistemi composti da punti materiali e corpi rigidi, eventualmente soggetti ad altri vincoli olonomi e fissi. A tal fine introduciamo il principio dei lavori virtuali e le equazioni cardinali della Statica.

### 8.1 Statica di sistemi di punti materiali vincolati

Consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$  soggetti a vincoli olonomi fissi e a forze attive indipendenti dal tempo in un riferimento assegnato  $\Sigma$ .

**Definizione 24.** *La configurazione  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$  si dice di equilibrio se, ponendo i punti  $P_j$  in questa configurazione con velocità tutte nulle, essi vi restano per sempre.*

I problemi fondamentali della Statica sono la ricerca delle configurazioni di equilibrio e il calcolo delle reazioni vincolari in corrispondenza degli equilibri. In questo capitolo introduciamo due metodi diversi per trattare questi problemi.

### 8.2 Il lavoro virtuale

Fissato un sistema di riferimento, siano  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$  le forze attive, supposte indipendenti dal tempo, che agiscono sui punti  $P_1, \dots, P_N$  di un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi, che possono essere sia fissi che mobili. Siano inoltre

$$\mathbf{q} \mapsto \chi_j(\mathbf{q}, t), \quad (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \mathbf{v}_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

le mappe che forniscono ad ogni istante le coordinate delle posizioni e delle velocità virtuali dei punti  $P_j$  in termini delle coordinate e velocità lagrangiane  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  e del

tempo  $t$ , vedi (7.18). Chiamiamo **lavoro virtuale** (elementare) delle forze  $\mathbf{F}_j$  in corrispondenza agli spostamenti virtuali  $\delta\boldsymbol{\chi}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , la quantità

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{v}) \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_j.$$

dove  $\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_N)$  e  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$  sono i vettori di tutte le posizioni e velocità virtuali.

**Esempio 14.** Consideriamo il lavoro virtuale delle reazioni vincolari che assicurano la rigidità di un corpo rigido discreto. Usando la (7.25) si ottiene

$$\delta\mathcal{L} = \mathbf{R}^{(v)} \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \boldsymbol{\omega} dt,$$

dove  $\mathbf{R}^{(v)}$ ,  $\mathbf{N}_{O'}^{(v)}$  sono la risultante e il momento risultante delle reazioni vincolari rispetto ad un polo  $O'$ , solidale al corpo. Poiché queste reazioni sono le forze interne del sistema di punti che costituiscono il corpo, esse formano un sistema equilibrato ed il loro lavoro virtuale è nullo in corrispondenza ad un qualunque spostamento virtuale rigido.

**Osservazione 32.** In generale, per uno spostamento virtuale non rigido, il lavoro elementare delle forze interne non è nullo, anche se il sistema delle forze interne è equilibrato. Come esempio basta prendere un sistema composto da due punti materiali  $P_1, P_2$  di masse  $m_1, m_2$  che si muovono su una retta e sono collegati da una molla di costante elastica  $k > 0$ . In questo caso il sistema di forze è equilibrato perché, indicando con  $x_1, x_2$  le coordinate di  $P_1, P_2$  sulla retta, abbiamo una coppia di forze di intensità  $k|x_1 - x_2|$  e braccio nullo. Il lavoro elementare è invece

$$\delta\mathcal{L} = -k(x_1 - x_2)dx_1 - k(x_2 - x_1)dx_2 = -k(x_1 - x_2)(dx_1 - dx_2),$$

che è diverso da zero per la maggior parte degli spostamenti virtuali  $dx_1, dx_2$ .

**Proposizione 54.** *Il lavoro virtuale delle forze interne di un sistema meccanico, anche non rigido, non dipende dal sistema di riferimento scelto.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che la relazione tra le velocità dei punti  $P_j$  del sistema in due riferimenti  $\Sigma, \Sigma'$  è data da

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}'_j + \mathbf{v}_j^T, \quad \mathbf{v}_j^T = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{O'}).$$

Il lavoro virtuale delle forze interne in  $\Sigma$  differisce da quello in  $\Sigma'$  per il termine dovuto alle velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_j^T$ , che è

$$\delta\mathcal{L}^T = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(I)} \cdot (\delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \boldsymbol{\omega} dt \times (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'})) = \mathbf{R}^{(I)} \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(I)} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = 0.$$

□

**Esempio 15.** *Nel caso del sistema dell'Osservazione 32, calcolando il lavoro elementare delle forze interne in un riferimento avente il punto  $P_1$  come origine, si ottiene lo stesso risultato.*

### 8.2.1 Vincoli senza attrito

Consideriamo un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi, eventualmente mobili, e privi di attrito. In questo caso il lavoro virtuale delle reazioni vincolari  $\Phi_j$  che agiscono sui punti  $P_j$  del sistema è nullo ad ogni istante e per ogni spostamento virtuale:<sup>1</sup>

$$\delta\mathcal{L}^{(v)} = \sum_{j=1}^N \Phi_j \cdot \delta\chi_j = 0. \quad (8.1)$$

La proprietà (8.1) è una legge sperimentale, la cui validità si può verificare in molti casi già trattati, e si assume valida sempre nelle ipotesi fatte.

Usando la (8.1) per le coppie cinematiche prive di attrito, elenchiamo di seguito le condizioni che devono essere soddisfatte dalla risultante e dal momento risultante delle reazioni vincolari  $\Phi_j$ , che sono forze interne alla coppia. Assumendo che non ci sia attrito tra le superfici  $\sigma_1, \sigma_2$  che delimitano i corpi rigidi che formano la coppia, dalla (8.1) segue che

$$\delta\mathcal{L}^{(v)} = \mathbf{R}^{(v)} \cdot \delta\chi_{O'} + \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \boldsymbol{\omega} dt = 0 \quad (8.2)$$

per ogni scelta del polo  $O' \in \mathbb{E}^3$  e per ogni spostamento virtuale relativo di un elemento della coppia rispetto all'altro, definito da  $\delta\chi_{O'}, \boldsymbol{\omega} dt$ . Nella (8.2)  $\mathbf{R}^{(v)}$ ,  $\mathbf{N}_{O'}^{(v)}$  sono la risultante e il momento risultante rispetto a  $O'$  delle reazioni vincolari esercitate da un elemento della coppia sull'altro nel loro moto relativo. Trattiamo separatamente i vari casi.

