Capitolo 5

Dinamica dei sistemi di N punti materiali liberi

Studiamo il moto di un sistema di N punti materiali liberi nello spazio tridimensionale. Introduciamo il baricentro del sistema e descriviamo le sue proprietà. Distinguiamo tra forze interne ed esterne e mostriamo che le prime sono sempre conservative. Parliamo inoltre dei sistemi di vettori applicati equivalenti e di quelli equilibrati.

5.1 Quantità dinamiche per N punti materiali

Consideriamo un sistema di punti materiali P_i di massa m_i, $i = 1, .., N$, su cui agiscono le forze $\vec{\boldsymbol{F}}_i$ nel sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3$. Siano $\vec{\boldsymbol{x}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_i, \vec{\boldsymbol{a}}_i$ la posizione, la velocità e l'accelerazione di P_i relative a Σ. Siano inoltre $\boldsymbol{F}_j, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{a}_i \in \mathbb{R}^3$ le coordinate di questi vettori in Σ. Introduciamo le seguenti quantità, utili a descrivere la dinamica degli N punti nel loro insieme:

Quantità di moto totale (momento lineare)

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\boldsymbol{p}}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{\boldsymbol{v}}_j.$$

Momento Angolare rispetto a un polo Q

$$\vec{\boldsymbol{M}}_Q = \sum_{j=1}^{N} (P_j - Q) \times m_j \vec{\boldsymbol{v}}_j.$$

Energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j |\vec{\boldsymbol{v}}_j|^2.$$

Risultante delle forze $\vec{\boldsymbol{F}}_j$

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\boldsymbol{F}}_j.$$

Momento risultante delle forze $\vec{\boldsymbol{F}}_j$ rispetto a un polo Q

$$\vec{\boldsymbol{N}}_Q = \sum_{j=1}^{N} (P_j - Q) \times \vec{\boldsymbol{F}}_j.$$

Potenza risultante delle forze $\vec{\boldsymbol{F}}_j$

$$\Pi = \sum_{j=1}^{N} \vec{\boldsymbol{F}}_j \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_j = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j \cdot \boldsymbol{v}_j.$$

Lavoro elementare all'instante t delle forze $\vec{\boldsymbol{F}}_j$

$$\delta\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\boldsymbol{F}}_j \cdot d\vec{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j \cdot d\boldsymbol{x}_j.$$

5.2 Teoremi di scomposizione relativi al baricentro

Introduciamo la massa totale

$$m = \sum_{j=1}^{N} m_j$$

e il baricentro $B \in \mathbb{E}^3$ degli N punti materiali, definito da

$$m(B - Q) = \sum_{j=1}^{N} m_j (P_j - Q), \tag{5.1}$$

dove $Q \in \mathbb{E}^3$ è un punto scelto a piacere.

Osserviamo che la definizione di B non dipende dalla scelta di Q infatti, scelto $Q' \neq Q$ e definito B' tramite la relazione

$$m(B' - Q') = \sum_{j=1}^{N} m_j (P_j - Q')$$

si ha

$$B' - Q' = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} m_j(P_j - Q') = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} m_j(P_j - Q) + (Q - Q')$$
$$= (B - Q) + (Q - Q') = B - Q',$$

per cui $B' = B$.

Definizione 6. *Il sistema di riferimento Σ_B, centrato in B e orientato come Σ, si chiama* **riferimento del baricentro***.*

Rappresentazione della quantità di moto

Dalla (5.1) segue subito che la quantità di moto totale corrisponde a quella di un punto avente massa totale m, che si muove come il baricentro del sistema:

$$\boldsymbol{p} = \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{v}_j = m\boldsymbol{v}_B. \tag{5.2}$$

Proposizione 20. *(teorema del centro di massa) Il baricentro di un sistema di N punti si muove come un punto materiale di massa m su cui agisce la risultante $\boldsymbol{R}$ delle forze che agiscono sui singoli punti:*

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{R}. \tag{5.3}$$

Dimostrazione. Valutando la (5.2) lungo le soluzioni delle equazioni di Newton e derivando rispetto al tempo si ottiene

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}_B = \sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\boldsymbol{x}}_j = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j.$$

□

Scomposizione del momento angolare rispetto a un polo Q

Il momento angolare totale rispetto ad un polo $Q \in \mathbb{E}^3$ si può scomporre come somma di due componenti

$$\boldsymbol{M}_Q = (\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_Q) \times m\boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{M}^{(B)}, \quad \boldsymbol{M}^{(B)} = \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_B) \times m_j(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_B). \tag{5.4}$$

La prima corrisponde al momento angolare rispetto a Q di un punto di massa m che si muove come il baricentro del sistema. La seconda corrisponde al momento angolare nel sistema nel riferimento del baricentro e non dipende dalla scelta del polo Q.

