

Capitolo 7

Sistemi vincolati

Introduciamo le diverse classificazioni dei vincoli e presentiamo il problema dello studio del moto vincolato in cui, oltre al moto, appaiono come incognite anche le forze di reazione dei vincoli.

7.1 Vincoli e reazioni vincolari

I vincoli sono una restrizione dell'insieme delle posizioni e velocità dei punti del sistema. Queste restrizioni si ottengono imponendo delle relazioni (equazioni o disequazioni) che possono coinvolgere le coordinate delle posizioni dei punti, quelle delle loro velocità ed il tempo. Se in tali relazioni appaiono delle disequazioni, che non si possono ridurre ad equazioni¹, allora i vincoli si dicono **unilaterali**. Altrimenti si dicono **bilaterali**. Nel seguito tratteremo esclusivamente il caso dei vincoli bilaterali. Inoltre, i vincoli si dicono **fissi** se nelle relazioni che li definiscono non appare esplicitamente il tempo t . Se invece il tempo vi appare tali vincoli si dicono **mobili**.

Con il termine ‘*vincoli*’ indicheremo anche i mezzi materiali con cui vengono attuate queste restrizioni alle posizioni e velocità.

Esempi elementari di sistemi meccanici con vincoli bilaterali che si incontrano comunemente sono i seguenti: 1) un punto materiale vincolato ad una curva o una superficie, 2) un insieme di punti materiali che mantengono invariata la loro distanza mutua (cioè un corpo rigido), 3) un corpo rigido che rotola senza strisciare su una superficie.

Consideriamo un sistema di N punti materiali di masse m_1, \dots, m_N soggetto a vincoli bilaterali. Tipicamente questi vincoli sono definiti da un'equazione vettoriale della forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (7.1)$$

¹ad esempio il sistema $f(\mathbf{x}) \geq 0, f(\mathbf{x}) \leq 0$ si riduce a $f(\mathbf{x}) = 0$.

dove $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$ denotano le coordinate delle posizioni e delle velocità dei punti, \mathbf{a} è un vettore di \mathbb{R}^k e B una matrice di dimensioni $k \times 3N$, entrambi con coefficienti che sono funzioni di (\mathbf{x}, t) di classe C^2 . Osserviamo che in (7.1) la dipendenza dalle velocità è lineare.

Affinchè queste equazioni siano soddisfatte si assume che i vincoli esercitino delle forze Φ_j sui punti del sistema, che si chiamano **reazioni vincolari**. Anche in presenza di vincoli assumiamo che valgano le equazioni di Newton, che in questo caso si scrivono nella forma

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j(t) = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \Phi_j(t), \quad j = 1 \dots N.$$

Le reazioni vincolari Φ_j si aggiungono alle forze attive \mathbf{F}_j , ma sono di natura diversa, in quanto le \mathbf{F}_j sono funzioni note dello stato cinetico dei punti del sistema mentre le Φ_j sono incognite da determinarsi insieme al moto del sistema. Quindi, risolvere un problema di moto vincolato significa trovare il moto $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ e le reazioni vincolari $\Phi_j(t)$. Vedremo che per risolvere tale problema è necessario aggiungere delle ipotesi sulle reazioni vincolari.

7.1.1 Coppie cinematiche

Altri esempi di vincoli sono dati dalle **coppie cinematiche**. Se due corpi rigidi sono vincolati in modo tale che una superficie σ_1 solidale al primo resti sempre a contatto con una superficie σ_2 solidale al secondo, allora si dice che i due corpi (o le due superfici) formano una coppia cinematica. I tipi principali di coppie cinematiche sono i seguenti:

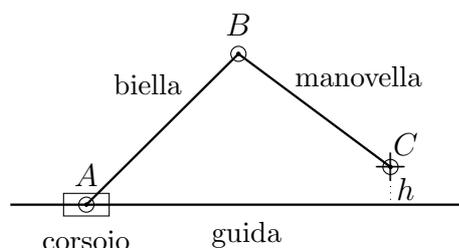
1. **coppia prismatica:** σ_1 e σ_2 sono superfici cilindriche uguali, non di rotazione, per cui è possibile solo un moto traslatorio di un corpo rispetto all'altro lungo una direzione, che è quella delle generatrici del cilindro;
2. **coppia rotoidale:** σ_1 e σ_2 sono superfici di rotazione uguali e coassiali, per cui è possibile solo un moto rotatorio di un corpo rispetto all'altro. L'asse comune alle due superfici si dice **asse della coppia**. Esse formano una cerniera cilindrica, che può essere fissa oppure mobile;
3. **coppia elicoidale:** σ_1 e σ_2 sono superfici elicoidali uguali e coassiali. L'asse comune alle due superfici si dice asse della coppia. In questo caso in corrispondenza ad un moto traslatorio si ha anche un moto rotatorio ad esso correlato: si ha una traslazione di p (detto **passo dell'elica**) in direzione dell'asse della coppia quando σ_2 ruota di 2π rispetto a σ_1 .
4. **coppia rototraslatoria:** σ_1 e σ_2 sono superfici di rotazione, cilindriche, uguali e coassiali, con sezione circolare. L'asse della coppia corrisponde all'asse comune dei due cilindri. È possibile che i due corpi svolgano, l'uno

