

# Capitolo 6

## Il corpo rigido

Descriviamo l'insieme delle configurazioni e le proprietà cinematiche dei corpi rigidi, nel caso discreto e continuo.

### 6.1 Definizioni e preliminari geometrici

**Definizione 11.** *Un corpo rigido discreto è un sistema formato da  $N$  punti materiali che mantengono invariate nel tempo le loro distanze mutue.*

**Definizione 12.** *Un corpo rigido continuo è un sistema formato da una distribuzione continua di punti che mantengono invariate nel tempo le loro distanze mutue.*

Nel seguito svilupperemo la teoria per un corpo rigido discreto e nella Sezione 6.6 discuteremo il caso di un corpo rigido continuo.

Sia  $\mathfrak{C}$  un corpo rigido discreto formato da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$ . Fissato un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ , le posizioni dei punti  $P_j$  sono individuate dai vettori  $P_j - O$ , con coordinate  $\mathbf{x}_j$  nella base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ . Le distanze mutue  $\rho_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$  tra punti diversi  $P_i, P_j$  di  $\mathfrak{C}$  soddisfano le relazioni

$$\rho_{ij} = c_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j. \quad (6.1)$$

per certe costanti  $c_{ij} > 0$ .

Con la definizione di corpo rigido discreto incontriamo un primo caso in cui i punti del sistema non si possono muovere liberamente, infatti le loro coordinate sono soggette alle relazioni (6.1). Questo è un caso di **moto vincolato**, per descrivere il quale introduciamo adesso alcuni concetti. I moti vincolati saranno poi trattati in dettaglio nel Capitolo 7.

### 6.1.1 Sottovarietà di $\mathbb{R}^m$

**Definizione 13.** Sia  $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  una mappa differenziabile, con  $1 \leq k < m$ . Diciamo che l'insieme

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \quad (6.2)$$

è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^m$  (o semplicemente una varietà) di dimensione  $n = m - k$  se

$$\text{rank} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = k, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}.$$

**Esempio 4.** Il cerchio di raggio unitario centrato nell'origine

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi(x, y) = 0\},$$

dove

$$\Psi(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$  di dimensione uno, infatti

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (x, y)}(x, y) = 2(x, y) \neq (0, 0), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{C}.$$

**Esempio 5.** L'insieme  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi(x, y) = 0\}$ , con

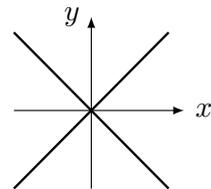
$$\Psi(x, y) = x^2 - y^2,$$

è l'unione di due rette ortogonali passanti per l'origine e non è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$ . Infatti

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (x, y)}(x, y) = 2(x, -y),$$

che si annulla per  $(x, y) = (0, 0) \in \mathcal{C}$ .

Notiamo che in  $(x, y) = (0, 0)$  la retta tangente a  $\mathcal{C}$  non è definita. Comunque l'insieme  $\mathcal{C} \setminus \{(0, 0)\}$ , composto da quattro semirette disgiunte, è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$ .



### Rappresentazione parametrica e coordinate locali

In (6.2) abbiamo introdotto la sottovarietà  $\mathcal{C}$  tramite una sua rappresentazione implicita, nel senso che essa viene definita come luogo di zeri della mappa  $\Psi$ . È anche utile descrivere  $\mathcal{C}$  in un altro modo, tramite delle sue **parametrizzazioni**

**locali.** Per il teorema delle funzioni implicite, possiamo introdurre in un intorno<sup>1</sup> di ogni punto di  $\mathcal{C}$  delle coordinate locali

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$$

e una mappa della forma

$$\mathbb{R}^n \supseteq U \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}) \in \mathcal{C},$$

con

$$\text{rank} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) = n,$$

definita su un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^n$ . Una scelta delle coordinate locali si può fare nel modo seguente. A meno di riordinare le componenti  $x_1, \dots, x_m$  di  $\mathbf{x}$  possiamo assumere che in un intorno di  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  si abbia

$$\det \frac{\partial \Psi}{\partial (x_1, \dots, x_k)} \neq 0$$

e quindi, per il teorema delle funzioni implicite, possiamo scrivere  $x_1, \dots, x_k$  in funzione delle  $n$  variabili  $x_{k+1}, \dots, x_m$ , che dunque si possono usare come coordinate locali.

**Esempio 6.** Si consideri la sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$  dell'Esempio 4, definita da

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Psi(x, y) = 0\}, \quad \Psi(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Il punto  $(x_1, y_1) = (0, 1)$  appartiene a  $S^1$ . Poiché

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0,$$

per il teorema delle funzioni implicite esistono  $a > 0$  ed un'unica funzione  $y = f(x)$  tale che  $f(0) = 1$  e

$$\Psi(x, f(x)) = 0$$

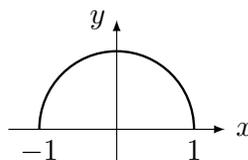
per ogni  $x \in (-a, a)$ . In questo caso si può anche scrivere esplicitamente l'espressione della funzione  $f$ :

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

La mappa

$$(-1, 1) \ni x \mapsto (x, f(x))$$

è una parametrizzazione locale di  $S^1$  in un intorno di  $(x_1, y_1) = (0, 1)$ .



<sup>1</sup>Un intorno di un punto  $\mathbf{x}_0$  di una sottovarietà  $\mathcal{C}$  di  $\mathbb{R}^m$  è dato dall'intersezione  $V \cap \mathcal{C}$  di questa varietà con un intorno  $V$  di  $\mathbf{x}_0$  in  $\mathbb{R}^m$ .

Osserviamo che anche il punto  $(x_2, y_2) = (1, 0)$  appartiene a  $\mathcal{C}$ , però

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(1, 0) = 0,$$

quindi non possiamo usare il teorema delle funzioni implicite per descrivere  $S^1$  in un intorno di  $(x_2, y_2)$  con una funzione della variabile  $x$ . Poiché

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(1, 0) = 2 \neq 0,$$

possiamo trovare  $a > 0$  ed una funzione  $x = g(y)$  tale che  $g(0) = 1$  e

$$\Psi(g(y), y) = 0$$

per ogni  $y \in (-a, a)$ .

Anche in questo caso possiamo scrivere  $g$  esplicitamente come

$$g(y) = \sqrt{1 - y^2}, \quad y \in (-1, 1)$$

e possiamo scrivere la parametrizzazione locale come

$$(-1, 1) \ni y \mapsto (g(y), y).$$

L'insieme  $S^1$  ammette anche le seguenti parametrizzazioni locali, che usano la coordinata angolare  $\theta$ :

$$(a - \pi, a + \pi) \ni \theta \mapsto \chi(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta),$$

dove  $a \in [0, 2\pi)$ . Scegliendo opportunamente il valore di  $a$  possiamo rappresentare un intorno di ogni punto di  $S^1$ .

**Esempio 7.** Si consideri la sfera bidimensionale in  $\mathbb{R}^3$ , definita da

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \Psi(x, y, z) = 0\},$$

dove

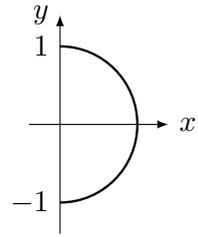
$$\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Poiché

$$\frac{\partial \Psi}{\partial(x, y, z)}(x, y, z) = 2(x, y, z) \neq \mathbf{0}, \quad \forall (x, y, z) \in S^2,$$

l'insieme  $S^2$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2. Possiamo rappresentare  $S^2$  tramite due parametrizzazioni locali della forma

$$\mathbf{q} \mapsto \chi(\mathbf{q}) = (x(\mathbf{q}), y(\mathbf{q}), z(\mathbf{q}))^T,$$



dove  $\mathbf{q} = (\alpha, \delta)$  sono coordinate sferiche. Una delle due mappe è data da

$$x = \cos \delta \cos \alpha, \quad y = \cos \delta \sin \alpha, \quad z = \sin \delta,$$

con  $\alpha \in (-\pi, \pi)$ ,  $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$  e ricopre  $S^2$  meno un arco  $\gamma_1$ , che corrisponde a un meridiano. L'altra mappa è data da

$$x = -\cos \alpha \cos \delta, \quad y = \sin \alpha, \quad z = \cos \alpha \sin \delta,$$

con  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $\delta \in (-\pi, \pi)$  e ricopre  $S^2$  meno un arco  $\gamma_2$ , che corrisponde a metà dell'equatore. Osserviamo che  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ .

## 6.2 Proprietà cinematiche di un corpo rigido

### 6.2.1 Configurazioni di un corpo rigido con tutti i punti allineati

Consideriamo prima il caso in cui tutti i punti del corpo rigido  $\mathcal{C}$  siano allineati.

**Proposizione 35.** *Se tutti i punti di  $\mathcal{C}$  sono allineati, il suo insieme delle configurazioni è in corrispondenza biunivoca con l'insieme*

$$\mathbb{R}^3 \times S^2,$$

dove  $S^2$  è la sfera unitaria bidimensionale in  $\mathbb{R}^3$ .

*Dimostrazione.* Dati i valori delle costanti  $c_{ij}$  in (6.1), per conoscere le posizioni di tutti i punti del corpo basta conoscere le posizioni di due di essi, ad esempio  $P_1, P_2$ . Le coordinate di ogni altro punto  $P_j$  di  $\mathcal{C}$  sono determinate univocamente dalle costanti  $c_{1j}, c_{2j}$ . Per conoscere la posizione di  $P_1$  possiamo specificare le sue coordinate cartesiane in  $\mathbb{R}^3$  e, visto che la distanza tra  $P_1$  e  $P_2$  è la costante  $c_{12} \neq 0$ , per conoscere la posizione di  $P_2$  ci basta conoscere il versore  $\frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|}$ , che individua un punto della sfera  $S^2$ . □

Poiché  $\mathbb{R}^3 \times S^2$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  di dimensione 5, concludiamo che ci servono 5 parametri per rappresentare l'insieme delle configurazioni di un corpo rigido discreto i cui punti siano tutti allineati.

Il fatto che  $\mathcal{C}$  corrisponda ad una sottovarietà di  $\mathbb{R}^6$  di dimensione 5 si può anche dimostrare nel modo seguente. Le coordinate  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  di tutte le possibili configurazioni dei punti  $P_1, P_2$ , sono caratterizzate dalla relazione  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ , con

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2 - c_{12}^2.$$

Poniamo  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ . Il vettore

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 2((x_1 - x_2), (y_1 - y_2), (z_1 - z_2), (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1))$$

è non nullo nei punti  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  tali che  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ . Ne segue che l'insieme

$$\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^6 : \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0\}$$

è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^6$  di dimensione 5.

### 6.2.2 Configurazioni di un corpo rigido con tre punti non allineati

**Definizione 14.** Diciamo che un sistema di riferimento  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$  è **solidale** al corpo rigido  $\mathfrak{C}$  se i punti  $P_j$  del corpo hanno tutti velocità nulla rispetto a  $\Sigma'$ , cioè se le coordinate di tutti i punti  $P_j$  sono costanti in  $\Sigma'$ .

Consideriamo adesso il caso in cui esistano tre punti del corpo non allineati. Almeno di rinumerare i punti possiamo assumere che questi siano  $P_1, P_2, P_3$ .

Possiamo costruire esplicitamente un sistema di riferimento solidale facendo uso di questi tre punti. Ad esempio, poniamo  $O' = P_1$ ,  $\hat{e}'_1 = (P_2 - P_1)/\rho_{12}$ ,  $\hat{e}'_2 \in \pi(P_1, P_2, P_3)$ , che è il piano generato dai tre punti, con  $\hat{e}'_2 \in \hat{e}'_1^\perp$  e  $(P_3 - P_1) \cdot \hat{e}'_2 > 0$ . Infine  $\hat{e}'_3 = \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2$ .

Osserviamo che le coordinate di ogni altro punto  $P_j$  del corpo sono costanti<sup>2</sup> nel riferimento  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ . Quindi ci basta conoscere la posizione di  $P_1, P_2, P_3$  per determinare quella degli altri punti del corpo.

Diamo la seguente caratterizzazione dell'insieme delle configurazioni del corpo rigido.

**Proposizione 36.** Se  $\mathfrak{C}$  ha tre punti non allineati, il suo insieme delle configurazioni è in corrispondenza biunivoca con

$$\mathbb{R}^3 \times SO(3).$$

*Dimostrazione.* Sia  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$  un riferimento solidale a  $\mathfrak{C}$ . Dato che le coordinate  $\mathbf{x}'_j$  dei punti  $P_j$  del corpo sono costanti in  $\Sigma'$ , assumendo che queste siano note

---

<sup>2</sup>Osserviamo che le coordinate di ogni altro punto  $P_j$  ( $j \geq 4$ ) del corpo non sono univocamente determinate dalle costanti  $c_{1j}, c_{2j}, c_{3j}$  in quanto l'intersezione non vuota delle 3 sfere di centro  $P_i$  e raggio  $c_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3$  dà luogo genericamente a due punti. Comunque, la continuità del moto dei  $P_j$  implica che le loro coordinate  $\mathbf{x}'_j$  in  $\Sigma'$  siano costanti nel tempo.

a priori, per determinare le coordinate dei punti del corpo in  $\Sigma$  ci basta determinare la posizione del sistema di riferimento  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ . Questa è determinata una volta note le coordinate dell'origine  $O'$  ed i coseni direttori

$$R_{kh} = \hat{e}'_h \cdot \hat{e}_k$$

della terna  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  rispetto a  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ . La matrice  $R = (R_{kh})$ , che ci fornisce l'orientazione di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ , è ortogonale, e  $\det R = 1$  perché le due terne sono entrambe levogire, per cui  $R \in SO(3)$ . Notiamo che i vettori

$$\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_j, \quad j = 1 \dots N,$$

dove  $\mathbf{x}_{O'}$  è il vettore delle coordinate di  $O'$  in  $\Sigma$ , descrivono tutte le possibili coordinate dei punti del corpo  $\mathcal{C}$  in  $\Sigma$ , in quanto le coppie  $(\mathbf{x}_{O'}, R)$  descrivono tutte le possibili posizioni del riferimento solidale  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ .

Mostriamo adesso che la corrispondenza tra le possibili coordinate dei punti del corpo in  $\Sigma$  e l'insieme  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$  è biunivoca. Assumiamo che  $P_1, P_2, P_3$  siano tre punti di  $\mathcal{C}$  non allineati e definiamo una mappa

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^9$$

tramite la relazione

$$\Phi(\mathbf{x}_{O'}, R) = (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_3), \quad (6.3)$$

Osserviamo che  $\Phi$  è iniettiva, infatti se

$$\mathbf{x}_{O'}^{(1)} + R_1\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_{O'}^{(2)} + R_2\mathbf{x}'_j, \quad j = 1, 2, 3$$

allora

$$R_1(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1) = R_2(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1), \quad R_1(\mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1) = R_2(\mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1)$$

con  $\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1$  vettori linearmente indipendenti. Ne segue che  $(R_2)^{-1}R_1$ , che è un elemento di  $SO(3)$ , ha due autovettori indipendenti relativi all'autovalore 1, dunque  $R_1 = R_2$  e di conseguenza  $\mathbf{x}_{O'}^{(1)} = \mathbf{x}_{O'}^{(2)}$ . □

L'insieme delle configurazioni di un corpo rigido con tre punti non allineati corrisponde ad una sottovarietà di  $\mathbb{R}^{12}$  di dimensione 6, infatti vale il seguente risultato.

**Proposizione 37.** *L'insieme  $O(3)$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^9$  di dimensione 3.*

*Dimostrazione.* Considero la mappa  $\Psi : \mathbb{R}^9 \mapsto \mathbb{R}^6$  le cui componenti  $\Psi_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq 3$  sono definite da

$$\Psi_{ij}(\mathbf{a}) = \sum_{h=1}^3 a_{ih}a_{jh} - \delta_{ij},$$

dove  $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33})$ . Se  $\mathbf{a}$  soddisfa  $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ , allora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

è ortogonale, cioè  $A \in O(3)$ . Abbiamo

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix}.$$

Dette  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_6 \in \mathbb{R}^9$  le righe di  $\partial \Psi / \partial \mathbf{a}$ , la relazione

$$\sum_{j=1}^6 \lambda_j \mathbf{r}_j = \mathbf{0}, \quad (6.4)$$

con  $\lambda_1, \dots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$ , può valere solo se i  $\lambda_j$  sono tutti nulli. Infatti, dalle prime tre equazioni scalari in (6.4) otteniamo

$$2\lambda_1 \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}_2 + \lambda_3 \mathbf{A}_3 = \mathbf{0},$$

dove  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  sono le righe della matrice  $A$ , che sono linearmente indipendenti perché  $\det A = \pm 1$ , quindi  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Analogamente, dalle tre equazioni scalari intermedie otteniamo che anche  $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$  e dalle ultime tre equazioni scalari si ha che anche  $\lambda_6 = 0$ . □

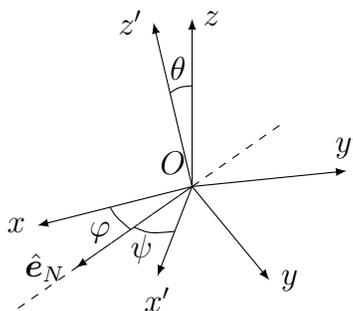
**Osservazione 20.**  $SO(3)$  è una componente connessa di  $O(3)$ , definita dalle matrici di  $O(3)$  con determinante 1. Ne segue che anche  $SO(3)$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^9$  di dimensione 3.

### 6.2.3 Gli angoli di Eulero

Introduciamo delle coordinate locali sulla varietà  $SO(3)$  delle rotazioni in  $\mathbb{R}^3$ . Abbiamo visto che  $SO(3)$  corrisponde all'insieme delle configurazioni di un corpo rigido con un punto fisso, che abbia tre punti non allineati.

Sia  $\Sigma = Oxyz$  un riferimento fissato, con  $O$  il punto fisso del corpo ed  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  i versori degli assi di  $\Sigma$ . Sia inoltre  $\Sigma' = Ox'y'z'$  un riferimento solidale al corpo rigido, ed  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  i versori degli assi di  $\Sigma'$ . A meno di ruotare  $\Sigma$  si può assumere che il piano  $O\hat{e}_1\hat{e}_2$  non sia parallelo a  $O\hat{e}'_1\hat{e}'_2$ . Dall'intersezione dei due piani risulta definita una retta

$$r_N = \{\lambda \hat{e}_N, \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \hat{e}_N = \frac{\hat{e}_3 \times \hat{e}'_3}{|\hat{e}_3 \times \hat{e}'_3|}$$



detta **linea dei nodi**.

Introduciamo le seguenti quantità:

l'angolo  $\varphi$  tra  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_N$  (angolo di precessione);

l'angolo  $\theta$  tra  $\hat{e}_3$  e  $\hat{e}'_3$  (angolo di nutazione);

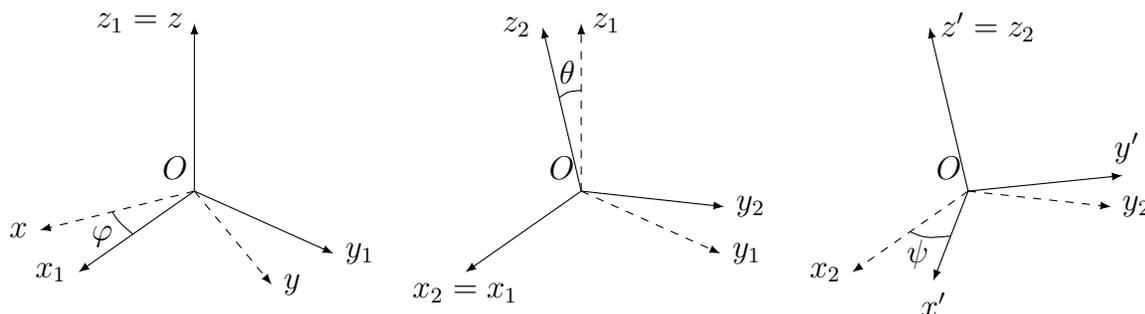
l'angolo  $\psi$  tra  $\hat{e}_N$  e  $\hat{e}'_1$  (angolo di rotazione propria).

Vale la relazione

$$\hat{e}_N = \cos \psi \hat{e}'_1 - \sin \psi \hat{e}'_2. \quad (6.5)$$

Le quantità  $\varphi, \psi, \theta$  si chiamano **angoli di Eulero**.

La matrice di rotazione  $R \in SO(3)$  che porta il riferimento  $\Sigma = Oxyz$  a coincidere con  $\Sigma' = Ox'y'z'$  si può scrivere come prodotto di tre rotazioni passando da sistemi di riferimento intermedi  $\Sigma_1 = Ox_1y_1z_1, \Sigma_2 = Ox_2y_2z_2$  (vedi figura).



Prima si fa una rotazione di  $\varphi$  attorno a  $Oz$ , in modo che l'asse  $Ox_1$  abbia la stessa orientazione di  $\hat{e}_N$ . Poi si esegue una rotazione di  $\theta$  attorno a  $Ox_1$  portando  $Oz$  in  $Oz_2 = Oz'$ . Infine si fa una rotazione di  $\psi$  attorno a  $Oz'$  per arrivare al riferimento  $\Sigma'$ .

Dette  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  ed  $\mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$  le coordinate di un vettore  $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}^3$  nelle basi  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$  e  $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$  rispettivamente, vale la relazione

$$\mathbf{u} = R\mathbf{u}', \quad R = R_\varphi^{(3)} R_\theta^{(1)} R_\psi^{(3)}, \quad (6.6)$$

in cui  $R_\alpha^{(i)}$  è la matrice di rotazione di un angolo  $\alpha$  attorno all' $i$ -mo asse coordinato:

$$R_\alpha^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad R_\alpha^{(3)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Proposizione 38.** Consideriamo un corpo rigido con tre punti  $P_1, P_2, P_3$  non allineati. La mappa

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^9$$

definita da

$$\Phi(\mathbf{x}_{O'}, R) = (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_3),$$

dove  $\mathbf{x}'_j$  sono le coordinate dei punti  $P_j$  nel riferimento solidale, è un diffeomorfismo sull'immagine  $\Phi(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$ .

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 36 sappiamo già che la mappa  $\Phi$  è iniettiva. Sia  $\boldsymbol{\alpha} = (\psi, \theta, \varphi)$  il vettore degli angoli di Eulero, definito sull'aperto  $U \subset \mathbb{R}^3$ , che parametrizza localmente la varietà  $SO(3)$ . Considero la mappa

$$\chi : \mathbb{R}^3 \times U \rightarrow \Phi(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$$

definita da

$$\chi(\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{x}_{O'} + R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_{O'} + R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}'_2, \mathbf{x}_{O'} + R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x}'_3).$$

La sua matrice jacobiana è

$$\frac{\partial \chi}{\partial (\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\alpha})} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \frac{\partial R}{\partial \psi} \mathbf{x}'_1 & \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{x}'_1 & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \frac{\partial R}{\partial \psi} \mathbf{x}'_2 & \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{x}'_2 & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \mathbf{x}'_2 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \frac{\partial R}{\partial \psi} \mathbf{x}'_3 & \frac{\partial R}{\partial \theta} \mathbf{x}'_3 & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \mathbf{x}'_3 \end{bmatrix}.$$

Mostriamo che le colonne  $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_6$  di questa matrice sono linearmente indipendenti. Assumiamo che valga la relazione

$$\lambda_1 \mathbf{C}_1 + \dots + \lambda_6 \mathbf{C}_6 = \mathbf{0}, \quad (6.7)$$

per dei coefficienti reali  $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ . Facendo la differenza tra la quarta e la prima equazione in (6.7), tra la quinta e la seconda, e tra la sesta e la terza, si ottiene l'equazione

$$A(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1) = \mathbf{0}, \quad (6.8)$$

in cui

$$A = \lambda_4 \frac{\partial R}{\partial \psi} + \lambda_5 \frac{\partial R}{\partial \theta} + \lambda_6 \frac{\partial R}{\partial \varphi}.$$

Usando le relazioni

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}'_j$$

la (6.8) si può scrivere

$$AR^T(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \mathbf{0},$$

dove  $AR^T$  è una matrice antisimmetrica.<sup>3</sup> In modo simile, facendo la differenza tra la settima e la prima equazione, tra l'ottava e la seconda, e tra la nona e la terza, si ottiene

$$A(\mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1) = AR^T(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) = \mathbf{0}.$$

Poiché  $P_1, P_2, P_3$  non sono allineati, i vettori  $\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1$  e  $\mathbf{x}'_3 - \mathbf{x}'_1$  sono linearmente indipendenti, quindi la matrice antisimmetrica  $AR^T$  deve essere necessariamente nulla, e dunque deve essere nulla anche la matrice  $A$ . Abbiamo adesso bisogno del seguente risultato.