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_Q &= \sum_{j=1}^{N}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \boldsymbol{v}_j + \sum_{j=1}^{N}(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m_j \boldsymbol{v}_j = \\
&= \boldsymbol{M}_B + (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_Q) \times m \boldsymbol{v}_B.
\end{aligned}
$$

Inoltre

$$
\boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{M}^{(B)} + \sum_{j=1}^{N}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \boldsymbol{v}_B
$$

e si ha

$$
\sum_{j=1}^{N}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times m_j \boldsymbol{v}_B = \sum_{j=1}^{N} m_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_B) \times \boldsymbol{v}_B = m(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_B) \times \boldsymbol{v}_B = 0.
$$

$\square$

Osservazione 12. *Nel riferimento del baricentro il momento angolare non dipende dalla scelta del polo. Infatti in tale riferimento vale la relazione*

$$
\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{v}_j = m \boldsymbol{v}_B = \mathbf{0}
$$

e quindi, se $Q, Q' \in \mathbb{E}^3$ con $Q \neq Q'$, si ha

$$
\boldsymbol{M}_Q = \sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_Q) \times m_j \boldsymbol{v}_j + (\boldsymbol{x}_Q - \boldsymbol{x}_{Q'}) \times \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_{Q'}) \times m_j \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{M}_{Q'}.
$$

Scomposizione del momento risultante delle forze rispetto a un polo Q

Il momento risultante delle forze rispetto ad un polo $Q \in \mathbb{E}^3$ si può scomporre come somma di due componenti

$$
\boldsymbol{N}_Q = (\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_Q) \times \boldsymbol{R} + \boldsymbol{N}^{(B)}, \quad \boldsymbol{N}^{(B)} = \sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_B) \times (\boldsymbol{F}_j - m_j \boldsymbol{a}_B) \tag{5.5}
$$

la prima corrisponde al momento rispetto al polo Q della forza risultante $\boldsymbol{R}$ agente su un punto di massa m che si muove come il baricentro B del sistema. La seconda corrisponde al momento risultante delle forze nel riferimento del baricentro[1] e non dipende dalla scelta del polo Q.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_Q &= \sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_B) \times \boldsymbol{F}_j + \sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_Q) \times \boldsymbol{F}_j = \\ &= \boldsymbol{N}_B + (\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_Q) \times \boldsymbol{R}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\boldsymbol{N}_B = \boldsymbol{N}^{(B)} + \sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_B) \times m_j \boldsymbol{a}_B$$

e si ha

$$\sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_B) \times m_j \boldsymbol{a}_B = \sum_{j=1}^{N} m_j(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_B) \times \boldsymbol{a}_B = m(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_B) \times \boldsymbol{a}_B = 0.$$

□

Osservazione 13. *Nel riferimento del baricentro, lungo le soluzioni delle equazioni di Newton, il momento risultante delle forze non dipende dalla scelta del polo. Infatti, in queste ipotesi, vale la relazione*

$$\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\boldsymbol{x}}_j = m \ddot{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{0}$$

e quindi, se $Q, Q' \in \mathbb{E}^3$ *con* $Q \neq Q'$*, si ha*

$$\boldsymbol{N}_Q = \sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_Q) \times \boldsymbol{F}_j + (\boldsymbol{x}_Q - \boldsymbol{x}_{Q'}) \times \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j = \sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_{Q'}) \times \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{N}_{Q'}.$$

[1] in questo riferimento alle forze $\boldsymbol{F}_j$ agenti sui punti P_j si aggiungono le forze di trascinamento $-m_j \boldsymbol{a}_B$.