1. **coppia prismatica:** siano  $\mathbf{u}$  il versore di una generatrice della superficie cilindrica  $\sigma_1 (= \sigma_2)$  ed  $s$  la coordinata lagrangiana della coppia lungo la generatrice scelta. Si ha

$$\delta\chi_{O'} = \mathbf{u} \delta s, \quad \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{0}.$$

Dalla (8.2), per l'arbitrarietà di  $\delta s$ , segue che

$$\mathbf{R}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

---

<sup>1</sup>per vincoli bilaterali, altrimenti si ha  $\delta\mathcal{L}^{(v)} \geq 0$ .

2. **coppia rotoidale:** siano  $\mathbf{u}$  il versore dell'asse di rotazione e  $\theta$  l'angolo di rotazione. Sia inoltre  $O'$  un punto dell'asse della coppia. Si ha

$$\delta\chi_{O'} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{u} \delta\theta.$$

Dalla (8.2), per l'arbitrarietà di  $\delta\theta$ , segue che

$$\mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

3. **coppia elicoidale:** siano  $\mathbf{u}$  il versore dell'asse di rotazione,  $\theta$  l'angolo di rotazione e  $p > 0$  il passo dell'elica. Si ha

$$\delta\chi_{O'} = \frac{p}{2\pi} \mathbf{u} \delta\theta, \quad \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{u} \delta\theta.$$

Dalla (8.2), per l'arbitrarietà di  $\delta\theta$ , segue che

$$\frac{p}{2\pi} \mathbf{R}^{(v)} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

4. **coppia rototraslatoria:** si ha

$$\delta\chi_{O'} = \mathbf{u} \delta s, \quad \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{u} \delta\theta.$$

Dalla (8.2) si ottiene

$$\mathbf{R}^{(v)} \cdot \mathbf{u} \delta s + \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \mathbf{u} \delta\theta = 0,$$

da cui, per l'arbitrarietà di  $\delta s$  e di  $\delta\theta$ , segue che

$$\mathbf{R}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{N}_{O'}^{(v)} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

5. **coppia sferica:** sia  $O'$  il centro della coppia. Si ha

$$\delta\chi_{O'} = \mathbf{0}.$$

Dalla (8.2), per l'arbitrarietà di  $\boldsymbol{\omega} dt$ , segue che

$$\mathbf{N}_{O'}^{(v)} = \mathbf{0}.$$

### 8.2.2 Vincoli di puro rotolamento

Il lavoro virtuale è uguale a zero anche per i vincoli di puro rotolamento, infatti per i punti  $P_1, P_2$  di due corpi a contatto si ha

$$\delta\mathcal{L}^{(v)} = \boldsymbol{\Phi}_1 \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2 \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_2 = \boldsymbol{\Phi}_1 \cdot (\delta\boldsymbol{\chi}_1 - \delta\boldsymbol{\chi}_2)$$

per il principio di azione e reazione, e in un moto di puro rotolamento si ha  $\delta\boldsymbol{\chi}_1 = \delta\boldsymbol{\chi}_2$ . Dunque si possono estendere a questo caso i risultati trovati per il caso dei vincoli olonomi fissi e senza attrito, se questi dipendono dall'annullarsi del lavoro virtuale delle reazioni vincolari.

### 8.3 Il principio dei lavori virtuali

**Principio di lavori virtuali:** *Si consideri un sistema meccanico costituito da  $N$  punti materiali soggetti a vincoli olonomi fissi, che siano anche privi di attrito o di puro rotolamento, e a forze attive  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$  indipendenti dal tempo. Condizione necessaria e sufficiente perché una configurazione  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  di tale sistema sia di equilibrio è che per ogni spostamento virtuale  $\delta\boldsymbol{\chi} = (\delta\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \delta\boldsymbol{\chi}_N)$  che allontani la configurazione del sistema da  $\mathbf{x}_0$  si abbia*

$$\delta\mathcal{L}^{(a)} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(a)}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{0}) \cdot \delta\boldsymbol{\chi}_j = 0. \quad (8.3)$$

**Osservazione 33.** La validità del principio dei lavori virtuali viene assunta come postulato. Inoltre le relazioni che derivano da esso sono **equazioni pure**, cioè non contengono reazioni vincolari.

Inserendo la relazione

$$\delta\boldsymbol{\chi}_j = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} \delta q_h$$

nella (8.3) si ottiene

$$\delta\mathcal{L}^{(a)} = \sum_{h=1}^n \left( \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(a)}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{0}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} \right) \delta q_h = 0$$

per ogni spostamento infinitesimo  $\delta q = (\delta q_1, \dots, \delta q_n)$ . Ponendo

$$Q_h = Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j^{(a)}(\boldsymbol{\chi}, \mathbf{v}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}, \quad h = 1, \dots, n, \quad (8.4)$$

e usando l'arbitrarietà dei  $\delta q_h$  si trova la seguente condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio:

$$Q_h(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = 0, \quad h = 1, \dots, n. \quad (8.5)$$

Le espressioni  $Q_h$ , definite in (8.4), si chiamano **forze generalizzate** oppure **componenti lagrangiane delle forze**.