**Lemma 2.** *Sia*

$$R = R_\varphi^{(3)} R_\theta^{(1)} R_\psi^{(3)}$$

*definita come in (6.6). Allora la relazione*

$$\lambda_\psi \frac{\partial R}{\partial \psi} + \lambda_\theta \frac{\partial R}{\partial \theta} + \lambda_\varphi \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \mathbf{0},$$

*con coefficienti reali  $\lambda_\psi, \lambda_\theta, \lambda_\varphi$ , implica che*

$$\lambda_\psi = \lambda_\theta = \lambda_\varphi = 0.$$

*Dimostrazione.* Omettendo la scritta (1) e (3) nelle matrici  $R_\psi^{(3)}, R_\theta^{(1)}, R_\varphi^{(3)}$ , indicando con un apice la derivata rispetto all'unica variabile da cui tali matrici dipendono, e osservando che

$$R_\psi^T R'_\psi = R_\varphi^T R'_\varphi = J^{(3)} := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

$$R_\theta^T R'_\theta = J^{(1)} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

---

<sup>3</sup>infatti le matrici  $\frac{\partial R}{\partial \psi}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial \varphi}$  sono antisimmetriche, come si vede derivando rispetto a  $\psi, \theta, \varphi$  la relazione  $RR^T = I$ .

si ottiene

$$\begin{aligned}
& \lambda_\psi \frac{\partial R}{\partial \psi} + \lambda_\theta \frac{\partial R}{\partial \theta} + \lambda_\varphi \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \lambda_\psi R_\varphi R_\theta R'_\psi + \lambda_\theta R_\varphi R'_\theta R_\psi + \lambda_\varphi R'_\varphi R_\theta R_\psi \\
& = \lambda_\psi R(R_\psi^T R'_\psi) + \lambda_\theta R R_\psi^T (R_\theta^T R'_\theta) R_\psi + \lambda_\varphi R R_\psi^T R_\theta^T (R'_\varphi R'_\varphi) R_\theta R_\psi \\
& = R \left( \lambda_\psi J^{(3)} + \lambda_\theta R_\psi^T J^{(1)} R_\psi + \lambda_\varphi R_\psi^T R_\theta^T J^{(3)} R_\theta R_\psi \right) = 0.
\end{aligned}$$

Svolgendo i conti l'equazione precedente si scrive

$$\begin{aligned}
\lambda_\psi \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_\theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 0 & -\cos \psi \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \end{bmatrix} \\
+ \lambda_\varphi \begin{bmatrix} 0 & -\cos \theta & \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\lambda_\psi + \lambda_\varphi \cos \theta = 0, \quad (6.11)$$

$$\lambda_\theta \sin \psi - \lambda_\varphi \sin \theta \cos \psi = 0, \quad (6.12)$$

$$\lambda_\theta \cos \psi + \lambda_\varphi \sin \theta \sin \psi = 0. \quad (6.13)$$

Dalle equazioni (6.12),(6.13) si ottiene

$$\lambda_\theta = 0, \quad \lambda_\varphi \sin \theta = 0.$$

Affinché gli angoli di Eulero siano definiti ci deve essere una linea dei nodi, quindi  $\sin \theta \neq 0$ , per cui  $\lambda_\varphi = 0$ . Sostituendo l'ultima relazione in (6.11) si ottiene  $\lambda_\psi = 0$ .  $\square$

Dal lemma precedente si conclude che

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$$

e, sostituendo nella relazione (6.7), ne segue che

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$\square$

### 6.2.4 I quaternioni di Hamilton

Nel 1843 William Rowan Hamilton introdusse l'insieme dei **quaternioni** per poter operare in modo più agevole con le rotazioni di  $\mathbb{R}^3$ . Questo modo di rappresentare le rotazioni è molto utile, ad esempio, nel campo della robotica.

Un quaternione è un'espressione della forma

$$\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \quad (6.14)$$

dove  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . I quaternioni si possono sommare e moltiplicare tra loro: la moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma e i simboli  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  soddisfano le relazioni

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ijk} = -1. \quad (6.15)$$

Dalle (6.15) si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= \mathbf{k}, & \mathbf{jk} &= \mathbf{i}, & \mathbf{ki} &= \mathbf{j}, \\ \mathbf{ik} &= -\mathbf{j}, & \mathbf{ji} &= -\mathbf{k}, & \mathbf{kj} &= -\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Dato un quaternione  $\mathbf{q}$  della forma (6.14) introduciamo il suo **coniugato**

$$\bar{\mathbf{q}} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

La norma di  $\mathbf{q}$  si definisce come

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

e vale la proprietà

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}}. \quad (6.16)$$

Dalla (6.16) segue che

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2}.$$

Se  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , allora il quaternione  $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  si dice **unitario**. Utilizzeremo il simbolo  $\mathbf{u}$  al posto di  $\mathbf{q}$  per denotare quaternioni unitari. Possiamo identificare l'insieme dei quaternioni unitari con la sfera unitaria tridimensionale  $S^3$ . Osserviamo che si ha

$$\mathbf{u}^{-1} = \bar{\mathbf{u}}.$$

Un quaternione della forma

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

si dice **puro**. Utilizzeremo il simbolo  $\mathbf{p}$  per denotare quaternioni puri. Possiamo identificare l'insieme dei quaternioni puri con  $\mathbb{R}^3$ .

Sia  $\mathbf{u}$  un quaternione unitario. Consideriamo la mappa

$$\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{p} \mapsto \mathbf{u}\mathbf{p}\bar{\mathbf{u}} =: R_{\mathbf{u}}\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3.$$

Si verifica facilmente che gli elementi dell'immagine di questa mappa sono quaternioni puri. Si può dimostrare che questa mappa codifica una rotazione di  $\mathbb{R}^3$ , vedi [12]. Se  $a = \pm 1$  allora  $R_{\mathbf{u}}$  è la rotazione identica. Altrimenti  $R_{\mathbf{u}}$  è la rotazione dell'angolo

$$\theta = 2 \arccos a = 2 \arcsin(\sqrt{b^2 + c^2 + d^2})$$

attorno all'asse orientato definito dal vettore  $(b, c, d)$ .

**Esercizio 15.** Mostrare che si ha

$$R_{\mathbf{u}}R_{\mathbf{v}} = R_{\mathbf{uv}},$$

dove  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  sono quaternioni unitari.

**Osservazione 21.** La mappa

$$S^3 \ni \mathbf{u} \mapsto R_{\mathbf{u}} \in SO(3)$$

è un omomorfismo di gruppi, con nucleo  $\mathbb{Z}_2$ , infatti quaternioni unitari opposti definiscono la stessa rotazione. Otteniamo quindi l'isomorfismo

$$S^3/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3).$$

**Esercizio 16.** Calcolare il vettore di  $\mathbb{R}^3$  che si ottiene ruotando  $(1, 2, 3)$  di un angolo  $\theta = \pi/3$  attorno all'asse passante per l'origine definito da  $(1, 0, 1)$ .

**Soluzione:** Considero

$$\mathbf{p} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

e calcolo il quaternione unitario  $\mathbf{u}$  corrispondente alla rotazione scelta. Dalle relazioni

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c = 0, \quad \frac{3}{4} + b^2 + d^2 = 1, \quad b = d$$

si ottiene

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathbf{k} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{6} + \mathbf{i} + \mathbf{k}),$$

per cui

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{u}}\mathbf{p} = \mathbf{u}\mathbf{p}\bar{\mathbf{u}} &= \frac{1}{8}(\sqrt{6} + \mathbf{i} + \mathbf{k})(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})(\sqrt{6} - \mathbf{i} - \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{8}\left(-4 + (\sqrt{6} - 2)\mathbf{i} + (2\sqrt{6} - 2)\mathbf{j} + (3\sqrt{6} + 2)\mathbf{k}\right)(\sqrt{6} - \mathbf{i} - \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{4}\left((6 - 2\sqrt{6})\mathbf{i} + (-2\sqrt{6} + 4)\mathbf{j} + (2\sqrt{6} + 10)\mathbf{k}\right). \end{aligned}$$

Si ottiene quindi il vettore

$$\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5 + \sqrt{6}}{2}\right).$$

### La mappa di Hopf

Interpretando l'insieme dei quaternioni puri come  $\mathbb{R}^3$  (per cui ad esempio  $\mathbf{i}$  corrisponde a  $(1, 0, 0)$ ) definiamo la **mappa di Hopf**

$$S^3 \ni \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}\mathbf{i}\bar{\mathbf{u}} \in S^2. \quad (6.17)$$

Se  $\mathbf{u} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  allora (6.17) si scrive

$$(a, b, c, d) \mapsto (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac)).$$

Le fibre di questa mappa sono circonferenze e questa mappa fornisce un esempio di fibrazione non banale.<sup>4</sup>

### 6.2.5 Formula fondamentale della cinematica rigida

**Definizione 15.** *Definiamo la velocità angolare  $\vec{\omega}$  di un corpo rigido  $\mathcal{C}$  come quella di minima norma tra le velocità angolari di tutti i sistemi di riferimento solidali rispetto ad un riferimento dato  $\Sigma$ .*

Verifichiamo che questa è una buona definizione. Si presentano due casi:

**Proposizione 39.** i) *Se  $\mathcal{C}$  ha 3 punti non allineati allora la sua velocità angolare è quella di un qualunque riferimento solidale a  $\mathcal{C}$ .* ii) *Se invece tutti i punti di  $\mathcal{C}$  sono allineati allora la sua velocità angolare è data dalla differenza tra quella di un qualunque riferimento solidale a  $\mathcal{C}$  e la sua componente in direzione dell'allineamento dei punti.*

*Dimostrazione.* Consideriamo due riferimenti solidali  $\Sigma', \Sigma''$ . Denotiamo con  $\vec{\omega}, \vec{\omega}'$  le velocità angolari di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$  e di  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma'$  rispettivamente.

Caso i) La velocità angolare di  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma$  è data da  $\vec{\omega} + \vec{\omega}'$ . Se  $P_1, P_2, P_3$  sono punti del corpo non allineati, dalla (4.6) applicata a  $P_2 - P_1$  e a  $P_3 - P_1$  si ha

$$\vec{\omega}' \times (P_2 - P_1) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \vec{\omega}' \times (P_3 - P_1) = \vec{\mathbf{0}}, \quad (6.18)$$

infatti

$$\frac{d}{dt}(P_2 - P_1) \Big|_{\Sigma'} = \frac{d}{dt}(P_2 - P_1) \Big|_{\Sigma''} + \vec{\omega}' \times (P_2 - P_1)$$

e si ha

$$\frac{d}{dt}(P_2 - P_1) \Big|_{\Sigma'} = \frac{d}{dt}(P_2 - P_1) \Big|_{\Sigma''} = \vec{\mathbf{0}}$$

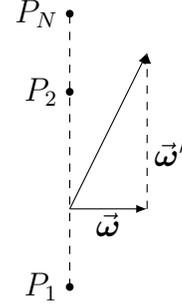
poiché  $P_1, P_2$  sono solidali sia a  $\Sigma'$  che a  $\Sigma''$ . La seconda relazione in (6.18) si dimostra in modo analogo. Dalle (6.18) segue che

$$\vec{\omega}' = \vec{\mathbf{0}},$$

quindi le velocità angolari di  $\Sigma'$  e  $\Sigma''$  rispetto a  $\Sigma$  sono le stesse.

<sup>4</sup>si può scrivere  $S^3$  come un fibrato con base  $S^2$  e fibre  $S^1$  che non è diffeomorfo al prodotto  $S^2 \times S^1$ .

Caso ii) Si considerino due punti  $P_1, P_2$  del corpo. Dalla (4.6) abbiamo  $\vec{\omega}' \times (P_2 - P_1) = \vec{0}$ , quindi le velocità angolari di  $\Sigma'$  e  $\Sigma''$  possono differire solo per una componente lungo la direzione di allineamento. Concludiamo che per ottenere la velocità angolare di minima norma tra quelle dei sistemi di riferimento solidali al corpo basta considerare la velocità angolare di un qualunque sistema di riferimento solidale e sottrarre da essa la sua componente lungo la direzione di allineamento dei punti.



□

**Definizione 16.** Diciamo che un punto  $P$  è solidale ad un corpo rigido  $\mathfrak{C}$  se  $P$  ha velocità nulla in tutti i riferimenti  $\Sigma'$  solidali a  $\mathfrak{C}$  che hanno velocità angolare di minima norma.

Per quanto detto prima, nel caso in cui  $\mathfrak{C}$  abbia tre punti non allineati, affinché  $P$  sia un punto solidale basta che esso abbia velocità nulla in un qualunque riferimento solidale. Se invece tutti i punti di  $\mathfrak{C}$  sono allineati serve che  $P$  abbia velocità nulla in un riferimento  $\Sigma'$  tale che la sua velocità angolare rispetto a  $\Sigma$  abbia in ogni istante componente nulla nella direzione dell'allineamento dei punti di  $\mathfrak{C}$ .

**Proposizione 40.** Indichiamo con  $\vec{v}_h, \vec{v}_k \in \mathbb{V}^3$  le velocità di due punti  $P_h, P_k$  di un corpo rigido, o ad esso solidali, relative ad un riferimento  $\Sigma$ . Se il corpo è in moto con velocità angolare  $\vec{\omega}$  vale la formula

$$\vec{v}_k = \vec{v}_h + \vec{\omega} \times (P_k - P_h). \quad (6.19)$$

*Dimostrazione.* Denotando con  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$  un sistema di riferimento solidale al corpo, con velocità angolare  $\vec{\omega}$  di minima norma, e usando le relazioni (4.7) si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{v}_k - \vec{v}_h &= \vec{v}'_k + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P_k - O') - \vec{v}'_h - \vec{v}_{O'} - \vec{\omega} \times (P_h - O') \\ &= \vec{\omega} \times (P_k - P_h), \end{aligned}$$

in cui abbiamo usato il fatto che le velocità  $\vec{v}'_h, \vec{v}'_k$  di  $P_k, P_h$  relative a  $\Sigma'$  sono nulle.

□

Le relazione (6.19) si chiama **formula fondamentale della cinematica rigida**.