rispetto all'altro, sia un moto traslatorio lungo la direzione dell'asse della coppia che un moto rotatorio attorno allo stesso asse;

5. **coppia sferica:** σ_1 e σ_2 sono sfere concentriche uguali, o porzioni di esse. Il centro delle due sfere si chiama **centro della coppia**.

Definiamo **catena cinematica** un sistema di corpi rigidi collegati con coppie cinematiche, tali che il moto relativo di ognuna di esse abbia un solo grado di libertà.

Esempio 12. Chiamiamo **manovellismo** una catena cinematica costituita da quattro corpi che si muovono in un piano e sono disposti come in figura: in base alle loro funzioni questi corpi si dicono **biella**, **manovella**, **guida** e **corsoio**. La guida e il corsoio formano una coppia prismatica; gli altri corpi sono collegati tra loro da coppie rotoidali. L'estremo C della manovella è fissato tramite una cerniera cilindrica. Se la distanza h tra C e la guida è nulla allora il manovellismo si dice *centrato*.



7.1.2 Studio del moto vincolato

Mostriamo alcuni esempi elementari che illustrano i problemi che si incontrano nello studio del moto vincolato.

Punto materiale su una curva

Come primo esempio consideriamo il caso di un punto materiale vincolato a muoversi su una curva regolare in \mathbb{R}^3 . Introduciamo la **base di Frénet**, che è una base naturale sulla quale si possono proiettare le equazioni di Newton.

Consideriamo una curva regolare $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizzata per lunghezza d'arco s . Indicando con $'$ la derivata rispetto al parametro s si ha

$$\int_0^s |\gamma'(\sigma)| d\sigma = s,$$

o anche

$$|\gamma'(s)| = 1,$$

per ogni valore di s scelto nell'intervallo di definizione di γ . Allora si ottiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \gamma(s(t)), \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{s}(t)\gamma'(s(t)), \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{s}^2(t)\gamma''(s(t)) + \ddot{s}(t)\gamma'(s(t)).\end{aligned}\tag{7.2}$$

Consideriamo la base (mobile) di \mathbb{R}^3 , detta **base di Frénet**, costituita dai vettori

$$\mathbf{e}_t(s) = \gamma'(s), \quad \mathbf{e}_n(s) = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}, \quad \mathbf{e}_b(s) = \mathbf{e}_t(s) \times \mathbf{e}_n(s).$$

Poiché s è il parametro arco si ha

$$\mathbf{e}_t(s) \cdot \mathbf{e}_t(s) = 1, \quad \forall s.\tag{7.3}$$

Derivando la relazione (7.3) rispetto ad s si ottiene

$$\mathbf{e}_t(s) \cdot \mathbf{e}_n(s) = 0.$$

La funzione $\kappa(s) = |\gamma''(s)|$ si chiama **curvatura** della curva γ . Con questa notazione si ha

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{s}^2\kappa(s)\mathbf{e}_n(s) + \ddot{s}\mathbf{e}_t(s).$$

I vettori $\mathbf{e}_t(s), \mathbf{e}_n(s), \mathbf{e}_b(s)$ si chiamano rispettivamente vettore **tangente**, **normale** e **binormale**.

Supponiamo che il punto sia soggetto ad una forza $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ e alla reazione vincolare Φ che costringe il punto a restare sulla curva γ . L'equazione di Newton si scrive

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) + \Phi(t),\tag{7.4}$$

dove le incognite sono il moto $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ e la reazione vincolare Φ che dipende da esso. Se sostituiamo le formule (7.2) nell'equazione (7.4) e proiettiamo questa equazione sulla base di Frénet si ottiene

$$\begin{aligned}m\ddot{s} &= F_t(s, \dot{s}, t) + \Phi_t, \\ m\dot{s}^2\kappa(s) &= F_n(s, \dot{s}, t) + \Phi_n, \\ 0 &= F_b(s, \dot{s}, t) + \Phi_b,\end{aligned}\tag{7.5}$$

dove $F_t, F_n, F_b, \Phi_t, \Phi_n, \Phi_b$ sono le componenti della forza \mathbf{F} e della reazione vincolare Φ lungo i vettori di questa base.