Se le forze attive sono conservative, cioè se  $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x})$ , e se esiste una funzione  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$  tale che

$$\mathbf{F}_j = -\nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V}, \quad j = 1, \dots, N$$

allora, posto

$$V(\mathbf{q}) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})),$$

si ha

$$Q_h = Q_h(\mathbf{q}) = - \sum_{j=1}^N \nabla_{\mathbf{x}_j} \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\mathbf{q}) = - \frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}),$$

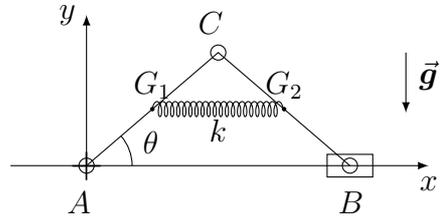
quindi (8.5) si scrive

$$\frac{\partial V}{\partial q_h}(\mathbf{q}) = 0, \quad h = 1, \dots, n.$$

### 8.3.1 Alcuni esempi

**Esempio 16.** Si consideri il sistema meccanico formato da due aste omogenee, di lunghezza  $2\ell$  e massa  $m$ , incernierate in un loro estremo  $C$ .

L'estremo  $A$  della prima asta è collegato all'origine di un riferimento  $Axy$ , con asse  $Ay$  verticale ascendente. L'estremo  $B$  della seconda asta può scivolare senza attrito sull'asse orizzontale  $Ax$ . Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ . Inoltre una molla di costante elastica  $k > 0$  e lunghezza a riposo nulla collega i due baricentri  $G_1, G_2$  delle aste. Sia  $\theta$  l'angolo tra l'asta  $AC$  e l'asse  $Ax$ . Assumiamo che tutti i vincoli siano privi di attrito.



Usiamo il principio dei lavori virtuali per trovare le configurazioni di equilibrio. Le forze attive sono conservative, con energia potenziale

$$V(\theta) = 2mg\ell \sin \theta + 2k\ell^2 \cos^2 \theta.$$

Dall'equazione

$$V'(\theta) = 2mg\ell \cos \theta \left(1 - 2 \frac{k\ell}{mg} \sin \theta\right) = 0$$

si ottengono le configurazioni di equilibrio

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

e, se  $J = \frac{mg}{2k\ell} < 1$ ,

$$\theta_3 = \arcsin J, \quad \theta_4 = \pi - \arcsin J.$$

Le configurazioni  $\theta_3, \theta_4$  esistono solo se  $J < 1$ . Si dice che  $J = 1$  è un valore di **biforcazione** del parametro  $J$ .

**Osservazione 34.** Nota una configurazione di equilibrio, possiamo usare il principio dei lavori virtuali anche per trovare le reazioni vincolari. Possiamo infatti immaginare di sopprimere il vincolo per cui si vuole calcolare la reazione vincolare e includere tale reazione tra le forze attive, che appaiono nell'espressione del lavoro virtuale (vedi Esempio 17).

## 8.4 Le equazioni cardinali della Statica

Sia dato un sistema di  $N$  punti materiali  $P_j$ ,  $j = 1 \dots N$  di masse  $m_j$ , soggetti a vincoli olonomi fissi. Fissato un riferimento  $\Sigma$ , assumiamo che sui punti agiscano delle forze  $\mathbf{F}_j$ , somma vettoriale di forze interne ed esterne:

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^{(I)} + \mathbf{F}_j^{(E)},$$

Inoltre sia le forze interne che le forze esterne sono somma vettoriale di forze attive e reazioni vincolari, denotate rispettivamente con  $\mathbf{f}$  e  $\Phi$ :

$$\mathbf{F}_j^{(I)} = \mathbf{f}_j^{(I)} + \Phi_j^{(I)}, \quad \mathbf{F}_j^{(E)} = \mathbf{f}_j^{(E)} + \Phi_j^{(E)}.$$

Sia le forze attive che i vincoli si assumono indipendenti dal tempo. Nel riferimento  $\Sigma$  le equazioni di Newton per il sistema si scrivono

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{f}_j^{(I)} + \Phi_j^{(I)} + \mathbf{f}_j^{(E)} + \Phi_j^{(E)}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema sia in equilibrio è che siano in equilibrio tutte le parti che lo compongono, cioè che

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, N$$

quando le velocità dei punti  $P_j$  sono tutte nulle. Ne segue che per la risultante  $\mathbf{R}$  e il momento risultante  $\mathbf{N}_Q$  delle forze  $\mathbf{F}_j$ , calcolato rispetto ad un polo  $Q$  qualunque, valgono le equazioni

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}_Q = \mathbf{0}. \quad (8.6)$$

Poiché la risultante  $\mathbf{R}^{(I)}$  e il momento risultante  $\mathbf{N}_Q^{(I)}$  delle forze interne sono nulli, detti  $\mathbf{R}^{(E)}$ ,  $\mathbf{N}_Q^{(E)}$  le corrispondenti quantità per le forze esterne, dalle (8.6) si ottiene

$$\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N}_Q^{(E)} = \mathbf{0}. \quad (8.7)$$

Le relazioni (8.7) si chiamano **equazioni cardinali della Statica**.

Sottolineamo il fatto che le (8.7) sono in generale condizioni necessarie ma non sufficienti per l'equilibrio. Infatti, se consideriamo il problema dei due corpi (vedi Sezione 3.5) si ha

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1, \quad (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{0},$$

quindi

$$\mathbf{R} = \mathbf{N}_{P_1} = \mathbf{0},$$

ma il problema non ammette nessuna configurazione di equilibrio.

Se un sistema di  $N$  punti materiali vincolati è in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze attive, sostituendo ai vincoli le reazioni vincolari che questi esercitano, il sistema si può considerare costituito da un insieme di punti materiali liberi, ciascuno dei quali è in equilibrio sotto l'azione delle forze attive e vincolari agenti su di esso.

L'equilibrio dei punti del sistema non viene turbato se a due o più forze applicate ad uno stesso punto del sistema si sostituisce la loro risultante, oppure, se la forza agente su un punto del sistema si scompone come somma vettoriale di più forze applicate allo stesso punto. Quindi, per un sistema meccanico discreto in equilibrio possiamo sempre eseguire sulle forze applicate ai singoli punti la prima operazione elementare, introdotta nella Sezione 5.5, senza alterare l'equilibrio.