**Esempio 8.** Calcoliamo la velocità angolare di un disco  $\mathcal{D}$  omogeneo di raggio  $R$  che si muove nel piano  $Oxy$ , rotolando senza strisciare sull'asse  $Ox$ . Usiamo

come coordinata l'ascissa  $s$  del punto di contatto tra il disco e l'asse  $Ox$ . Scelto un riferimento solidale con  $\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$ , dall'Osservazione 23 abbiamo

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Poiché il disco rotola senza strisciare, la velocità  $\vec{v}_P$  del punto  $P$  del disco a contatto con l'asse  $Ox$  è nulla. Detto  $B$  il baricentro del disco, dalla formula fondamentale (6.19) si ottiene

$$\vec{0} = \vec{v}_P = \vec{v}_B + \omega \hat{e}_3 \times (P - B) = \dot{s} \hat{e}_1 - \omega \hat{e}_3 \times R \hat{e}_2 = (\dot{s} + \omega R) \hat{e}_1.$$

Si trova quindi che

$$\omega = -\frac{\dot{s}}{R}.$$

### 6.2.6 Velocità angolare e angoli di Eulero

Facendo riferimento alla notazione introdotta nella Sezione 6.2.3 dimostriamo la formula seguente.

**Proposizione 41.** *la velocità angolare di un corpo rigido si può scrivere in termini degli angoli di Eulero e delle loro derivate temporali come segue:*

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{e}'_3 + \dot{\theta} \hat{e}_N + \dot{\varphi} \hat{e}_3. \quad (6.20)$$

\* **Dimostrazione.** Osserviamo che

$$\mathbf{e}'_i = R \mathbf{e}_i, \quad R = R_\varphi^{(3)} R_\theta^{(1)} R_\psi^{(3)},$$

con le matrici  $R_\alpha^{(i)}$  definite come in (6.6), per cui, omettendo la scritta (1) e (3) in queste matrici, si ha

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}'_i = \dot{R} \mathbf{e}_i &= (\dot{R}_\varphi R_\theta R_\psi + R_\varphi \dot{R}_\theta R_\psi + R_\varphi R_\theta \dot{R}_\psi) R_\psi^T R_\theta^T R_\varphi^T \mathbf{e}'_i = \\ &= [\dot{R}_\varphi R_\varphi^T + R_\varphi (\dot{R}_\theta R_\theta^T) R_\varphi^T + R_\varphi R_\theta (\dot{R}_\psi R_\psi^T) R_\theta^T R_\varphi^T] \mathbf{e}'_i. \end{aligned}$$

Le matrici

$$\dot{R}_\varphi R_\varphi^T = \dot{\varphi} \frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi} R_\varphi^T, \quad \dot{R}_\theta R_\theta^T = \dot{\theta} \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} R_\theta^T, \quad \dot{R}_\psi R_\psi^T = \dot{\psi} \frac{\partial R_\psi}{\partial \psi} R_\psi^T,$$

sono antisimmetriche, come si vede derivando rispetto a  $\varphi, \theta, \psi$  le relazioni

$$R_\varphi R_\varphi^T = R_\theta R_\theta^T = R_\psi R_\psi^T = I,$$

\* vedere la dimostrazione alternativa  
riportata in fondo a questo pdf

e si ha

$$\frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi} R_\varphi^T = \frac{\partial R_\psi}{\partial \psi} R_\psi^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J^{(3)}, \quad \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} R_\theta^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = J^{(1)},$$

in modo analogo a (6.9), (6.10). Inoltre le matrici

$$R_\varphi^T, \quad R_\theta^T R_\varphi^T$$

rappresentano rispettivamente il cambiamento di base da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}_1$  e da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}_2$ , dove

$$\mathcal{B}_1 = \{\hat{e}_N, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{\hat{e}_N, \hat{e}_\psi, \hat{e}'_3\}$$

con

$$\hat{e}_N = \cos \psi \hat{e}'_1 - \sin \psi \hat{e}'_2 \quad (6.21)$$

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2,$$

$$\hat{e}_\psi = \sin \psi \hat{e}'_1 + \cos \psi \hat{e}'_2, \quad (6.22)$$

i versori degli assi  $Oy_1, Oy_2$  dei riferimenti intermedi  $\Sigma_1, \Sigma_2$  introdotti nella Sezione 6.2.3.

Usando la corrispondenza tra matrici antisimmetriche e vettori descritta in (4.2) notiamo che le matrici

$$R_\varphi (\dot{R}_\theta R_\theta^T) R_{-\varphi}^T, \quad R_\varphi R_\theta (\dot{R}_\psi R_\psi^T) R_\theta^T R_\varphi^T,$$

scritte nella base  $\mathcal{B}$ , corrispondono rispettivamente al vettore velocità angolare del riferimento  $\Sigma_1 = O\hat{e}_N\hat{e}_\varphi\hat{e}_3$  che ruota di un angolo  $\theta(t)$  attorno all'asse  $O\hat{e}_N$  e al vettore velocità angolare del riferimento  $\Sigma_2 = O\hat{e}_N\hat{e}_\psi\hat{e}'_3$  che ruota di un angolo  $\psi(t)$  attorno all'asse  $O\hat{e}'_3$ . La (6.20) segue allora dalle formule di Poisson.  $\square$

Utilizzando il versore ausiliario  $\hat{e}_\psi$ , definito da (6.22), che è ortogonale a  $\hat{e}_N$  e giace nel piano generato da  $\hat{e}_3, \hat{e}'_3$ , possiamo scrivere

$$\hat{e}_3 = \cos \theta \hat{e}'_3 + \sin \theta \hat{e}_\psi. \quad (6.23)$$

Possiamo quindi scrivere  $\vec{\omega}$  nella base  $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  come

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \hat{e}'_1 + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \hat{e}'_2 + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}'_3. \quad (6.24)$$

### 6.2.7 Posizioni e velocità dei punti di un corpo rigido

Date le coordinate costanti  $\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_N$  dei punti di un corpo rigido discreto in un riferimento solidale  $\Sigma'$ , le coordinate delle posizioni  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  e delle velocità  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$  di questi punti in  $\Sigma$  sono determinate ad ogni istante dalla posizione e velocità di un punto  $O'$  solidale al corpo, da una matrice  $R \in SO(3)$  e dalla velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  del corpo:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{O'} + R \mathbf{x}'_j, \quad \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{O'}). \quad (6.25)$$

Le componenti della matrice di rotazione  $R$  possono essere espresse in funzione degli angoli di Eulero  $\varphi, \theta, \psi$ , e le componenti della velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  in funzione di  $\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ .

### 6.2.8 Asse istantaneo di rotazione

**Proposizione 42.** *Se  $\vec{\omega}(t) \neq \vec{0}$  è la velocità angolare di un corpo rigido all'istante  $t$ , allora esiste un'unica retta  $r(t)$ , detta **asse istantaneo di rotazione**, composta di punti solidali al corpo che hanno tutti velocità parallela ad  $\vec{\omega}(t)$  oppure nulla, cioè dai punti  $P$  solidali al corpo tali che*

$$\vec{v}_P \times \vec{\omega} = \vec{0}.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che dati due punti  $P, Q$  solidali al corpo, che all'istante  $t$  si trovano su una retta parallela ad  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ , si ha

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P - Q) = \vec{v}_Q$$

e dunque

$$\vec{v}_P \times \vec{\omega} = \vec{v}_Q \times \vec{\omega}.$$

Quindi ci basta dimostrare che all'istante  $t$  esiste un punto  $P_0$  solidale al corpo con  $\vec{v}_{P_0}$  parallela ad  $\vec{\omega}$  oppure nulla. L'asse istantaneo di rotazione corrisponderà allora alla retta passante per  $P_0$  e parallela a  $\vec{\omega}$ .

Siano  $O'$  un punto solidale al corpo e  $\Pi_{O'}$  il piano ortogonale a  $\vec{\omega}$  e passante per  $O'$ . Determiniamo un punto  $P_0 \in \Pi_{O'}$  solidale al corpo e tale che  $\vec{v}_{P_0} \times \vec{\omega} = \vec{0}$ . Moltiplichiamo vettorialmente per  $\vec{\omega}$  la formula fondamentale relativa a  $P_0$  e  $O'$ :

$$\vec{v}_{P_0} \times \vec{\omega} = \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times (P_0 - O')) \times \vec{\omega} = \vec{v}_{O'} \times \vec{\omega} + |\vec{\omega}|^2 (P_0 - O'),$$

poiché  $(P_0 - O') \cdot \vec{\omega} = 0$ . Imponendo che la velocità di  $P_0$  sia parallela ad  $\vec{\omega}$  oppure nulla otteniamo

$$P_0 - O' = \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega} \times \vec{v}_{O'},$$

che individua il punto  $P_0$  cercato. Dalla dimostrazione costruttiva della sua esistenza segue anche l'unicità dell'asse istantaneo di rotazione.  $\square$

**Osservazione 22.** *La dimostrazione di questa proposizione è analoga a quella della Proposizione 5.10, relativa all'asse centrale: basta sostituire  $\vec{N}_{Q_0}$  con  $\vec{v}_{P_0}$  ed  $\vec{R}$  con  $\vec{\omega}$ .*

### 6.2.9 Campo delle velocità di un moto rigido

Il seguente risultato descrive globalmente il campo delle velocità di un moto rigido:

**Proposizione 43.** *Le velocità dei punti solidali al corpo rigido hanno una simmetria cilindrica rispetto all'asse istantaneo di rotazione.*

*Dimostrazione.* Assumiamo che  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$  all'istante  $t$  e consideriamo l'asse istantaneo di rotazione  $r = r(t)$ . Per quanto mostrato nella Proposizione 42, ci basta mostrare che tale simmetria sussiste per i punti di un piano ortogonale all'asse  $r$ . Dato un punto  $P_1 \notin r$  definisco  $P_0 = r \cap \Pi_{P_1}$  con  $\Pi_{P_1}$  il piano passante per  $P_1$  e ortogonale a  $r$ . Dato un punto  $P_2$  sulla circonferenza di centro  $P_0$ , raggio  $|P_1 - P_0|$  e ortogonale a  $\vec{\omega}$  consideriamo l'applicazione lineare  $\mathcal{R}$  che corrisponde ad una rotazione attorno all'asse  $r$  tale che

$$P_2 = P_0 + \mathcal{R}(P_1 - P_0).$$

Per la (6.19) si ha

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times (P_1 - P_0), \quad \vec{v}_{P_2} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times (P_2 - P_0). \quad (6.26)$$

Siccome  $\vec{v}_{P_0}$  e  $\vec{\omega}$  sono paralleli all'asse,

$$\mathcal{R}\vec{v}_{P_1} = \vec{v}_{P_0} + \vec{\omega} \times \mathcal{R}(P_1 - P_0) = \vec{v}_{P_2}.$$

Inoltre dalla prima equazione in (6.26) segue che

$$\vec{v}_{P_1} \cdot (P_1 - P_0) = 0$$

poiché  $\vec{v}_{P_0} \times \vec{\omega} = \vec{0}$  e  $\vec{\omega} \times (P_1 - P_0) \cdot (P_1 - P_0) = 0$ .

Quindi, in coordinate cilindriche con asse  $r(t)$ , la componente radiale della velocità dei punti solidali al corpo rigido è nulla.

Consideriamo due punti  $P, Q$  qualunque solidali al corpo. Scomponiamo le loro velocità  $\vec{v}_P, \vec{v}_Q$  come somma di due vettori ortogonali:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{\parallel} + \vec{v}_P^{\perp}, \quad \vec{v}_Q = \vec{v}_Q^{\parallel} + \vec{v}_Q^{\perp} \quad (6.27)$$

dove

$$\vec{v}_P^{\parallel} = \frac{(\vec{v}_P \cdot \vec{\omega})}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}, \quad \vec{v}_P^{\perp} = \vec{v}_P - \vec{v}_P^{\parallel}, \quad \vec{v}_Q^{\parallel} = \frac{(\vec{v}_Q \cdot \vec{\omega})}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}, \quad \vec{v}_Q^{\perp} = \vec{v}_Q - \vec{v}_Q^{\parallel}.$$

Dalla formula fondamentale (6.19) segue che

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_Q \cdot \vec{\omega}, \quad (6.28)$$

quindi le componenti  $\vec{v}_P^{\parallel}$ ,  $\vec{v}_Q^{\parallel}$  lungo l'asse istantaneo di rotazione sono le stesse.

Dalla (6.19), (6.27) e (6.28) si ottiene

$$\vec{v}_P^{\perp} = \vec{v}_Q^{\perp} + \vec{\omega} \times (P - Q).$$

Nel caso particolare in cui  $Q$  sia un punto dell'asse istantaneo di rotazione si ha  $\vec{v}_Q^{\perp} = \vec{0}$ , per cui

$$\vec{v}_P^{\perp} = \vec{\omega} \times (P - Q).$$

Viste queste proprietà delle velocità dei punti di un corpo rigido, si parla di **atto di moto elicoidale**.<sup>5</sup>

□

## 6.3 Moti rigidi piani

Si parla di **moto rigido piano** se la velocità angolare  $\vec{\omega}$  è non nulla e ha direzione costante, e tutti i punti  $P$  solidali al corpo rigido hanno velocità ortogonale a tale direzione:

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0.$$

Posso dunque fissare un piano di riferimento  $\Pi$  ortogonale ad  $\vec{\omega}$  in cui studiare il moto.