Già nel semplice esempio di un punto materiale vincolato ad una curva regolare si vede che, per determinare il moto $s(t)$ e la reazione vincolare $\Phi(t)$, è necessario

fare delle ipotesi aggiuntive. Un'ipotesi comune è assumere che la reazione vincolare sia ortogonale alla curva (vincolo *liscio*, o *privo di attrito*). Questa ipotesi si scrive in modo naturale nella base di Frénet:

$$\Phi_t = \Phi \cdot \mathbf{e}_t = 0.$$

In questo caso la prima equazione in (7.5) si scrive

$$m\ddot{s} = F_t(s, \dot{s}, t).$$

Poiché questa equazione non contiene reazioni vincolari, da essa si può determinare il moto $t \mapsto s(t)$. Sostituendo $s(t), \dot{s}(t)$ nelle altre due equazioni in (7.5) si ottengono le componenti Φ_n, Φ_b della reazione vincolare ortogonali al vincolo in funzione del tempo t :

$$\Phi_n = -F_n(s, \dot{s}, t) + m\dot{s}^2\kappa(s), \quad \Phi_b = -F_b(s, \dot{s}, t).$$

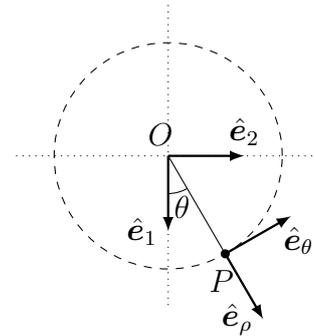
Sottolineamo che la soluzione del problema dipende dall'ipotesi fatta sulla reazione vincolare.

Esercizio 21. *Determinare il moto e la reazione vincolare per una particella di massa m vincolata a muoversi su una circonferenza di raggio R scabra, assumendo che valga la legge di **Coulomb-Morin***

$$\Phi_t = -\frac{\dot{s}}{|\dot{s}|} \sqrt{\Phi_n^2 + \Phi_b^2}.$$

Il pendolo

Si fissi un riferimento $O\hat{\mathbf{e}}_1\hat{\mathbf{e}}_2$, con l'asse $O\hat{\mathbf{e}}_1$ verticale discendente. Consideriamo un pendolo, costituito da un punto materiale P di massa m fissato ad un estremo di una sbarretta di lunghezza ℓ e massa trascurabile. Il punto è quindi vincolato a muoversi su una circonferenza di centro O e raggio ℓ . Assumiamo che il sistema sia soggetto alla forza di gravità, di accelerazione g , e che la reazione vincolare Φ sia diretta lungo la sbarretta, e quindi ortogonale alla circonferenza (vedi figura).



L'equazione di Newton si scrive

$$m\ddot{\mathbf{x}} = mg\mathbf{e}_1 + \Phi\mathbf{e}_\rho, \quad (7.6)$$

in cui, detto θ l'angolo tra il pendolo e la direzione verticale,

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$$

individua la direzione della reazione vincolare. Sia inoltre

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2.$$

Usando le relazioni

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\ell\dot{\theta}^2\mathbf{e}_\rho + \ell\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_1 = \cos\theta\mathbf{e}_\rho - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$$

e proiettando l'equazione (7.6) lungo \mathbf{e}_ρ ed \mathbf{e}_θ si ottiene

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0, \quad (7.7)$$

$$\dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}\cos\theta + \frac{\Phi}{m\ell} = 0. \quad (7.8)$$

La (7.7) è l'equazione del moto del pendolo e corrisponde all'equazione del moto unidimensionale

$$\ddot{\theta} = -V'(\theta), \quad V(\theta) = -\frac{g}{\ell}\cos\theta.$$

Infine, dalla relazione (7.8) si può ricavare la reazione vincolare.

Concludiamo la discussione di questo esempio mostrando il ritratto di fase:

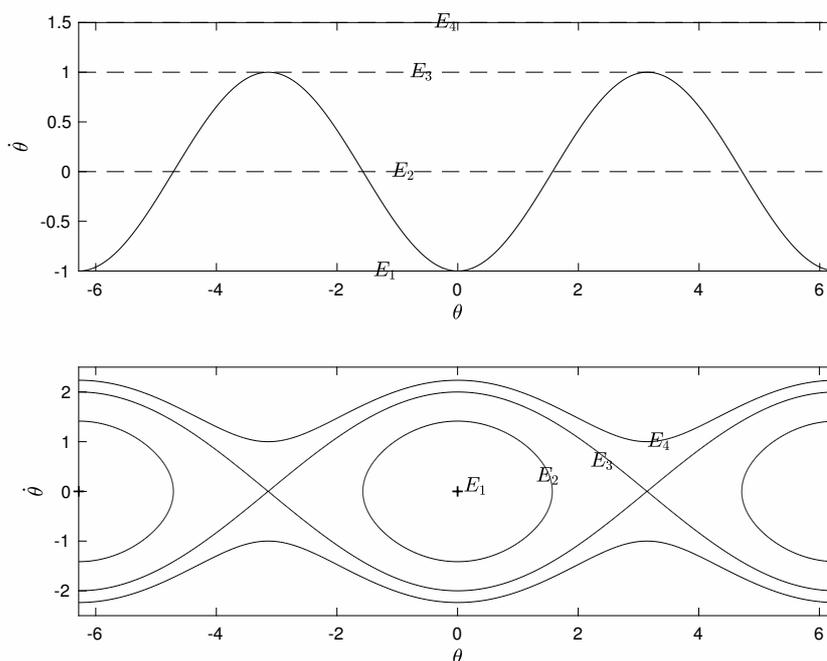


Figura 7.1: Sopra: grafico dell'energia potenziale $V(\theta)$ del pendolo. Sotto: curve di livello dell'energia totale $E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + V(\theta)$.

7.2 Varietà e spazi tangenti

Sia $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ una mappa differenziabile, con $1 \leq k < m$. Ricordiamo che

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^m di dimensione $n = m - k$ se

$$\text{rank} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}.$$

Nell'intorno di ogni punto di \mathcal{C} possiamo introdurre un sistema di coordinate locali $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ tramite delle mappe, dette parametrizzazioni locali, della forma

$$\mathbb{R}^n \supseteq U \ni \mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^m, \quad (7.9)$$

dove U è un aperto di \mathbb{R}^n e

$$\text{rank} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) = n, \quad \forall \mathbf{q} \in U. \quad (7.10)$$

Definizione 18. *Dati una sottovarietà \mathcal{C} di \mathbb{R}^m di dimensione n ed $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, diciamo che il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ è **tangente** a \mathcal{C} in \mathbf{x} se esistono $\epsilon > 0$ ed una curva differenziabile*

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{C}$$

tale che

$$\gamma(0) = \mathbf{x}, \quad \gamma'(0) = \mathbf{v}.$$

Denotiamo con $T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}$ l'insieme dei vettori tangenti a \mathcal{C} in \mathbf{x} .

Proposizione 52. *Per ogni $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$, l'insieme $T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{C}$ è uno spazio vettoriale di dimensione n .*

Dimostrazione. Data una parametrizzazione locale $\mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q})$ di \mathcal{C} in un intorno di $\mathbf{x}_0 = \chi(\mathbf{q}_0)$, con $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^n$, i vettori

$$\frac{\partial \chi}{\partial q_1}(\mathbf{q}_0), \dots, \frac{\partial \chi}{\partial q_n}(\mathbf{q}_0) \quad (7.11)$$

sono linearmente indipendenti per la proprietà (7.10). Inoltre tutti i vettori di $T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{C}$ si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori in (7.11). Infatti ogni curva regolare $s \mapsto \gamma(s) \in \mathcal{C}$ tale che $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$ si può scrivere in un intorno di $s = 0$ come

$$\gamma(s) = \chi(\mathbf{q}(s)),$$

attraverso una curva $s \mapsto \mathbf{q}(s)$ che rappresenta γ nell'insieme delle coordinate \mathbf{q} . Quindi

$$\boldsymbol{\gamma}'(0) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}_0) q'_h(0). \quad (7.12)$$

□

Definizione 19. Per ogni $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$, l'insieme $T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{C}$ si chiama **spazio tangente** a \mathcal{C} in \mathbf{x}_0 .

I coefficienti $q'_1(0), \dots, q'_n(0)$ della combinazione lineare (7.12) dei vettori $\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}$ sono dunque coordinate naturali sugli spazi tangenti, che indicheremo brevemente con $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$. Poniamo inoltre $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$. Data quindi una parametrizzazione locale $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$ di \mathcal{C} , per tutte le scelte di \mathbf{q} ogni vettore \mathbf{v} tangente a \mathcal{C} in $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q})$ si scrive in modo unico come

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}) \dot{q}_h. \quad (7.13)$$

Definizione 20. Chiamiamo **fibrato tangente** alla varietà \mathcal{C} l'insieme

$$TC = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}\}.$$

Proposizione 53. Il fibrato tangente TC è una sottovarietà di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ di dimensione $2n$.