Nel caso di un corpo rigido si assume che valga il cosiddetto **postulato caratteristico dei solidi**: l'equilibrio di un corpo rigido non si altera se si applicano due forze direttamente opposte a due punti qualsiasi del corpo. Quindi, nel caso di un corpo rigido in equilibrio possiamo anche eseguire la seconda operazione elementare sulle forze applicate ai singoli punti senza alterare l'equilibrio.

Possiamo trarre la seguente conclusione.

**Proposizione 55.** *Nel caso di un corpo rigido le equazioni (8.7) sono anche sufficienti per avere un equilibrio.*

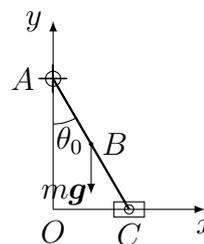
*Dimostrazione.* Assumiamo che valgano le equazioni (8.7), per cui le forze esterne che agiscono sui punti  $P_i$  del corpo formano un sistema equilibrato. Sappiamo già che le forze interne agenti sui  $P_i$  formano un altro sistema equilibrato, per cui anche l'unione dei due sistemi di forze applicate è equilibrato:

$$\mathbf{R} = \mathbf{N}_Q = \mathbf{0}$$

per ogni scelta del polo  $Q \in \mathbb{E}^3$ . Poiché per un corpo rigido abbiamo a disposizione entrambe le operazioni elementari, per la Proposizione 24 possiamo ridurre quest'ultimo sistema di forze (comprendente forze interne ed esterne) ad un sistema nullo. In questo modo ogni punto del corpo rigido risulta soggetto ad una forza nulla, e dunque il corpo è in equilibrio. □

Le equazioni (8.7) sono utili anche per il calcolo delle reazioni vincolari in condizioni di equilibrio.

**Esempio 17.** In un piano verticale si fissi un riferimento  $Oxy$ , con asse  $Oy$  verticale ascendente. Consideriamo un'asta  $AC$  omogenea, di lunghezza  $2\ell$  e massa  $m$ . L'estremo  $A$  dell'asta è incernierato all'asse  $Oy$  nel punto di coordinate  $(0, 2h)$ , con  $0 < h < \ell$ , tramite una cerniera cilindrica fissa. L'estremo  $C$  è vincolato all'asse  $Ox$  tramite una cerniera cilindrica scorrevole sull'asse  $Ox$  (vedi figura). Sull'asta agisce la forza di gravità, di accelerazione  $g$ .



L'asta è chiaramente in equilibrio in quanto i vincoli non le permettono di muoversi. Il valore  $\theta_0$  dell'angolo tra l'asta e la direzione verticale è dato da  $\cos \theta_0 = h/\ell$ . Tutti i vincoli sono supposti privi di attrito e le cerniere hanno massa trascurabile. Calcoliamo le coordinate delle reazioni vincolari  $\Phi_A$ ,  $\Phi_C$  esercitate sull'asta nei punti  $A$ ,  $C$ . Siano  $e_1, e_2$  le coordinate dei versori degli assi  $Ox, Oy$ . Le reazioni vincolari si scrivono

$$\Phi_A = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad \Phi_C = \gamma e_2,$$

con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  da determinarsi. La prima equazione cardinale della Statica si scrive

$$\Phi_A + \Phi_C - mge_2 = \mathbf{0},$$

per cui si ottiene

$$\alpha = 0, \quad \beta + \gamma - mg = 0.$$

La seconda equazione cardinale della Statica, calcolata rispetto al polo  $A$ , si scrive<sup>2</sup>

$$(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \times (-mge_2) + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A) \times \gamma e_2 = \mathbf{0}, \quad (8.8)$$

con  $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_C$  le coordinate dei punti  $A, B, C$ . All'equilibrio si ha

$$\mathbf{x}_A = (0, 2h, 0), \quad \mathbf{x}_B = (\ell \sin \theta_0, \ell \cos \theta_0, 0), \quad \mathbf{x}_C = (2\ell \sin \theta_0, 0, 0).$$

Dalla (8.8) si ottiene

$$-mg + 2\gamma = 0.$$

Si ha quindi

$$\gamma = \frac{mg}{2}, \quad \beta = mg - \gamma = \frac{mg}{2}$$

e dunque

$$\Phi_A = \Phi_C = \frac{mg}{2} e_2.$$

Adesso calcoliamo le stesse reazioni vincolari usando il principio dei lavori virtuali. Immaginiamo di eliminare il vincolo in  $C$ , dato dalla cerniera scorrevole in

<sup>2</sup>si estendono questi vettori ad  $\mathbb{R}^3$  aggiungendo una terza coordinata nulla.

figura, e consideriamo la reazione  $\Phi_C$  come una forza esterna attiva. In questo caso il sistema acquista un grado di libertà. Detto  $\theta$  l'angolo tra l'asta e la direzione verticale, che adesso può variare, le coordinate del punto  $C$  dell'asta sono date da

$$\chi_C = 2\ell \sin \theta \mathbf{e}_1 + 2(h - \ell \cos \theta) \mathbf{e}_2,$$

per cui gli spostamenti virtuali del punto  $C$  dalla configurazione di equilibrio, con  $\theta = \theta_0$ , sono

$$\delta \chi_C = 2\ell \cos \theta_0 \delta \theta \mathbf{e}_1 + 2\ell \sin \theta_0 \delta \theta \mathbf{e}_2.$$

Dalla relazione  $\chi_B - \chi_A = \frac{1}{2}(\chi_C - \chi_A)$  si ottiene anche che

$$\delta \chi_B = \frac{1}{2} \delta \chi_C.$$

Il lavoro virtuale delle forze esterne attive (a cui si è aggiunta la reazione  $\Phi_C$ ) in corrispondenza ad uno spostamento virtuale  $\delta \chi_C$  è dato da

$$\delta \mathcal{L}^{(a)} = \gamma \mathbf{e}_2 \cdot \delta \chi_C - mg \mathbf{e}_2 \cdot \delta \chi_B = \ell \sin \theta_0 (2\gamma - mg) \delta \theta.$$