**Osservazione 23.** In un moto rigido piano, se consideriamo un riferimento solidale al corpo rigido  $O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , con  $\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$ , ortogonale al piano di riferimento usato per studiare il moto, la sua velocità angolare  $\vec{\omega}$  sarà sempre parallela a  $O\hat{e}_3$ . Per dimostrarlo basta usare la formula di Poisson

$$\omega \times \hat{e}'_3 = \dot{\hat{e}}'_3 = \dot{\hat{e}}_3 = \mathbf{0}.$$

Quindi, nel caso di un corpo rigido con tutti i punti allineati, la velocità angolare di un riferimento solidale  $\Sigma'$  così scelto avrà sempre minima norma, in quanto la sua direzione sarà sempre ortogonale alla direzione di allineamento dei punti.

<sup>5</sup>l'atto di moto ad un dato istante è l'insieme di tutte le velocità a quell'istante.

**Osservazione 24.** Consideriamo un moto rigido piano con il piano di riferimento  $\Pi$  ortogonale al vettore  $\hat{e}_3$  del sistema di riferimento  $\Sigma$ . Sia  $\theta$  l'angolo tra due rette giacenti nel piano  $\Pi$ , una solidale al corpo e l'altra fissa in  $\Sigma$  e assumiamo che  $\theta$  cresca quando la retta solidale ruota in senso antiorario attorno all'asse orientato  $O\hat{e}_3$ . La velocità angolare del corpo rigido che esegue questo moto rigido piano è data da

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{e}_3.$$

Per dimostrarlo basta scegliere un riferimento solidale  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , con  $\hat{e}'_1$  lungo la direzione della retta solidale,  $\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$  ed  $\hat{e}'_2 = \hat{e}'_3 \times \hat{e}'_1$ . La dimostrazione prosegue come nell'Esempio 2.

### 6.3.1 Centro istantaneo di rotazione

Consideriamo un moto rigido piano con piano di riferimento  $\Pi$ . In ogni istante  $t$  tale che  $\vec{\omega}(t) \neq \vec{0}$  sia  $r(t)$  l'asse istantaneo di rotazione: definiamo il **centro istantaneo di rotazione** come il punto  $C_0(t) = r(t) \cap \Pi$ .

**Proposizione 44. (teorema di Chasles)** *In un moto rigido piano il centro istantaneo di rotazione  $C_0$  si trova sulla retta normale alla velocità di ciascuno dei punti solidali al corpo distinti da  $C_0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $C_0$  il centro istantaneo di rotazione. Osserviamo che  $\vec{v}_{C_0} = \vec{0}$ , poiché  $\vec{v}_{C_0} \times \vec{\omega} = \vec{0}$ ,  $\vec{v}_{C_0} \cdot \vec{\omega} = 0$ . Quindi

$$(P - C_0) \cdot \vec{v}_P = (P - C_0) \cdot (\vec{v}_{C_0} + \vec{\omega} \times (P - C_0)) = 0$$

per ogni punto  $P$  solidale al corpo. □

Per le proprietà dell'asse istantaneo di rotazione possiamo concludere che in un moto rigido piano, ad ogni istante  $t$ , il centro istantaneo di rotazione  $C_0 = C_0(t)$  è l'unico punto solidale al corpo che ha velocità nulla. Tale punto è anche detto **centro delle velocità** all'istante  $t$ .

### 6.3.2 Traiettorie polari

Consideriamo un moto rigido piano e denotiamo con  $\Pi$  il piano di riferimento. Fissiamo in tale piano un riferimento  $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2$  ed un riferimento  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2$  solidale al corpo rigido.

Chiamiamo **base** (o polare fissa) la curva descritta dal centro istantaneo di rotazione  $C_0$  nel riferimento  $\Sigma$  e **rulletta** (o polare mobile) la curva descritta da  $C_0$  nel riferimento  $\Sigma'$ . Possiamo associare alla rulletta un moto relativo al riferimento  $\Sigma$  considerando i suoi punti solidali al riferimento  $\Sigma'$ .

**Definizione 17.** Diciamo che due corpi rigidi rotolano senza strisciare l'uno sull'altro se le velocità dei punti dei corpi a contatto tra loro sono sempre le stesse. In particolare, si dice che un corpo rigido effettua un moto di puro rotolamento su un vincolo fisso se le velocità dei punti del corpo a contatto col vincolo sono nulle.

**Osservazione 25.** Nella definizione precedente incontriamo un altro caso di moto vincolato, quello di puro rotolamento, in cui viene data una condizione sulle velocità dei punti del sistema.

**Proposizione 45.** Durante il moto la rullotta rotola senza strisciare sulla base.

*Dimostrazione.* Ad ogni istante  $\bar{t}$  tale che  $\vec{\omega}(\bar{t}) \neq \vec{0}$  esiste un unico centro istantaneo di rotazione  $C_0$ . Dato il moto di un punto  $t \mapsto P(t)$  vale la relazione seguente

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times (P - O'),$$

in cui  $\vec{v}_P, \vec{v}'_P$  sono le velocità di  $P$  in  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ ,  $\vec{v}_{O'}$  è la velocità dell'origine  $O'$  di  $\Sigma'$  e  $\vec{\omega}$  è la velocità angolare di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ .<sup>6</sup>

Consideriamo il moto  $t \mapsto P(t)$  del punto che rappresenta ad ogni istante il centro istantaneo di rotazione, visto in  $\Sigma$  e in  $\Sigma'$ . All'istante  $\bar{t}$  si ha

$$P = C_0.$$

Allo stesso punto possiamo attribuire tre velocità diverse al tempo  $\bar{t}$ : 1) la velocità  $\vec{v}_{C_0} = \vec{0}$  del centro delle velocità; 2) la velocità  $\vec{v}_P$  del punto  $P$  in  $\Sigma$ , utile per descrivere la polare fissa; 3) la velocità  $\vec{v}'_P$  del punto  $P$  in  $\Sigma'$ , utile per descrivere la polare mobile. Dalla formula fondamentale della cinematica rigida si ha

$$\vec{0} = \vec{v}_{C_0} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (C_0 - O')$$

e, usando la relazione

$$P = C_0$$

all'istante  $\bar{t}$ , si ottiene che

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P$$

a tale istante, quindi la base  $\mathfrak{b}$  e la rullotta  $\mathfrak{r}$  sono tangenti nel loro punto di contatto  $P = C_0$ . Essendo la rullotta solidale al corpo rigido, la velocità del suo punto  $C_0$  a contatto con la base è nulla, quindi si ha un moto di puro rotolamento di  $\mathfrak{r}$  su  $\mathfrak{b}$ . □

---

<sup>6</sup>si intende la velocità angolare di un riferimento rispetto all'altro completando entrambi i riferimenti con un versore comune  $\hat{e}_3 = \hat{e}'_3$  ortogonale al piano di riferimento  $\Pi$ .

**Esempio 9.** Si calcolino la base e la rulletta nel caso di un'asta di lunghezza  $\ell$  che si può muovere in un piano mantenendo i due estremi  $A, C$  sugli assi coordinati di un sistema di riferimento  $\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2$ .

Introduciamo un sistema di riferimento  $\Sigma' = A\hat{e}'_1\hat{e}'_2$  con l'asse  $A\hat{e}'_1$  diretto lungo l'asta. Per il teorema di Chasles, le coordinate in  $\Sigma$  del centro istantaneo di rotazione dell'asta sono

$$x_0 = \ell \sin \theta, \quad y_0 = \ell \cos \theta.$$

Ne segue che l'equazione della base è

$$x_0^2 + y_0^2 = \ell^2,$$

che è una circonferenza di raggio  $\ell$  centrata nell'origine  $O$ . Indicate con  $x'_{C_0}, y'_{C_0}$  le coordinate di  $C_0$  in  $\Sigma'$  si ha

$$\mathbf{x}_{C_0} = \mathbf{x}_A + R\mathbf{x}'_{C_0},$$

dove

$$\mathbf{x}_{C_0} = (x_{C_0}, y_{C_0})^T, \quad \mathbf{x}_A = (0, \ell \cos \theta)^T, \quad \mathbf{x}'_{C_0} = (x'_{C_0}, y'_{C_0})^T$$

ed

$$R = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

è la matrice con componenti  $R_{kh} = \hat{e}'_h \cdot \hat{e}_k$ .

Si ottiene che

$$x'_{C_0} = \ell \sin^2 \theta, \quad y'_{C_0} = \ell \sin \theta \cos \theta.$$

Dalla relazione precedente si ha

$$x'^2_{C_0} + y'^2_{C_0} = \ell^2 \sin^2 \theta = \ell x_{C_0},$$

che si può anche scrivere

$$\left(x'_{C_0} - \frac{\ell}{2}\right)^2 + y'^2_{C_0} = \frac{\ell^2}{4},$$

ed è l'equazione di una circonferenza di raggio  $\ell/2$  centrata nel centro  $B$  dell'asta.

### 6.3.3 Profili coniugati

Consideriamo più in generale una curva piana  $c$  solidale al corpo rigido. Sia  $\gamma$  la curva che corrisponde all'involuppo della famiglia  $\{c_t\}_t$ , definita dal moto del corpo rigido al variare del tempo  $t$ .<sup>7</sup> Le curve  $c$  e  $\gamma$  si chiamano profili coniugati.

**Proposizione 46.** *La normale comune alle curve  $c$  e  $\gamma$  nel loro punto di contatto  $P$  passa ad ogni istante per il centro istantaneo di rotazione.*

*Dimostrazione.* Sia  $P$  il punto della curva  $c$  a contatto con  $\gamma$  e  $C_0$  il centro istantaneo di rotazione. Se  $P = C_0$  non c'è nulla da dimostrare. Se invece  $P \neq C_0$  possiamo assumere che il riferimento solidale abbia origine  $O' = P$  e, dalla relazione

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times (P - O'),$$

si ottiene

$$\vec{v}_{O'} = \vec{v}_P - \vec{v}'_P.$$

Osserviamo che  $\vec{v}_{O'} \neq \vec{0}$  perché  $O' \neq C_0$ . Siccome  $\gamma$  è l'involuppo della famiglia di curve  $\{c_t\}_t$  si ha  $\vec{v}_P \parallel \vec{v}'_P$ , quindi il vettore  $\vec{v}_{O'}$  è tangente alle curve  $c$  e  $\gamma$  in  $P$  e, per il teorema di Chasles, il centro istantaneo di rotazione  $C_0$  si trova sulla normale alle due curve passante da  $P$ .

□

### 6.3.4 Campo delle accelerazioni

Dato un moto rigido piano, sia  $\Sigma' = O'\hat{e}'_1\hat{e}'_2$  un sistema di riferimento solidale al corpo rigido nel piano di riferimento e sia  $\hat{e}'_3 = \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2$ . Per ogni punto  $P$  solidale al corpo, dalle (4.7), (4.8) si ottiene

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P - O'), \quad (6.29)$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) \quad (6.30)$$

poiché  $\vec{v}'_P = \vec{a}'_P = \vec{0}$ .

Dalla (6.30) si ottiene subito il seguente risultato:

**Proposizione 47. (teorema di Rivals)** *In un moto rigido piano l'accelerazione di qualsiasi punto  $P$  solidale al corpo rigido è data dalla somma dell'accelerazione di un dato punto  $O'$  solidale e dell'accelerazione che avrebbe  $P$  in un moto rotatorio con velocità angolare  $\vec{\omega}$  attorno alla normale al piano di riferimento per  $O'$ .*

Dalla stessa relazione si ottiene anche il seguente risultato:

---

<sup>7</sup>L'involuppo di una famiglia di curve  $\{c_t\}_t$  è una curva che è tangente in ogni suo punto ad una curva  $c_t$  della famiglia.

**Proposizione 48.** *Se  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ , esiste un unico punto del piano, detto **centro delle accelerazioni**, la cui accelerazione è nulla.*

*Dimostrazione.* Annullando il membro destro della (6.30) si ottiene l'equazione

$$\vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O')) = \vec{0}.$$

Dette  $(x, y)$  le coordinate di  $P - O'$  in  $\Sigma$  si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{O'} - \dot{\omega}y - \omega^2x &= 0 \\ \ddot{y}_{O'} + \dot{\omega}x - \omega^2y &= 0 \end{aligned}$$

per le coordinate  $(\ddot{x}_{O'}, \ddot{y}_{O'})$  dell'accelerazione  $\vec{a}_{O'}$  in  $\Sigma$ , e queste equazioni hanno un'unica soluzione poiché  $\omega^4 + \dot{\omega}^2 \neq 0$ . □

## 6.4 Operatore di inerzia

Per studiare il moto di un corpo rigido  $\mathfrak{C}$  è utile introdurre l'**operatore di inerzia**<sup>8</sup>  $\mathfrak{I}_Q : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  rispetto al polo  $Q \in \mathbb{E}^3$ , definito da

$$\mathfrak{I}_Q \vec{u} = \sum_{h=1}^N m_h (P_h - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - Q)], \quad \vec{u} \in \mathbb{V}^3.$$

**Proposizione 49.** *Per ogni scelta del polo  $Q$  l'applicazione bilineare*

$$\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{v} \in \mathbb{R}$$

*è simmetrica e, se il corpo  $\mathfrak{C}$  ha tre punti non allineati, è definita positiva.*

*Dimostrazione.* Dalle proprietà del prodotto misto e dalla simmetria del prodotto scalare abbiamo la simmetria dell'operatore  $\mathfrak{I}_Q$ , infatti

$$\vec{u} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{v} = \sum_{h=1}^N m_h [\vec{u} \times (P_h - Q)] \cdot [\vec{v} \times (P_h - Q)] = \vec{v} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{u}.$$

Similmente si ha

$$\vec{u} \cdot \mathfrak{I}_Q \vec{u} = \sum_{h=1}^N m_h |\vec{u} \times (P_h - Q)|^2$$

e, se ci sono tre punti non allineati, almeno un addendo della sommatoria è strettamente positivo. Se tutti i punti del corpo sono allineati ed  $\hat{e} \in \mathbb{V}^3$ ,  $|\hat{e}| = 1$ , corrisponde alla direzione della retta di allineamento, allora  $\hat{e} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e} = 0$  se  $Q$  sta su tale retta. □

---

<sup>8</sup>detto anche **tensore di inerzia**.