Dimostrazione. Se $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, allora i vettori \mathbf{v} tangenti a \mathcal{C} in \mathbf{x} soddisfano la relazione

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

perché sono ortogonali a tutti i vettori $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \mathbf{x}}$, dove Ψ_j sono le componenti di $\boldsymbol{\Psi}$. Consideriamo la mappa

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \ni (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{\Psi}}} \left(\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}), \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \mathbf{v} \right),$$

con matrice jacobiana

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial (\mathbf{x}, \mathbf{v})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} \right) & \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che

$$\text{rank} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Psi}}}{\partial (\mathbf{x}, \mathbf{v})}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 2k$$

per ogni $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in TC$. □

Una scelta naturale per descrivere il fibrato tangente è usare parametrizzazioni locali della forma

$$U \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \left(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}), \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) \in T\mathcal{C}, \quad (7.14)$$

dove U è un aperto di \mathbb{R}^n .

7.3 Vincoli olonomi, fissi e mobili

Consideriamo un sistema di N punti materiali le cui posizioni $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ sono vincolate in ogni istante t ad appartenere all'insieme

$$\mathcal{C}_t = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} : \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \}, \quad (7.15)$$

dove

$$\boldsymbol{\Psi} : \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad 1 \leq k < 3N,$$

e si ha

$$\text{rank} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}_t, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (7.16)$$

Quindi per ogni tempo t , l'insieme delle configurazioni \mathcal{C}_t è una sottovarietà di \mathbb{R}^{3N} di dimensione $n = 3N - k$, che si chiama **varietà delle configurazioni** al tempo t .

Definizione 21. *Il numero di gradi di libertà del sistema è la dimensione della varietà \mathcal{C}_t .*

Osservazione 30. *Il numero di gradi di libertà di un sistema meccanico corrisponde quindi al numero minimo di parametri scalari necessari per individuare, ad ogni istante, la configurazione del sistema.*

Se la mappa $\boldsymbol{\Psi}$ non dipende dal tempo i vincoli sono fissi e si scrive semplicemente \mathcal{C} per la varietà delle configurazioni.

Nel caso di vincoli mobili, per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato, le mappe della forma

$$U \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t) \in \mathcal{C}_t,$$

definiscono parametrizzazioni locali della varietà delle configurazioni \mathcal{C}_t . Le componenti q_1, \dots, q_n del vettore \mathbf{q} si chiamano **coordinate lagrangiane**. I possibili vettori velocità dei punti del sistema al tempo t si scrivono nella forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}(\mathbf{q}, t), \quad (7.17)$$

al variare di \mathbf{q}, t e delle componenti \dot{q}_h del vettore $\dot{\mathbf{q}}$, che si chiamano **velocità lagrangiane**. Infatti, se $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ è una curva in \mathbb{R}^n che rappresenta un moto $t \mapsto \chi(\mathbf{q}(t), t) \in \mathcal{C}_t$, derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(\mathbf{q}(t), t) \dot{q}_h(t) + \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{q}(t), t).$$

Al variare dei coefficienti \dot{q}_h l'espressione

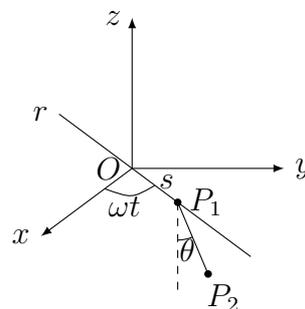
$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_h \quad (7.18)$$

descrive tutti i vettori tangenti alla varietà \mathcal{C}_t : questi vettori si dicono anche **velocità virtuali**. Nel caso di vincoli fissi le velocità virtuali coincidono con quelle possibili, cioè

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

mentre, nel caso di vincoli mobili, queste due velocità sono genericamente distinte.

Esercizio 22. Fissato un riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente, consideriamo il sistema meccanico formato da due punti P_1, P_2 vincolati a mantenere invariata la loro distanza. Il punto P_1 può scivolare su una retta r passante per O , che ruota nel piano Oxy con velocità angolare costante ω . Il punto P_2 può muoversi su un piano verticale passante per la retta r . Scrivere la rappresentazione implicita dell'insieme delle configurazioni e mostrare che a ogni istante t questo è una varietà di dimensione 2, che indichiamo con \mathcal{C}_t . Usando come parametri l'ascissa s di P_1 lungo r e l'angolo θ che $P_2 - P_1$ forma con la direzione verticale scrivere la parametrizzazione $\chi(s, \theta, t)$, in questo caso globale, di \mathcal{C}_t . Scrivere anche l'espressione di tutte le velocità possibili dei punti P_1, P_2 .