Poiché  $\delta \mathcal{L}^{(a)}$  si deve annullare per ogni spostamento virtuale ammissibile, cioè per ogni  $\delta \theta$ , si ottiene

$$\gamma = \frac{mg}{2}.$$

Immaginiamo adesso di eliminare la cerniera cilindrica in  $A$  e consideriamo la reazione  $\Phi_A$  come una forza esterna attiva. In questo caso il sistema acquista due gradi di libertà. Sia  $s$  l'ascissa di  $C$  sull'asse  $Ox$ . Le coordinate dei punti  $A, B, C$  sono date da

$$\chi_A = (s - 2\ell \sin \theta) \mathbf{e}_1 + 2\ell \cos \theta \mathbf{e}_2, \quad \chi_B = (s - \ell \sin \theta) \mathbf{e}_1 + \ell \cos \theta \mathbf{e}_2, \quad \chi_C = s \mathbf{e}_1,$$

per cui gli spostamenti virtuali di questi punti dalla configurazione di equilibrio sono

$$\begin{aligned} \delta \chi_A &= (\delta s - 2\ell \cos \theta_0 \delta \theta) \mathbf{e}_1 - 2\ell \sin \theta_0 \delta \theta \mathbf{e}_2, \\ \delta \chi_B &= (\delta s - \ell \cos \theta_0 \delta \theta) \mathbf{e}_1 - \ell \sin \theta_0 \delta \theta \mathbf{e}_2, \\ \delta \chi_C &= \delta s \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Il lavoro virtuale delle forze esterne attive (a cui si è aggiunta la reazione  $\Phi_A$ ) è dato da

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}^{(a)} &= \Phi_A \cdot \delta \chi_A - mg \mathbf{e}_2 \cdot \delta \chi_B + \Phi_C \cdot \delta \chi_C \\ &= \alpha (\delta s - 2\ell \cos \theta_0 \delta \theta) - 2\ell \beta \sin \theta_0 \delta \theta + mg \ell \sin \theta_0 \delta \theta \end{aligned}$$

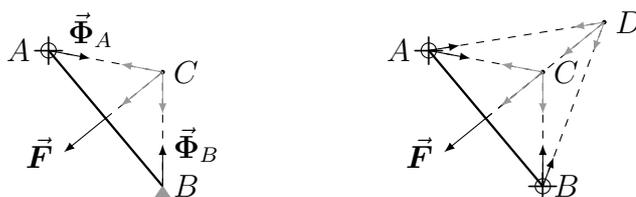


Figura 8.1: Sinistra: problema isostatico. Destra: problema iperstatico.

e si deve annullare in corrispondenza ad ogni spostamento virtuale, cioè per ogni scelta di  $\delta s$  e di  $\delta\theta$ . Se scegliamo  $\delta\theta = 0$ , per l'arbitrarietà di  $\delta s$  si ottiene

$$\alpha = 0.$$

Scegliendo invece  $\delta s = 0$ , per l'arbitrarietà di  $\delta\theta$  si ottiene

$$\beta = \frac{mg}{2}.$$

## 8.5 Problemi isostatici e iperstatici

Consideriamo un'asta con un estremo collegato ad un telaio verticale tramite una cerniera cilindrica fissa e con l'altro estremo appoggiato ad una superficie liscia, come in Figura 8.1 a sinistra. Sull'asta agisce anche una forza attiva esterna  $\vec{F}$ . Le componenti  $\vec{\Phi}_A$ ,  $\vec{\Phi}_B$  delle reazioni vincolari agenti sull'asta nei punti  $A$  e  $B$  risultano univocamente determinate. Infatti dalle equazioni cardinali della Statica otteniamo tre equazioni (due dalla prima equazione cardinale ed una dalla seconda) con tre incognite, in quanto è noto *a priori* che  $\vec{\Phi}_B$  ha direzione verticale per l'ipotesi fatta sul vincolo. Nella stessa figura mostriamo la costruzione grafica delle reazioni vincolari: per avere un sistema di forze equilibrato, se la forza  $\vec{F}$  non è diretta come l'asta, le linee di azione di  $\vec{F}$  e quelle di  $\vec{\Phi}_A$ ,  $\vec{\Phi}_B$  si devono incontrare in un punto, che in figura è chiamato  $C$ . In questo caso il problema è detto **isostatico**.

Supponiamo adesso che anche l'estremo  $B$  dell'asta sia vincolato ad un telaio orizzontale tramite una cerniera cilindrica fissa, come in Figura 8.1 a destra. In questo caso le componenti delle reazioni vincolari non sono univocamente determinate, infatti le incognite sono quattro. Nella stessa figura mostriamo due diverse soluzioni grafiche per le reazioni vincolari in  $A$  e  $B$ . In questo caso il problema è detto **iperstatico**.

## 8.6 Sovrapposizione degli effetti e metodo di scomposizione

Osserviamo che le equazioni introdotte per trattare i problemi di Statica dipendono linearmente dalle forze. Possiamo allora utilizzare il **principio di sovrapposizione degli effetti**: se un effetto dipende linearmente dalle cause che lo producono, allora tale effetto è dato dalla somma degli effetti che ciascuna causa produrrebbe se agisse da sola.

Come abbiamo già osservato, se un sistema meccanico è composto da più parti ed è in equilibrio, allora ciascuna delle sue parti deve soddisfare le condizioni per l'equilibrio. Questo fatto conduce a un procedimento detto **metodo di scomposizione** di un sistema meccanico.

Mostriamo come queste due osservazioni possono essere utilizzate per calcolare le reazioni vincolari di un sistema meccanico.