### Scomposizione dell'operatore di inerzia

Si verifica facilmente che

$$\mathfrak{I}_Q \vec{u} = \mathfrak{I}_B \vec{u} + m(B - Q) \times [\vec{u} \times (B - Q)], \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}^3, \quad (6.31)$$

infatti

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_Q \vec{u} &= \sum_{h=1}^N m_h (P_h - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - Q)] = \\ &= \sum_{h=1}^N m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] + \sum_{h=1}^N m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] + \\ &+ \sum_{h=1}^N m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (B - Q)] + \sum_{h=1}^N m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (B - Q)] \end{aligned}$$

e si ha

$$\sum_{h=1}^N m_h (B - Q) \times [\vec{u} \times (P_h - B)] = \sum_{h=1}^N m_h (P_h - B) \times [\vec{u} \times (B - Q)] = \vec{0}.$$

Dati un punto  $Q \in \mathbb{E}^3$  ed una direzione  $\hat{e} \in \mathbb{V}^3$ ,  $|\hat{e}| = 1$ , definiamo **momento di inerzia relativo all'asse  $Q\hat{e}$** , passante da  $Q$  e parallelo a  $\hat{e}$ , la quantità

$$I_{Q\hat{e}} = \hat{e} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e}.$$

Osserviamo che se  $Q'$  è un altro punto qualsiasi dell'asse  $Q\hat{e}$  si ha

$$\begin{aligned} I_{Q'\hat{e}} &= \sum_{h=1}^N m_h |\hat{e} \times (P_h - Q')|^2 = \sum_{h=1}^N m_h |\hat{e} \times [(P_h - Q) + (Q - Q')]|^2 \\ &= \sum_{h=1}^N m_h |\hat{e} \times (P_h - Q)|^2 = I_{Q\hat{e}}, \end{aligned}$$

quindi il momento di inerzia  $I_{Q\hat{e}}$  non dipende dal particolare polo  $Q$  scelto sull'asse.

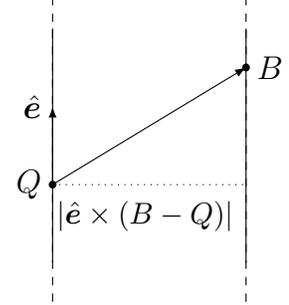
Abbiamo il seguente

**Proposizione 50. (Huygens-Steiner)** *Vale la seguente proprietà:*

$$I_{Q\hat{e}} = I_{B\hat{e}} + m|\hat{e} \times (B - Q)|^2, \quad (6.32)$$

in cui  $B$  è il baricentro del corpo rigido.

*Dimostrazione.* Il risultato si ottiene subito calcolando  $\hat{e} \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e}$  tramite la (6.31).  $\square$



**Osservazione 26.** *Dalla (6.32) segue che*

$$I_{B\hat{e}} = \min_{Q \in \mathbb{E}^3} I_{Q\hat{e}}.$$

La relazione (6.32) si chiama **teorema di Huygens-Steiner**.

## Matrice di inerzia

Fissata una base  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ , l'operatore di inerzia  $\mathfrak{I}_Q$  si scrive tramite la seguente matrice

$$I_Q = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}, \quad I_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \mathfrak{I}_Q \hat{e}'_j.$$

Più precisamente, posto

$$P_h - Q = x_h \hat{e}'_1 + y_h \hat{e}'_2 + z_h \hat{e}'_3, \quad h = 1, \dots, N, \quad (6.33)$$

si ha

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{h=1}^N m_h (y_h^2 + z_h^2); & I_{22} &= \sum_{h=1}^N m_h (x_h^2 + z_h^2); & I_{33} &= \sum_{h=1}^N m_h (x_h^2 + y_h^2); \\ I_{12} &= - \sum_{h=1}^N m_h x_h y_h; & I_{13} &= - \sum_{h=1}^N m_h x_h z_h; & I_{23} &= - \sum_{h=1}^N m_h y_h z_h. \end{aligned}$$

Infatti

$$I_{ij} = \sum_{h=1}^N m_h \hat{e}'_i \times (P_h - Q) \cdot \hat{e}'_j \times (P_h - Q),$$

con

$$\begin{aligned}\hat{e}'_1 \times (P_h - Q) &= y_h \hat{e}'_3 - z_h \hat{e}'_2, \\ \hat{e}'_2 \times (P_h - Q) &= z_h \hat{e}'_1 - x_h \hat{e}'_3, \\ \hat{e}'_3 \times (P_h - Q) &= x_h \hat{e}'_2 - y_h \hat{e}'_1.\end{aligned}$$

## Simmetrie e momenti principali di Inerzia

Gli autovalori dell'operatore  $\mathfrak{J}_Q$  si chiamano **momenti principali** di inerzia e le direzioni degli autovettori si dicono **direzioni principali** di inerzia. Più semplicemente si parlerà anche di momenti e direzioni principali.

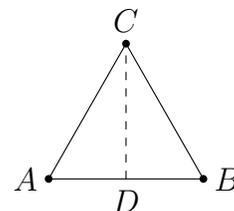
La matrice di inerzia è simmetrica, dunque per il teorema spettrale essa è diagonalizzabile in una base ortonormale  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ . Possiamo quindi trovare una matrice di cambiamento di base  $B$  che corrisponda ad una rotazione e che porti la matrice di inerzia in forma diagonale, cioè

$$B^T I_Q B = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

dove  $I_1, I_2, I_3$  sono i momenti principali di inerzia. Una base  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  in cui  $I_Q$  si scrive in forma diagonale si dice **base principale** (di inerzia).

**Osservazione 27.** *Dato un corpo rigido, il fatto che  $\mathcal{B}$  sia una base principale per l'operatore di inerzia  $\mathfrak{J}_Q$  dipende dalla scelta del polo  $Q$ .*

Si consideri ad esempio un corpo rigido formato da tre masse uguali  $m$  poste ai vertici  $A, B, C$  di un triangolo equilatero  $\mathcal{T}$  di lato  $\ell$ . Sia  $D$  il punto medio del lato  $AB$  e  $h$  l'altezza di  $\mathcal{T}$ . Mostriamo che il segmento  $AB$  individua una direzione principale di inerzia per  $\mathfrak{J}_D$ , ma non per  $\mathfrak{J}_A$ . Osserviamo che la direzione ortogonale al piano di  $\mathcal{T}$  è sempre principale, qualunque sia il polo  $Q$  scelto nel piano di  $\mathcal{T}$ .



Infatti, scelta la base  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$  con

$$\hat{e}'_1 = \frac{B - A}{|B - A|}, \quad \hat{e}'_3 = \frac{(B - A) \times (C - A)}{|(B - A) \times (C - A)|}, \quad \hat{e}'_2 = \hat{e}'_3 \times \hat{e}'_1$$

si ha sempre

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

perché la terza coordinata di tutti i punti del corpo è nulla. Si ha inoltre, con ovvio significato dei simboli,

$$I_{12}^D = \hat{e}'_1 \cdot \mathfrak{J}_D \hat{e}'_2 = 0,$$

perché se l'origine delle coordinate è  $D$ , cioè se poniamo  $Q = D$  nella (6.33), si ha

$$x_A = -x_B, \quad x_C = y_A = y_B = 0.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} I_{12}^A &= \hat{e}'_1 \cdot \mathfrak{I}_A \hat{e}'_2 = \hat{e}'_1 \cdot [m(B-A) \times (\hat{e}'_2 \times (B-A)) + m(C-A) \times (\hat{e}'_2 \times (C-A))] \\ &= m \hat{e}'_1 \cdot [|B-A|^2 \hat{e}'_2 - [(B-A) \cdot \hat{e}'_2](B-A) + |C-A|^2 \hat{e}'_2 - [(C-A) \cdot \hat{e}'_2](C-A)] \\ &= -m[(C-A) \cdot \hat{e}'_1][(C-A) \cdot \hat{e}'_2] = -\frac{\sqrt{3}}{4} m \ell^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo alcune proprietà dei momenti e degli assi principali di inerzia.



**Proposizione 51.** *Valgono le seguenti proprietà:*

- (i) *Se esiste un piano  $\Pi$  di simmetria per riflessione (cioè, detta  $\tilde{\mathcal{R}} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  la riflessione rispetto a  $\Pi$ , ad ogni punto  $P$  di massa  $m$  del corpo corrisponde un altro punto  $\tilde{\mathcal{R}}P$  del corpo con la stessa massa) allora la direzione ortogonale al piano  $\Pi$  è principale per  $\mathfrak{I}_Q$ , dove  $Q$  è un qualunque punto di  $\Pi$ .*
- (ii) *Se esiste un asse  $r$  di simmetria per rotazione (cioè, per ogni punto  $P$  di massa  $m$  del corpo esiste un intero  $k > 1$  tale che, detta  $\mathcal{R}_k : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  la rotazione di  $2\pi/k$  attorno ad  $r$ , i punti dell'orbita  $\{\mathcal{R}_k^h P\}_{h=0, \dots, k-1}$  di  $P$  sotto l'azione del gruppo ciclico generato da  $\mathcal{R}_k$  corrispondono ad altri punti del corpo con la stessa massa  $m$ ) allora la direzione dell'asse  $r$  è principale per  $\mathfrak{I}_Q$ , dove  $Q$  è un qualunque punto di  $r$ .*

Inoltre, se  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  è una base principale per  $\mathfrak{I}_Q$ ,

- (iii) *I momenti principali di inerzia soddisfano  $I_1 \leq I_2 + I_3$  e si ha  $I_1 = I_2 + I_3$  solo quando il corpo rigido è piano, e sta nel piano  $Q\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ .*
- (iv) *Sia  $\vec{v}$  un autovettore di  $\mathfrak{I}_Q$  con autovalore  $\lambda$ .*
  1. *Se  $\vec{v} = v_i \hat{e}'_i + v_j \hat{e}'_j$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$  e  $v_i v_j \neq 0$ , allora tutti i vettori del piano generato da  $\hat{e}'_i, \hat{e}'_j$  definiscono direzioni principali di inerzia con lo stesso valore  $\lambda = I_i = I_j$  del momento principale.*
  2. *Se  $\vec{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}'_j$ ,  $v_j \neq 0 \forall j$ , allora  $\mathfrak{I}_Q$  è un multiplo dell'identità, quindi tutte le direzioni sono principali.*

*Dimostrazione.* (i) Consideriamo un riferimento  $Q\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , dove  $Q$  è un punto del piano  $\Pi$  e l'asse  $Q\hat{e}'_3$  è ortogonale a  $\Pi$ . Osserviamo che  $I_{13} = I_{23} = 0$  perché, dette  $x_h, y_h, z_h$  le coordinate di un punto  $P_h$  del corpo, se  $z_h = 0$  questo non contribuisce alla somma che definisce  $I_{13}, I_{23}$ . Se invece  $z_h \neq 0$  esiste un altro punto  $P_k$  del

✱ vedere enunciato e dimostrazione riportati in fondo a questo pdf

corpo con la stessa massa e tale che  $x_h = x_k, y_h = y_k, z_h = -z_k$ , quindi i contributi dei due punti a  $I_{13}, I_{23}$  sono opposti.

(ii) Consideriamo un riferimento  $Q\hat{e}'_1\hat{e}'_2\hat{e}'_3$ , dove  $Q$  è un punto dell'asse  $r$  e  $Q\hat{e}'_3 = r$ . Osserviamo che  $I_{13} = I_{23} = 0$ . Dimostriamo che il numero complesso  $I_{13} + iI_{23}$  è nullo, dove  $i$  è l'unità immaginaria. Infatti possiamo trovare  $s$  interi  $k_1, \dots, k_s$ , dove ogni  $k_j$  è  $\geq 1$  e  $\sum_{j=1}^s k_j = N$ , tali che

$$I_{13} + iI_{23} = - \sum_{h=1}^N m_h (x_h + iy_h) z_h = - \sum_{j=1}^s m_j z_j \sum_{l=0}^{k_j-1} \omega_{k_j}^l (x_j + iy_j)$$

dove  $\omega_{k_j} = e^{2\pi i/k_j}$ . Si conclude utilizzando il fatto che per ogni  $k \in \mathbb{N}$  si ha

$$\sum_{h=0}^{k-1} \omega_k^h = \frac{\omega_k^k - 1}{\omega_k - 1} = 0.$$

(iii) Segue direttamente dalle formule per  $I_{jj}, j = 1, 2, 3$ .