Soluzione. Dette $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ le coordinate dei due punti, per ogni tempo t l'insieme delle configurazioni è l'insieme degli zeri della mappa

$$\Psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) = \begin{pmatrix} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - \ell^2 \\ z_1 \\ -x_1 \sin \omega t + y_1 \cos \omega t \\ -(x_2 - x_1) \sin \omega t + (y_2 - y_1) \cos \omega t \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobiana

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_2) & 2(y_1 - y_2) & 2(z_1 - z_2) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 2(z_2 - z_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \omega t & -\cos \omega t & 0 & -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 4 per ogni $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ in \mathcal{C}_t (verificarlo!).

Sia $\mathbf{q} = (s, \theta)$. Una parametrizzazione delle configurazioni dei due punti è data da

$$\chi(\mathbf{q}, t) = \begin{pmatrix} \chi_1(\mathbf{q}, t) \\ \chi_2(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix}, \quad \chi_1 = \begin{pmatrix} s \cos \omega t \\ s \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} (s + l \sin \theta) \cos \omega t \\ (s + l \sin \theta) \sin \omega t \\ -l \cos \theta \end{pmatrix}$$

La parametrizzazione delle velocità dei punti è data da

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ \mathbf{v}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \chi_1}{\partial t}(\mathbf{q}, t) \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \chi_2}{\partial t}(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_1}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \cos \omega t & 0 \\ \sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{s} \cos \omega t \\ \dot{s} \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \cos \omega t & l \cos \theta \cos \omega t \\ \sin \omega t & l \cos \theta \sin \omega t \\ 0 & l \sin \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{s} \cos \omega t + l \dot{\theta} \cos \theta \cos \omega t \\ \dot{s} \sin \omega t + l \dot{\theta} \cos \theta \sin \omega t \\ l \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial t}(\mathbf{q}, t) &= \begin{pmatrix} -s \omega \sin \omega t \\ s \omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \chi_2}{\partial t}(\mathbf{q}, t) = \begin{pmatrix} -(s + l \sin \theta) \omega \sin \omega t \\ (s + l \sin \theta) \omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definizione 22. Diciamo che il vincolo è **olonomo**² se ad ogni istante t l'insieme delle configurazioni del sistema corrisponde³ ad una varietà differenziabile \mathcal{C}_t e l'insieme delle velocità virtuali, quando il sistema si trova in una qualunque configurazione $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_t$, è costituito da tutti i vettori dello spazio tangente $T_{\mathbf{x}}\mathcal{C}_t$.

²Questo termine è stato introdotto da Heinrich Rudolf Hertz e deriva dal greco ὅλος (= tutto, intero) e νόμος (= legge), e si riferisce alla possibilità di scrivere una legge che coinvolga solo posizioni e tempo per l'equazione dei vincoli.

³la corrispondenza deve essere data da un **diffeomorfismo**, cioè da una mappa bigettiva, differenziabile, con inversa differenziabile.

Abbiamo sicuramente un vincolo olonomo se gli insiemi \mathcal{C}_t delle configurazioni al variare di t sono della forma (7.15) e vale (7.16). Infatti, se si impone una relazione che lega tra loro soltanto le posizioni e il tempo, questa implica sempre una relazione della forma (7.1), cioè

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + B(\mathbf{x}, t)\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

con

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad B(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}, \quad (7.19)$$

che lega tra loro posizioni, velocità e tempo. Questo si vede prendendo una generica curva $\mathbf{x}(t)$ tale che $\Psi(\mathbf{x}(t), t) = 0$ e derivando rispetto al tempo l'ultima relazione.

Ad ogni istante t le velocità virtuali sono della forma (7.18), dove $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ è una parametrizzazione locale di \mathcal{C}_t .

Viceversa, possiamo avere un vincolo olonomo anche quando le equazioni del vincolo sono della forma (7.1), purché queste relazioni siano conseguenza di una relazione che lega le sole posizioni e il tempo, cioè esista $\Psi(\mathbf{x}, t)$ che soddisfa (7.19). In questo caso si dice che il vincolo è **integrabile**. Come esempio di vincolo integrabile consideriamo il seguente.

Esempio 13. *Disco verticale di raggio R che rotola senza strisciare su una guida rettilinea orizzontale.* Assumiamo inizialmente che il disco possa anche strisciare mantenendosi sempre a contatto con la guida rettilinea. Per definire la configurazione del disco in questo caso possiamo usare l'ascissa s del suo baricentro lungo la guida e l'angolo θ che un raggio del disco forma con una direzione fissa, per esempio quella verticale. Imponiamo adesso la condizione di puro rotolamento: questa si scrive

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0. \quad (7.20)$$

Integrando l'equazione (7.20) tra un tempo iniziale t_0 e un tempo generico t si ottiene

$$(s - s_0) + R(\theta - \theta_0) = 0,$$

in cui s_0, θ_0 sono i valori iniziali di s, θ . Si ottiene quindi un'equazione del vincolo della forma

$$\Psi(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = 0, \quad \mathbf{x} = (s, \theta),$$

che dipende dalla configurazione iniziale di riferimento $\mathbf{x}_0 = (s_0, \theta_0)$.