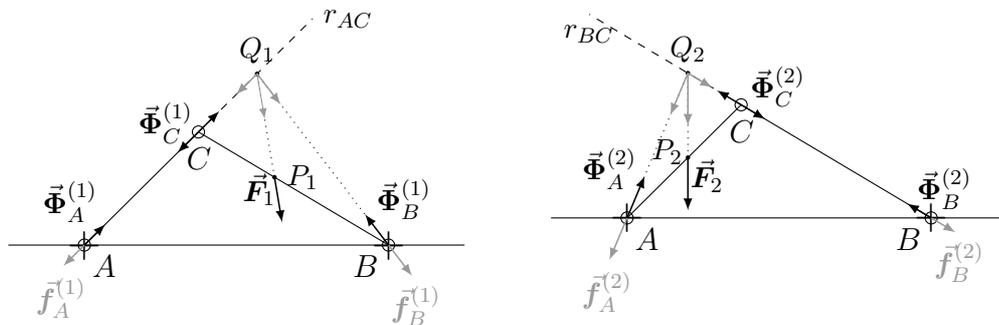


Figura 8.2: Reazioni vincolari in  $A$ ,  $B$  nell'ipotesi che una delle due aste sia scarica.

**Esempio 18. (arco a tre cerniere)** Si consideri il sistema formato da due aste rigide  $AC$ ,  $BC$  collegate nel loro estremo comune  $C$  da una cerniera cilindrica mobile. Gli altri estremi  $A$  e  $B$  delle due aste sono fissati ad un telaio rettilineo orizzontale attraverso due cerniere cilindriche fisse. Nel punto  $P_1$  dell'asta  $BC$  è applicata una forza  $\vec{F}_1$  e nel punto  $P_2$  dell'asta  $AC$  è applicata una forza  $\vec{F}_2$ . Tutti i vincoli sono supposti privi di attrito. Mostriamo come si calcolano le reazioni vincolari esercitate dalle cerniere in  $A$  e  $B$  sulle due aste.

Assumiamo dapprima che l'asta  $AC$  sia **scarica**, cioè che su di essa non agiscano forze attive esterne. In questa ipotesi chiamiamo  $\vec{\Phi}_A^{(1)}$  e  $\vec{\Phi}_C^{(1)}$  le reazioni vincolari esercitate dalle cerniere in  $A$  e  $C$  sull'asta  $AC$ , e chiamiamo  $\vec{\Phi}_B^{(1)}$  la reazione della cerniera in  $B$  sull'asta  $BC$ . Poiché il sistema composto dalla sola asta  $AC$  è in equilibrio, le reazioni  $\vec{\Phi}_A^{(1)}$  e  $\vec{\Phi}_C^{(1)}$  devono essere direttamente opposte e dirette lungo la retta  $r_{AC}$  per  $A, C$ .

Osserviamo che, per il principio di azione e reazione e poiché il sistema è in equilibrio, la cerniera in  $C$  esercita sull'asta  $BC$  una reazione vincolare opposta a quella che la stessa cerniera esercita su  $AC$ .

Anche il sistema costituito dalla sola asta  $BC$  è in equilibrio e su di essa agiscono le reazioni vincolari  $\vec{\Phi}_B^{(1)}$ ,  $-\vec{\Phi}_C^{(1)}$  e la forza  $\vec{F}_1$  applicata nel punto  $P_1$ . Scomponiamo tale forza nel sistema equivalente  $\{(\vec{f}_A^{(1)}, A), (\vec{f}_B^{(1)}, B)\}$ , con una componente lungo  $r_{AC}$  e l'altra applicata in  $B$ , vedi Figura 8.2 a sinistra<sup>3</sup>. Per avere l'equilibrio si ottiene quindi che

$$\vec{\Phi}_A^{(1)} = -\vec{f}_A^{(1)}, \quad \vec{\Phi}_B^{(1)} = -\vec{f}_B^{(1)}.$$

Assumiamo adesso che l'asta  $BC$  sia scarica e chiamiamo  $\vec{\Phi}_B^{(2)}$  e  $\vec{\Phi}_C^{(2)}$  le reazioni vincolari esercitate dalle cerniere in  $B$  e  $C$  sull'asta  $BC$ , e  $\vec{\Phi}_A^{(2)}$  la reazione della cerniera in  $A$  su  $AC$ .

In modo analogo a prima otteniamo che le reazioni  $\vec{\Phi}_B^{(2)}$  e  $\vec{\Phi}_C^{(2)}$  devono essere direttamente opposte e dirette lungo la retta  $r_{BC}$  per  $B, C$ . L'asta  $AC$  deve pure stare in equilibrio sotto l'azione delle reazioni  $\vec{\Phi}_A^{(2)}$ ,  $-\vec{\Phi}_C^{(2)}$  e della forza  $\vec{F}_2$  applicata in  $P_2$ . Decomponiamo tale forza nel sistema equivalente  $\{(\vec{f}_A^{(2)}, A), (\vec{f}_B^{(2)}, B)\}$ , con una componente lungo  $r_{BC}$  e l'altra applicata in  $A$ , vedi Figura 8.2 a destra. All'equilibrio si ottiene quindi

$$\vec{\Phi}_A^{(2)} = -\vec{f}_A^{(2)}, \quad \vec{\Phi}_B^{(2)} = -\vec{f}_B^{(2)}.$$

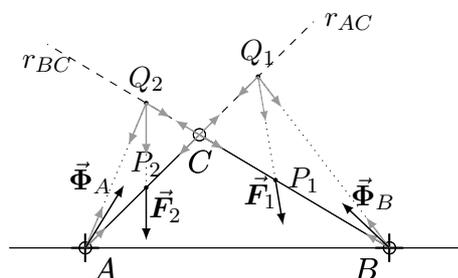


Figura 8.3: Reazioni vincolari esercitate sulle due aste dalle cerniere in  $A$ ,  $B$  in presenza delle forze  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ .

Usando il principio di sovrapposizione degli effetti, per determinare le reazioni vincolari  $\vec{\Phi}_A$  e  $\vec{\Phi}_B$  esercitate dalle cerniere in  $A$  e  $B$  sulle aste  $AC$  e  $BC$  rispettivamente, in presenza di entrambe le forze attive  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  applicate in  $P_1$ ,  $P_2$ , basta

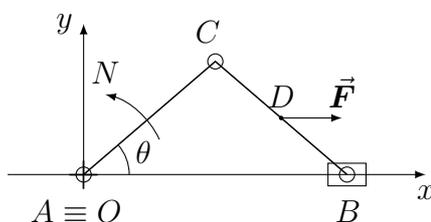
<sup>3</sup>la figura è disegnata nel caso in cui  $\vec{F}_1$  non sia parallela alla retta  $r_{AC}$ , comunque anche nel caso  $\vec{F}_1 \parallel r_{AC}$  si può scomporre  $(\vec{F}_1, P_1)$  in un sistema equivalente con le stesse caratteristiche (*dimostrarlo!*)

fare la somma vettoriale delle reazioni vincolari esercitate in  $A$  e  $B$  nei due casi precedenti, vedi Figura 8.3. Concludiamo quindi che

$$\vec{\Phi}_A = \vec{\Phi}_A^{(1)} + \vec{\Phi}_A^{(2)}, \quad \vec{\Phi}_B = \vec{\Phi}_B^{(1)} + \vec{\Phi}_B^{(2)}.$$

## 8.7 Esercizi

**Esercizio 25.** In un piano orizzontale si fissi un riferimento  $Oxy$ . In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da due aste, di uguale lunghezza  $2\ell$ , incernierate in un loro estremo  $C$ . L'estremo  $A$  della prima asta è incernierato nell'origine  $O$ . L'estremo  $B$  della seconda asta può scivolare sull'asse  $Ox$ . Siano  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  i versori degli assi  $Ox, Oy$ . Nel punto medio dell'asta  $BC$  agisce una forza costante  $\vec{F} = F\hat{e}_1$ , con  $F > 0$ . Sull'asta  $AC$  agisce una coppia di forze di momento  $\vec{N} = N\hat{e}_1 \times \hat{e}_2$ , con  $N > 0$ . Assumiamo che tutti i vincoli siano privi di attrito.



Usando come coordinate l'angolo  $\theta$  che l'asta  $AC$  forma con l'asse  $Ox$ ,

1. determinare le configurazioni di equilibrio con il principio dei lavori virtuali;
2. ritrovare le configurazioni di equilibrio e calcolare le reazioni vincolari nei punti  $A, B, C$  con le equazioni cardinali della statica.

**Soluzione.** 1. Il lavoro virtuale delle forze attive agenti sul sistema è dato da

$$\delta\mathcal{L} = N\dot{\theta}dt - 3F\ell \sin\theta\delta\theta = (N - 3F\ell \sin\theta)\delta\theta,$$

in cui si è usato  $\dot{\theta}dt = d\theta = \delta\theta$ . Per il principio dei lavori virtuali si ha

$$\delta\mathcal{L} = 0$$

per ogni scelta di  $\delta\theta$ , per cui gli equilibri corrispondono alle soluzioni di

$$\sin\theta = \frac{N}{3F\ell},$$

cioè

$$\theta_1 = \arcsin \frac{N}{3F\ell}, \quad \theta_2 = \pi - \theta_1.$$

2. Chiamiamo  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  i versori degli assi  $Ox, Oy$ . Sia  $\vec{\Phi}_C = \Phi_C^x \hat{e}_1 + \Phi_C^y \hat{e}_2$  la reazione vincolare esercitata dall'asta  $BC$  sull'asta  $AC$  nel punto  $C$ . Siano inoltre  $\vec{\Phi}_A = \Phi_A^x \hat{e}_1 + \Phi_A^y \hat{e}_2$  la reazione in  $A$  e  $\vec{\Phi}_B = \Phi_B^y \hat{e}_2$  la reazione in  $B$ .

Le aste  $AC$  e  $BC$  devono essere in equilibrio individualmente. Le equazioni cardinali della Statica per l'asta  $AC$  si scrivono

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_C &= \vec{0}, \\ N\hat{e}_3 + (C - A) \times \vec{\Phi}_C &= \vec{0},\end{aligned}\tag{8.9}$$

dove  $A$  è il polo scelto per la seconda equazione cardinale.

Le equazioni cardinali della Statica per l'asta  $BC$  si scrivono

$$\begin{aligned}-\vec{\Phi}_C + F\hat{e}_1 + \vec{\Phi}_B &= \vec{0}, \\ (D - C) \times F\hat{e}_1 + (B - C) \times \vec{\Phi}_B &= \vec{0},\end{aligned}\tag{8.10}$$

dove  $C$  è il polo scelto per la seconda equazione cardinale.

Dalla seconda equazione in (8.10) si trova

$$\Phi_B^y = -\frac{F}{2} \tan \theta$$

e dalla prima

$$\Phi_C^x = F, \quad \Phi_C^y = \Phi_B^y.$$

Sostituendo queste relazioni nella seconda equazione in (8.9) si ritrova l'equazione degli equilibri

$$\sin \theta = \frac{N}{3F\ell}.$$

Infine, dalla prima equazione in (8.9) si ottiene

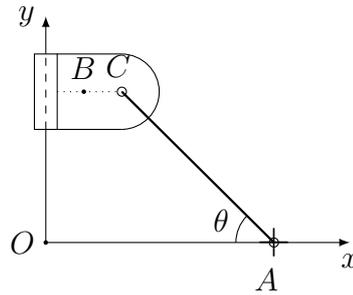
$$\vec{\Phi}_A = -\vec{\Phi}_C.$$

**Esercizio 26.** *In un piano verticale si fissi un riferimento  $Oxy$  con asse  $Oy$  verticale ascendente. In tale piano si consideri il sistema meccanico formato da un'asta omogenea  $AC$ , di massa  $m$  e lunghezza  $2\ell$ . L'estremo  $A$  dell'asta è incernierato nel punto dell'asse  $Ox$  di coordinate  $(\frac{3\sqrt{2}}{2}\ell, 0)$ . L'altro estremo  $C$  è incernierato in un punto di un corpo rigido  $\mathcal{D}$  di massa  $M$  e baricentro  $B$ . Il corpo  $\mathcal{D}$  è anche collegato all'asse  $Oy$  attraverso una coppia prismatica. Le coordinate dei punti  $B, C$  sono*

$$B \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\ell, \sqrt{2}\ell\right), \quad C \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \sqrt{2}\ell\right).$$