(iv) Dalle relazioni  $\mathfrak{I}_Q \hat{e}'_j = I_j \hat{e}'_j, \vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \hat{e}'_k$  si ha

$$\sum_{k=1}^3 v_k I_k \hat{e}'_k = \mathfrak{I}_Q \vec{v} = \lambda \vec{v} = \sum_{k=1}^3 v_k \lambda \hat{e}'_k.$$

Dall'unicità della rappresentazione di un vettore come combinazione lineare degli elementi della base abbiamo  $\lambda = I_k$  se  $v_k \neq 0$ . Da qui segue la tesi, infatti se  $\mathfrak{I}_Q \hat{e}'_i = \lambda \hat{e}'_i, \mathfrak{I}_Q \hat{e}'_j = \lambda \hat{e}'_j$ , con  $i \neq j$  allora ogni combinazione lineare  $\alpha \hat{e}'_i + \beta \hat{e}'_j$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) è un autovettore di  $\mathfrak{I}_Q$  con autovalore  $\lambda$ :

$$\mathfrak{I}_Q(\alpha \hat{e}'_i + \beta \hat{e}'_j) = \alpha \lambda \hat{e}'_i + \beta \lambda \hat{e}'_j = \lambda(\alpha \hat{e}'_i + \beta \hat{e}'_j).$$

Se inoltre troviamo un autovettore  $\vec{v} = \sum_{j=1}^3 v_j \hat{e}'_j$  con  $v_1 v_2 v_3 \neq 0$  allora  $I_1 = I_2 = I_3$  e la matrice di inerzia è un multiplo dell'identità. □

**Esercizio 17.** Consideriamo un corpo rigido costituito da  $N$  punti di uguale massa  $m$ , posti ai vertici di uno dei cinque poliedri platonici, cioè il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro ( $N$  può essere uguale a 4, 8, 12). Dimostrare che ogni direzione è principale per l'operatore di inerzia  $\mathfrak{I}_B$  relativo al baricentro  $B$ .

## 6.5 Momento angolare ed energia cinetica di un corpo rigido

Fissiamo un riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$ . Dato un corpo rigido  $\mathfrak{C}$ , usando la formula fondamentale (6.19) abbiamo

$$\vec{M}_Q = \sum_{h=1}^N m_h (P_h - Q) \times [\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P_h - O')] = \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} &= m(B - Q) \times \vec{v}_{O'} + \mathfrak{I}_Q \vec{\omega} + m(B - Q) \times [\vec{\omega} \times (Q - O')] \quad (6.35) \\ &= m(B - Q) \times \vec{v}_Q + \mathfrak{I}_Q \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Osserviamo che nella (6.34) le velocità  $\vec{v}_{O'}$ ,  $\vec{v}_Q$  sono quelle di punti solidali a  $\mathfrak{C}$ . La formula (6.34) si semplifica in

$$\vec{M}_Q = \mathfrak{I}_Q \vec{\omega}$$

per  $\vec{v}_Q = \mathbf{0}$  oppure per  $Q = B$ .

Utilizzando la (6.19) possiamo anche rappresentare l'energia cinetica come

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_{O'}|^2 + m \vec{\omega} \cdot (B - O') \times \vec{v}_{O'} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_{O'} \vec{\omega}$$

Se scegliamo  $O' = B$  otteniamo la versione per i corpi rigidi del teorema di König:

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_B \vec{\omega}. \quad (6.36)$$

Se  $\vec{v}_{O'} = \vec{\mathbf{0}}$  otteniamo

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathfrak{I}_{O'} \vec{\omega}.$$

## 6.6 Corpi rigidi continui

Si distinguono corpi continui a 1, 2 e 3 dimensioni, a cui si attribuiscono rispettivamente una densità lineare, di superficie e di volume, denotate con  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ . Consideriamo l'ultimo caso, che è il più generale. La discussione relativa agli altri casi è simile. Sia

$$\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad \mathbf{x}' \mapsto \rho(\mathbf{x}')$$

la densità di volume, dove  $\mathbf{x}'$  sono coordinate in un riferimento solidale  $\Sigma'$ . Assumiamo che  $\rho$  sia integrabile sull'insieme  $C \subset \mathbb{R}^3$  delle coordinate dei punti del corpo relative a  $\Sigma'$ . Se il corpo rigido non è soggetto ad altri vincoli, una

parametrizzazione locale dell'insieme delle configurazioni del corpo è data dalla mappa

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') = \mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \quad (6.37)$$

con  $\mathbf{q} = (\mathbf{x}_{O'}, \boldsymbol{\alpha})$  ed  $R = R(\boldsymbol{\alpha})$ , dove  $\boldsymbol{\alpha} = (\varphi, \theta, \psi)$  sono gli angoli di Eulero (vedi Sezione 6.2.3).

Le velocità dei punti del corpo si ottengono dalla mappa (6.37):

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \quad (6.38)$$

con  $\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{v}_{O'}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ .

Introduciamo le definizioni delle quantità dinamiche sostituendo alla somma finita l'integrale sull'insieme  $C$  occupato dal corpo. L'insieme  $C$  viene definito in un riferimento solidale al corpo, in modo che  $C$  non cambi col tempo.

MASSA TOTALE

$$m = \int_C \rho(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

BARICENTRO

$$m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) = \int_C \rho(\mathbf{x}') R\mathbf{x}' d\mathbf{x}' = R \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' \quad (6.39)$$

**Osservazione 28.** Se  $O' = B$  si ottiene

$$\int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' = \mathbf{0}.$$

QUANTITÀ DI MOTO

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= m\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d\mathbf{x}' = m\mathbf{v}_{O'} + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) \\ &= m\mathbf{v}_{O'} + m(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_{O'}) = m\mathbf{v}_B. \end{aligned}$$

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO A  $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \int_C \rho(\mathbf{x}') (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q) \times (\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (6.40)$$

Introduciamo la matrice di inerzia  $I_Q$ , definita da

$$\begin{aligned} I_Q \mathbf{u} &= \int_C \rho(\mathbf{x}') (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times [\mathbf{u} \times (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q)] d\mathbf{x}' \\ &= \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q) \times [\mathbf{u} \times (\mathbf{x}_{O'} + R\mathbf{x}' - \mathbf{x}_Q)] d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (6.41)$$

per ogni  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ . Se  $O' = Q$  la (6.41) assume l'espressione più semplice

$$I_Q \mathbf{u} = \int_C \rho(\mathbf{x}') R \mathbf{x}' \times (\mathbf{u} \times R \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

e la (6.40) si scrive

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_Q &= \int_C \rho(\mathbf{x}') R \mathbf{x}' \times (\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times R \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_C \rho(\mathbf{x}') R \mathbf{x}' d\mathbf{x}' \times \mathbf{v}_Q + I_Q \boldsymbol{\omega} = \\ &= m(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{v}_Q + I_Q \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

#### MOMENTI DI INERZIA

Le componenti  $I_{ij}$  della matrice di inerzia  $I_{O'}$  in una base solidale  $\{\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3\}$  si scrivono

$$I_{ij} = \int_C \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{e}_i \times \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

#### ENERGIA CINETICA

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_C \rho(\mathbf{x}') |\mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')|^2 d\mathbf{x}' = \frac{1}{2} \int_C \rho(\mathbf{x}') |\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R \mathbf{x}'|^2 d\mathbf{x}' = \\ &= \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_{O'}|^2 + \int_C \rho(\mathbf{x}') \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \times R \mathbf{x}' d\mathbf{x}' + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_{O'} \boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_{O'}|^2 + m \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_{O'} \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

**Osservazione 29.** Se  $O' = B$  si ottiene

$$T = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_B \boldsymbol{\omega}.$$

**Esercizio 18.** Mostrare che vale il teorema di scomposizione di  $\mathbf{M}_Q$ .

Si introduce la densità di forza  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}')$ .

#### RISULTANTE DELLE FORZE

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

#### MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE RISPETTO A $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\mathbf{N}_Q = \int_C (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}; \mathbf{x}') - \mathbf{x}_Q) \times \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

Se  $O' = Q$  si ottiene l'espressione più semplice

$$\mathbf{N}_Q = \int_C R \mathbf{x}' \times \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

**Esempio 10.** (forza di gravità) Con una scelta opportuna del riferimento abbiamo

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = -\rho(\mathbf{x}')g\mathbf{e}_3,$$

per cui la risultante è

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = -mg\mathbf{e}_3,$$

ed il momento risultante rispetto ad un polo  $Q$  è

$$\mathbf{N}_Q = \int_C R\mathbf{x}' \times [-\rho(\mathbf{x}')g\mathbf{e}_3] d\mathbf{x}' = R \int_C \rho(\mathbf{x}')\mathbf{x}' d\mathbf{x}' \times (-g\mathbf{e}_3) = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times (-mg\mathbf{e}_3),$$

in cui abbiamo usato la relazione (6.39) con  $O' = Q$ .

**Esempio 11.** (forza centrifuga) Se  $\boldsymbol{\omega}$  è la velocità angolare abbiamo

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') = -\rho(\mathbf{x}')\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}'),$$

per cui, usando (6.39), la risultante è

$$\mathbf{R} = \int_C \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{O'})),$$

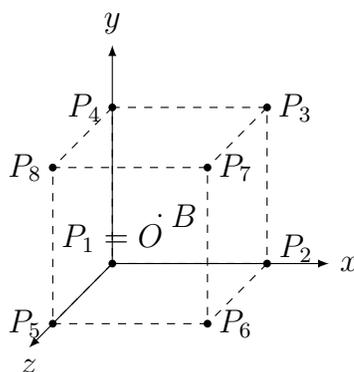
ed il momento risultante rispetto ad un polo  $Q$  è (scegliendo  $O' = Q$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_Q &= - \int_C \rho(\mathbf{x}')R\mathbf{x}' \times (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' = \\ &= - \int_C \rho(\mathbf{x}')(\boldsymbol{\omega} \cdot R\mathbf{x}')R\mathbf{x}' \times \boldsymbol{\omega} d\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

## 6.7 Esercizi

**Esercizio 19.** Si fissi un sistema di riferimento  $Oxyz$  e si consideri un corpo rigido  $\mathcal{C}$  formato da 8 punti materiali  $P_1, \dots, P_8$  di massa  $m$  posti ai vertici di un cubo di lato  $\ell$ . Il punto  $P_1$  del corpo si trova nell'origine  $O$  e i tre spigoli del cubo contenenti  $P_1$  giacciono sugli assi  $Ox, Oy, Oz$  (vedi figura).

- i) Sia  $B$  il baricentro del corpo rigido. Calcolare il momento di inerzia di  $\mathcal{C}$  rispetto all'asse passante per  $O$  e  $B$ .
- ii) Consideriamo il vettore  $\hat{\mathbf{e}}$ , di coordinate  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $|\hat{\mathbf{e}}| = 1$ . Calcolare il momento di inerzia di  $\mathcal{C}$  rispetto all'asse passante per  $O$  e parallelo ad  $\hat{\mathbf{e}}$ .



**Soluzione.** i) Posto

$$\hat{e}_B = \frac{B - O}{|B - O|},$$

il momento di inerzia rispetto all'asse passante per  $O$  e  $B$  si scrive

$$I_{O\hat{e}_B} = \hat{e}_B \cdot \mathfrak{I}_O \hat{e}_B.$$

Osserviamo che il momento di inerzia rispetto ad un asse non dipende dal polo scelto sull'asse, quindi

$$I_{O\hat{e}_B} = I_{B\hat{e}_B}.$$

Per il corpo rigido considerato ogni asse passante per il baricentro è principale e si ha

$$I_{B\hat{e}_B} = I_{B\hat{e}},$$

dove  $\hat{e}$  è un qualunque vettore unitario. Scegliendo ad esempio  $\hat{e} = \hat{e}_1$  e considerato che tutti i punti del corpo si trovano a distanza  $d = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell$  dall'asse  $O\hat{e}_1$ , si trova

$$I_{O\hat{e}_B} = 8md^2 = 4m\ell^2.$$

ii) Sia  $\hat{e}$  il vettore unitario di coordinate  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Per il teorema di Huygens-Steiner si ha

$$I_{O\hat{e}} = I_{B\hat{e}} + (8m)d^2,$$

dove

$$I_{B\hat{e}} = 4m\ell^2$$

per il risultato del punto precedente e  $d$  è la distanza tra gli assi  $O\hat{e}$  e  $B\hat{e}$ . Quest'ultima è data da

$$d = |(B - O) \times \hat{e}| = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma},$$

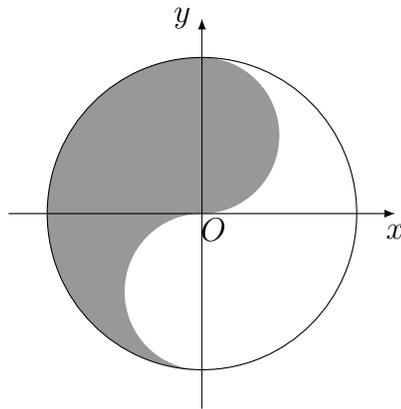
infatti

$$(B - O) \times \hat{e} = \frac{\ell}{2} [(\beta - \gamma)\hat{e}_1 + (\gamma - \alpha)\hat{e}_2 + (\alpha - \beta)\hat{e}_3].$$

In conclusione si ottiene

$$I_{O\hat{e}} = 4m\ell^2(2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma).$$

**Esercizio 20.** Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al polo  $O$  del disco non omogeneo di raggio  $2R$  rappresentato in figura. La parte scura del disco ha densità costante  $2\mu$ , mentre la parte chiara ha densità  $\mu$ , con  $\mu > 0$ . Le curve che separano le due parti sono semicirconferenze di raggio  $R$ .