Vincoli anolonomi

Se l'equazione del vincolo è della forma (7.1), ma non esiste una funzione Ψ che soddisfa le equazioni (7.19), allora il vincolo si dice anolonomo. I sistemi anolonomi che si considerano di solito hanno tutti un insieme delle configurazioni che è una varietà, però non tutti i vettori tangenti a questa varietà sono accessibili.

Esercizio 23. *Mostrare che il sistema meccanico formato da un disco che si mantiene verticale e che può rotolare senza strisciare su un piano orizzontale senza mai staccarsi da esso è soggetto ad un vincolo anolonomo.*

Suggerimento: Mostrare che se il disco può anche strisciare sul piano abbiamo un vincolo olonomo con varietà delle configurazioni

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$$

dove $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ è il toro bidimensionale. Mostrare inoltre che in caso di puro rotolamento l'insieme delle configurazioni ammissibili non cambia.

Esercizio 24. *Fissato un riferimento $Oxyz$, consideriamo il sistema meccanico formato da due punti P_1, P_2 vincolati a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R mantenendo tra loro una distanza costante ℓ , con $0 < \ell < 2R$. Mostrare che il vincolo è olonomo con varietà delle configurazioni di dimensione 3.*

Soluzione. Sia $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ il vettore delle coordinate dei punti P_1, P_2 . Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\},$$

dove la mappa $\Psi : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ha componenti

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - \ell^2, \\ & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2, \\ & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2. \end{aligned}$$

La matrice jacobiana della mappa è

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_2) & 2(y_1 - y_2) & 2(z_1 - z_2) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 2(z_2 - z_1) \\ 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 \end{bmatrix}.$$

Vogliamo mostrare che questa matrice ha rango 3 su \mathcal{C} , per cui \mathcal{C} è una sottovarietà di \mathbb{R}^6 di dimensione 3. In modo equivalente, possiamo mostrare che ha rango 3 su \mathcal{C} la matrice

$$\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che i vettori $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ e $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$ sono linearmente indipendenti, perché $0 < \ell < 2R$. Se le righe di $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}$ fossero dipendenti per qualche $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{C}$ allora varrebbe una combinazione lineare del tipo

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ non tutti nulli. Ma dalla relazione precedente si ottiene

$$\lambda_1 \mathbf{x}_2 + \lambda_2 \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \quad \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_3 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}. \quad (7.21)$$

Da $\ell < 2R$ segue che $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, per cui, dalla prima equazione in (7.21), si ottiene $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Inoltre, sostituendo $\lambda_1 = 0$ nella seconda delle (7.21), si ha anche $\lambda_3 = 0$.

7.4 Spostamenti virtuali

Consideriamo un sistema di N punti materiali P_1, \dots, P_N soggetti a vincoli olonomi. Sia $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$ una parametrizzazione locale della varietà delle configurazioni al tempo t .

Definizione 23. *Uno spostamento virtuale*

$$\delta \boldsymbol{\chi} = (\delta \chi_1, \dots, \delta \chi_N)^T, \quad (7.22)$$

dove

$$\delta \chi_j = \delta \chi_j(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial \chi_j}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t) \delta \mathbf{q} \quad (7.23)$$

è una variazione infinitesima delle coordinate dei punti P_j , che li sposta da una configurazione ammissibile qualunque ad un'altra infinitamente vicina e relativa allo stesso istante, cioè ottenuta ignorando la dipendenza dal tempo in $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}, t)$, come se il vincolo fosse fisso.

Osservazione 31. Gli spostamenti virtuali sono movimenti sugli spazi tangenti alla varietà delle configurazioni. Se i vincoli sono fissi gli spostamenti virtuali corrispondono ai differenziali

$$d\boldsymbol{\chi} = (d\chi_1, \dots, d\chi_N), \quad \text{con } d\chi_j = \frac{\partial \chi_j}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

In generale ci si riferisce alle formule (7.22), (7.23) parlando di **differenziali virtuali**. Nel caso di vincoli fissi con il simbolo $\delta \mathbf{q}$ si intende sempre il differenziale $d\mathbf{q}$ delle variabili indipendenti \mathbf{q} .

Mostriamo alcune formule per gli spostamenti virtuali nei casi di vincoli incontrati in precedenza.