*Sui due corpi agisce la forza di gravità di accelerazione  $g$  e tutti i vincoli sono supposti privi di attrito.*

1. Calcolare l'angolo  $\theta$  che l'asta  $AC$  forma con la direzione orizzontale.



2. Usando il principio di sovrapposizione degli effetti ed il metodo di scomposizione determinare le componenti delle reazioni vincolari in A e in C esercitate rispettivamente dall'asse  $Ox$  e dal corpo  $\mathcal{D}$  sugli estremi dell'asta.

**Soluzione.** 1. Si ha

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{2}\ell}{\frac{3\sqrt{2}}{2}\ell - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell} = 1,$$

quindi

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

2. Supponiamo inizialmente che il corpo  $\mathcal{D}$  sia scarico, cioè che su di esso non agiscano forze attive esterne. Indichiamo con

$$\vec{\Phi}_A^{(1)}, \quad \vec{\Phi}_C^{(1)}$$

le reazioni vincolari che l'asse  $Ox$  e il corpo  $\mathcal{D}$  esercitano sull'asta  $AC$  in questa ipotesi. Usando il metodo di scomposizione, sia l'asta  $AC$  che il corpo  $\mathcal{D}$  devono soddisfare le equazioni cardinali della Statica individualmente.

Sull'asta  $AC$  agiscono la forza di gravità, equivalente ad un'unica forza  $-mg\hat{e}_2$  applicata nel baricentro e le reazioni  $\vec{\Phi}_A^{(1)}, \vec{\Phi}_C^{(1)}$ . Perché  $AC$  sia in equilibrio deve valere

$$\vec{\Phi}_C^{(1)} \neq \vec{0}.$$

Per il principio di azione e reazione l'asta  $AC$  esercita su  $\mathcal{D}$  una forza  $-\vec{\Phi}_C^{(1)}$ . Le forze di reazione esercitate dall'asse  $Oy$  su  $\mathcal{D}$  devono quindi avere risultante non nulla e sono equivalenti ad un'unica forza  $F^{(1)}\hat{e}_1$  applicata ad un punto del loro asse centrale. Dalla prima equazione cardinale della Statica applicata a  $\mathcal{D}$  si ottiene

$$-\vec{\Phi}_C^{(1)} + F^{(1)}\hat{e}_1 = \vec{0}.$$

Dall'equazione precedente si ottiene che  $\vec{\Phi}_C^{(1)}$  è diretta lungo  $\hat{e}_1$ :

$$\vec{\Phi}_C^{(1)} = F^{(1)}\hat{e}_1.$$

Le equazioni cardinali della Statica per l'asta (la seconda equazione è calcolata rispetto ad  $A$ ) ci danno

$$\begin{aligned} F^{(1)}\hat{e}_1 - mg\hat{e}_2 + \vec{\Phi}_A^{(1)} &= \vec{0}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}mgl - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\ell F^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$F^{(1)} = \frac{mg}{2}, \quad \vec{\Phi}_A^{(1)} = -\frac{mg}{2}\hat{e}_1 + mg\hat{e}_2.$$

Supponiamo adesso che l'asta  $AC$  sia scarica e indichiamo con

$$\vec{\Phi}_A^{(2)}, \quad \vec{\Phi}_C^{(2)}$$

le reazioni vincolari che l'asse  $Ox$  e il corpo  $\mathcal{D}$  esercitano sull'asta  $AC$  in questa ipotesi. Dalle equazioni cardinali della Statica applicate all'asta  $AC$  si ottiene

$$\vec{\Phi}_A^{(2)} + \vec{\Phi}_C^{(2)} = \vec{0}, \quad \vec{\Phi}_A^{(2)} = \Phi_A^{(2,\theta)}\hat{e}_\theta, \quad \vec{\Phi}_C^{(2)} = \Phi_C^{(2,\theta)}\hat{e}_\theta, \quad (8.11)$$

dove

$$\hat{e}_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = \frac{C-A}{|C-A|}.$$

Su  $\mathcal{D}$  agiscono la forza di gravità, equivalente ad un'unica forza  $-Mg\hat{e}_2$  applicata nel baricentro  $B$ , la reazione  $-\vec{\Phi}_C^{(2)}$  (per il principio di azione e reazione) e le forze di reazione esercitate dall'asse  $Oy$ . Perché  $\mathcal{D}$  sia in equilibrio queste ultime devono avere necessariamente risultante non nulla e sono quindi equivalenti ad un'unica forza  $F^{(2)}\hat{e}_1$  applicata ad un punto del loro asse centrale. Dalla prima equazione cardinale della Statica applicata a  $\mathcal{D}$  si ottiene

$$-Mg\hat{e}_2 - \vec{\Phi}_C^{(2)} + F^{(2)}\hat{e}_1 = \vec{0},$$

da cui si ottiene

$$\Phi_C^{(2,\theta)} = -\sqrt{2}Mg$$

e, per la prima delle (8.11),

$$\Phi_A^{(2,\theta)} = \sqrt{2}Mg.$$

Usando il principio di sovrapposizione degli effetti concludo che

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_A &= \vec{\Phi}_A^{(1)} + \vec{\Phi}_A^{(2)} = -\left(\frac{m}{2} + M\right)g\hat{e}_1 + (m + M)g\hat{e}_2 \\ \vec{\Phi}_C &= \vec{\Phi}_C^{(1)} + \vec{\Phi}_C^{(2)} = \left(\frac{m}{2} + M\right)g\hat{e}_1 - Mg\hat{e}_2 \end{aligned}$$