**Soluzione.** ...

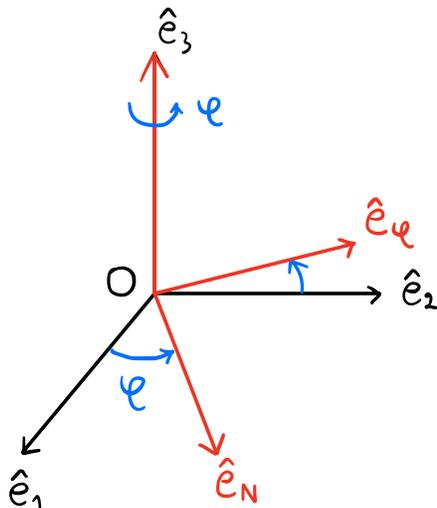
### Prop. 41

La velocità angolare di un corpo rigido si può scrivere in termini degli angoli di Eulero e delle loro derivate temporali come segue

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{e}_3 + \dot{\theta} \hat{e}_N + \dot{\varphi} \hat{e}_3$$

### Dim.

Mostriamo la sequenza di 3 rotazioni che portano  $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  in  $O\hat{e}_1'\hat{e}_2'\hat{e}_3'$  (cioè un sistema di riferimento solidale al corpo rigido)

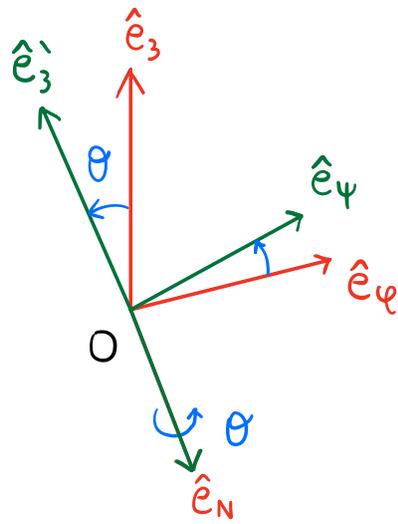


$$\Sigma = O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$$

$$\Sigma_1 = O\hat{e}_N\hat{e}_\varphi\hat{e}_3$$

velocità angolare di  $\Sigma_1$   
rispetto a  $\Sigma$

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\psi} \hat{e}_3$$

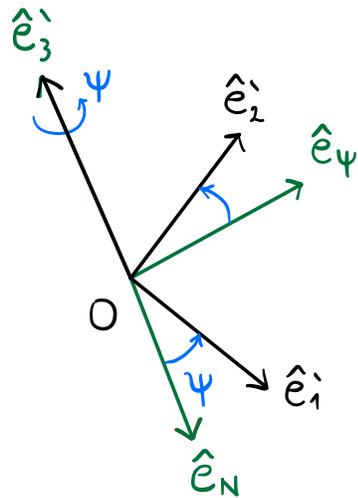


$$\Sigma_1 = O \hat{e}_N \hat{e}_N^\perp \hat{e}_3$$

$$\Sigma_2 = O \hat{e}_N \hat{e}_\Psi \hat{e}_3$$

velocità angolare di  $\Sigma_2$   
rispetto a  $\Sigma_1$

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\theta} \hat{e}_N$$



$$\Sigma_2 = O \hat{e}_N \hat{e}_\Psi \hat{e}_3$$

$$\Sigma_1 = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$$

velocità angolare di  $\Sigma_1$   
rispetto a  $\Sigma_2$

$$\vec{\omega}_3 = \dot{\psi} \hat{e}_3$$

Per la composizione delle velocità angolari  
(prop. 18), risulta

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 =$$
$$\dot{\varphi} \hat{e}_3 + \dot{\theta} \hat{e}_N + \dot{\psi} \hat{e}'_3$$

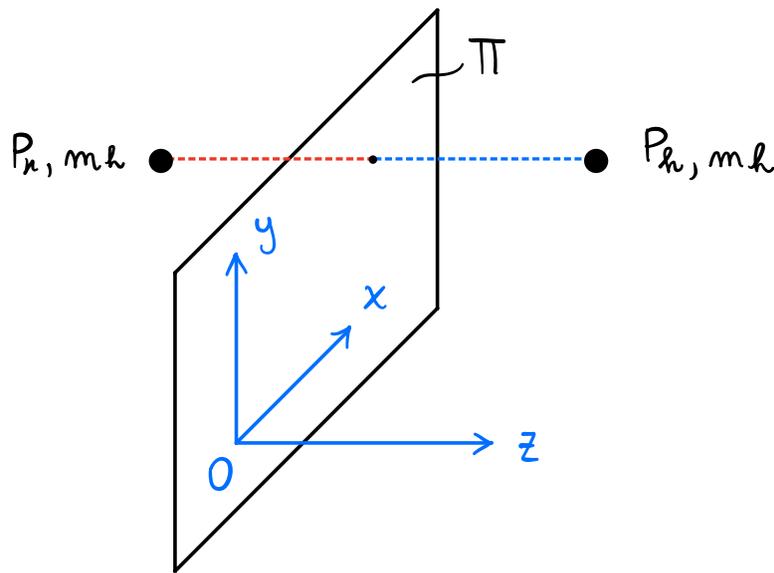


## Prop. 51

Valgono le seguenti proprietà.

- i) Se esiste un piano di simmetria  $\Pi$  per riflessione allora la direzione perpendicolare a  $\Pi$  è principale di inerzia per  $\mathcal{D}_Q$ ,  $\forall Q \in \Pi$ .

Dim.



Se  $\forall P_h \in \mathcal{C}$  di massa  $m_h$ , esiste  $P_n$  di massa  $m_h$  con

$$x_n = x_h$$

$$y_n = y_h$$

$$z_n = -z_h$$

allora  $\Pi = Oxy$  è un piano di simmetria

per riflessione.

Per mostrare che  $OZ$  è un asse principale, mostro  
che

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

per i punti  $P_h$  e  $P_k$ . Infatti

$$-m_h(x_h z_h) - m_k(x_k z_k) =$$

$$-m_h(x_h z_h) + m_h(x_h z_h) = 0$$

e

$$-m_h(y_h z_h) - m_k(y_k z_k) =$$

$$-m_h(y_h z_h) + m_h(y_h z_h) = 0$$

Ripetendo il conto per le altre coppie di  
punti di cui è costituito  $\mathcal{C}$  si ha

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

Osservazione: se  $z_k = 0$  allora  $P_k$  e  $P_h$   
sono lo stesso punto materiale.

ii) Se esiste un asse  $r$  di simmetria per rotazione allora la direzione di  $r$  è principale di inerzia per  $\mathcal{I}_Q, \forall Q \in r$ .

Dim.

Se esiste un angolo di rotazione

$$\varphi = \frac{2\pi}{k}, \quad k > 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

tale che  $\forall P_h \in \mathcal{C}$  di massa  $m_h$  i punti

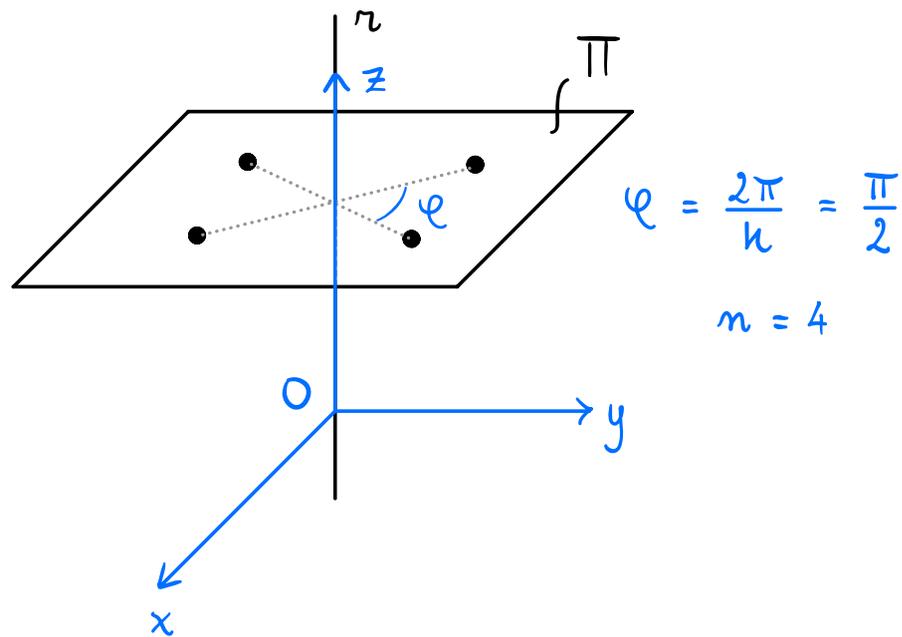
$$R_{\varphi} P_h, R_{2\varphi} P_h, \dots, R_{(k-1)\varphi} P_h$$

corrispondono a punti materiali di  $\mathcal{C}$  di massa  $m_h$  allora  $r$  è un asse di simmetria per rotazione.

$\{ R_\alpha$  indica una rotazione di  $\alpha$  intorno ad  $r$   $\}$

Consideriamo un piano  $\Pi \perp r$  e passante per almeno un punto di  $\mathcal{C}$ .

Introduciamo un sistema di riferimento  $Oxyz$  con l'asse  $Oz$  coincidente con  $r$ .



Per mostrare che  $Oz$  è un asse principale, mostriamo che

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

per i punti di  $\mathcal{C}$  appartenenti a  $\Pi$ .

Notando che tutti i punti hanno la stessa massa e la stessa coordinata  $z$  si ha

$$-\sum_{j=1}^n m_j x_j z_j = -\sum_{j=1}^n m x_j z = -m n x_B z$$

$$-\sum_{j=1}^n m_j y_j z_j = -\sum_{j=1}^n m y_j z = -m n y_B z$$

dove  $x_B, y_B$  sono le coordinate del baricentro delle masse sul piano considerato; per la simmetria per rotazione si ha che  $B \in r$ , quindi  $x_B = y_B = 0$ . Segue che

$$-\sum_{j=1}^n m_j x_j z_j = 0$$

$$-\sum_{j=1}^n m_j y_j z_j = 0$$

Ripetendo il conto per gli altri piani  $\perp r$  che contengono almeno un punto di  $\mathcal{C}$  si ottiene

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

iii) Sia  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  una base principale per  $\mathcal{I}_Q$ . Vale

$$I_1 \leq I_2 + I_3$$

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad \text{se } \mathcal{C} \text{ è piano e giace sul piano } Q\hat{e}_1\hat{e}_2$$

Dim. Segue dalle definizioni di  $I_1, I_2, I_3$ .

iv) Sia  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  una base principale per  $\mathcal{T}_Q$ .

Sia  $\vec{v}$  un autovettore di  $\mathcal{T}_Q$  con autovalore  $\lambda$ .

a) Se  $\vec{v} = v_i \hat{e}_i + v_j \hat{e}_j$ , con  $v_i \neq 0, v_j \neq 0$ ,

allora tutti i vettori del piano  $Q\hat{e}_i\hat{e}_j$

definiscono direzioni principali di

inerzia con lo stesso valore  $\lambda = I_i = I_j$ .

b) Se  $\vec{v} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3$ , con  $v_1 \neq 0,$

$v_2 \neq 0, v_3 \neq 0$ , allora tutte le direzioni

sono principali e  $\mathcal{T}_Q$  è un multiplo

dell'identità.

Dim. a)

$$\underbrace{\mathcal{T}_Q \vec{v}}_{\parallel} = \underbrace{\lambda \vec{v}}_{\parallel} = \lambda v_i \hat{e}_i + \lambda v_j \hat{e}_j$$

$$v_i \mathcal{T}_Q \hat{e}_i + v_j \mathcal{T}_Q \hat{e}_j = v_i I_i \hat{e}_i + v_j I_j \hat{e}_j$$

confrontando i termini si trova che

$$\lambda = I_i = I_j$$

Prendiamo ora  $\vec{w} = \alpha \hat{e}_i + \beta \hat{e}_j$ , con  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ . Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_Q \vec{w} &= \alpha \mathcal{J}_Q \hat{e}_i + \beta \mathcal{J}_Q \hat{e}_j \\ &= \alpha I_i \hat{e}_i + \beta I_j \hat{e}_j \\ &= \lambda (\alpha \hat{e}_i + \beta \hat{e}_j) = \lambda \vec{w} \end{aligned}$$

Segue che la direzione definita da  $\vec{w}$  è principale di inerzia con momento di inerzia  $\lambda$

Dim. b)

Con un ragionamento simile al precedente si vede che

$$I_1 = I_2 = I_3 = \lambda$$

e preso  $\vec{w} = \alpha \hat{e}_1 + \beta \hat{e}_2 + \gamma \hat{e}_3$ , con  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$ , si trova  $\mathcal{J}_Q \vec{w} = \lambda \vec{w}$ .