1) corpo rigido: in assenza di altri vincoli, oltre alle forze interne che assicurano la rigidità del corpo, gli spostamenti virtuali dei punti P_j quando essi si trovano in una configurazione $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ sono dati da

$$\delta \boldsymbol{\chi}_j = d\mathbf{x}_{O'} + \boldsymbol{\omega} dt \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{O'}), \quad (7.24)$$

dove $\mathbf{x}_{O'} \in \mathbb{R}^3$ sono le coordinate di un punto O' solidale al corpo. In questa formula le variabili indipendenti sono lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{x}_{O'}$ e la rotazione infinitesima $\boldsymbol{\omega}dt$.

La (7.24) segue direttamente dalla formula fondamentale della cinematica rigida

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{O'})$$

e dal fatto che il vincolo di rigidità è fisso.

Nella (7.24) possiamo anche scrivere $\boldsymbol{\chi}_j$ al posto di \mathbf{x}_j , per sottolineare il fatto che le posizioni dei punti P_j non sono indipendenti, ma dipendono tutte dalle coordinate $\mathbf{x}_{O'}$ e dal vettore degli angoli di Eulero $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \theta, \psi)$ tramite le relazioni

$$\boldsymbol{\chi}_j = \mathbf{x}_{O'} + R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}'_j,$$

vedi la prima relazione in (6.25).

In presenza di altri vincoli oltre a quelli di rigidità, assumendo che gli angoli di Eulero φ, θ, ψ non dipendano dal tempo a causa degli altri vincoli, gli spostamenti virtuali dei P_j si scrivono tramite una formula simile alla (7.24), cioè:

$$\delta\boldsymbol{\chi}_j = \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \boldsymbol{\omega}dt \times (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}), \quad (7.25)$$

dove, detta $\mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}_{O'}(\mathbf{q}, t)$ la mappa che fornisce le coordinate di O' al tempo t in funzione delle coordinate locali \mathbf{q} , si intende che

$$\delta\boldsymbol{\chi}_{O'} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)\delta\mathbf{q}.$$

Infatti il vettore $(\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\alpha})$, che caratterizza le posizioni dei punti del corpo, si può scrivere come funzione di coordinate locali $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d, 1 \leq d \leq 6$, ed eventualmente del tempo:

$$\mathbf{x}_{O'} = \boldsymbol{\chi}_{O'}(\mathbf{q}, t), \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}).$$

Usando la prima relazione in (6.25), il vettore delle coordinate di ogni punto P_j del corpo si scrive

$$\boldsymbol{\chi}_j = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_j, t) = \boldsymbol{\chi}_{O'}(\mathbf{q}, t) + R(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}))\mathbf{x}'_j.$$

Per lo spostamento virtuale di P_j si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\chi}_j &= \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial R}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial R}{\partial \psi}\delta\psi \right) R^T R \mathbf{x}'_j \\ &= \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\dot{\varphi}dt + \frac{\partial R}{\partial \theta}\dot{\theta}dt + \frac{\partial R}{\partial \psi}\dot{\psi}dt \right) R^T (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}) \\ &= \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \dot{R}R^T dt (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}) = \delta\boldsymbol{\chi}_{O'} + \boldsymbol{\omega}dt \times (\boldsymbol{\chi}_j - \boldsymbol{\chi}_{O'}), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato le relazioni

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{q}}d\mathbf{q} = \dot{\varphi}dt, \quad \delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{q}}d\mathbf{q} = \dot{\theta}dt, \quad \delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{q}}d\mathbf{q} = \dot{\psi}dt$$

ed il fatto che la matrice antisimmetrica $\mathbf{\Omega} = \dot{R}R^T$ corrisponde alla velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del corpo rigido attraverso la formula

$$\mathbf{\Omega}\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

2) puro rotolamento: se P_1, P_2 sono i punti in cui due corpi rigidi si toccano senza strisciare ($P_1 = P_2$) e $\boldsymbol{\chi}_1, \boldsymbol{\chi}_2$ sono le loro coordinate si ha

$$\delta\boldsymbol{\chi}_1 = \delta\boldsymbol{\chi}_2.$$

3) coppie cinematiche: le superfici σ_1, σ_2 , che delimitano i corpi della coppia cinematica, strisciano l'una sull'altra: un punto $P_1 \in \sigma_1$ può staccarsi da un punto $P_2 \in \sigma_2$, con cui è a contatto, solo muovendosi in una direzione del piano Π tangente in P_1 a σ_1 (e σ_2). Dette $\boldsymbol{\chi}_1, \boldsymbol{\chi}_2$ le coordinate di P_1, P_2 si ha

$$\delta\boldsymbol{\chi}_1 = \delta\boldsymbol{\chi}_2 + \delta\boldsymbol{\pi},$$

dove $\delta\boldsymbol{\pi}$ è uno spostamento infinitesimo sul piano Π .