Scomposizione dell'energia cinetica

L'energia cinetica del sistema si può scomporre come somma di due componenti

$$T = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_B)\cdot(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_B), \tag{5.6}$$

la prima corrisponde all'energia cinetica di un punto materiale di massa m che si muove come il baricentro del sistema, la seconda corrisponde all'energia cinetica del sistema nel riferimento del baricentro. Questo risultato è noto come **teorema di König**.

Dimostrazione.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_B)\cdot(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_B) + \sum_{j=1}^{N} m_j\boldsymbol{v}_B\cdot(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_B) + \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{N} m_j)\boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{v}_B.$$

Inoltre il secondo addendo a destra è nullo. □

5.3 Forze interne e forze esterne

Possiamo scomporre le forze $\vec{\boldsymbol{F}}_i$ che agiscono sui punti P_i come somma vettoriale di due contributi: $\vec{\boldsymbol{F}}_i = \vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{I})} + \vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{E})}$. Il vettore $\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{I})}$ è la somma delle forze che gli altri punti del sistema esercitano su P_i e si chiama **forza interna** (agente su P_i); $\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{E})}$ è la somma delle altre forze e si chiama **forza esterna**.
Assumiamo che

$$\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{E})} = \vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{E})}(\vec{\boldsymbol{x}}_i, \vec{\boldsymbol{v}}_i, t),$$

cioè che ogni forza esterna $\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{E})}$ dipenda solo dallo stato del punto P_i.
Sulle forze interne $\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{I})}$ facciamo le seguenti ipotesi (*forze di tipo classico*):

$$\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{I})} = \vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{I})}(\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_N) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{\boldsymbol{F}}_{ij}(\vec{\boldsymbol{x}}_i, \vec{\boldsymbol{x}}_j), \tag{5.7}$$

dove $\vec{\boldsymbol{F}}_{ij}$ è la forza esercitata da P_j su P_i. Quindi le $\vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{I})}$ sono puramente posizionali e sono la somma vettoriale di interazioni a due corpi. Assumiamo inoltre che valgano le seguenti proprietà:

1) $\vec{\boldsymbol{F}}_{ij} + \vec{\boldsymbol{F}}_{ji} = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \forall i, j,$

2) $\vec{\boldsymbol{F}}_{ij} \times \vec{\boldsymbol{r}}_{ij} = \vec{\boldsymbol{0}}$, con $\vec{\boldsymbol{r}}_{ij} = \vec{\boldsymbol{x}}_i - \vec{\boldsymbol{x}}_j$,

3) $\vec{\boldsymbol{F}}_{ij} = f_{ij}(\rho_{ij})\frac{\vec{\mathbf{r}}_{ij}}{\rho_{ij}}$, con $\rho_{ij} = |\vec{\mathbf{r}}_{ij}|$.

Osserviamo che le relazioni precedenti implicano che $f_{ij} = f_{ji}$.

Osservazione 14. *Queste ipotesi sulle forze sono caratteristiche della Meccanica Classica: le proprietà* 1) *e* 2) *corrispondono al* **principio di azione e reazione**.[2]

Con queste ipotesi si dimostra che la risultante e il momento risultante delle forze interne (rispetto a qualunque polo Q) sono nulli. Infatti

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{R}}^{(I)} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{I})} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{\boldsymbol{F}}_{ij} = \sum_{1\le i<j\le N} (\vec{\boldsymbol{F}}_{ij} + \vec{\boldsymbol{F}}_{ji}) = \vec{\mathbf{0}},\\
\vec{\boldsymbol{N}}_Q^{(I)} &= \sum_{i=1}^{N} (P_i - Q)\times \vec{\boldsymbol{F}}_i^{(\mathrm{I})} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} (P_i - Q)\times \vec{\boldsymbol{F}}_{ij} =\\
&= \sum_{1\le i<j\le N} \Big[(P_i - Q)\times \vec{\boldsymbol{F}}_{ij} + (P_j - Q)\times \vec{\boldsymbol{F}}_{ji}\Big] = \sum_{1\le i<j\le N} (P_i - P_j)\times \vec{\boldsymbol{F}}_{ij} = \vec{\mathbf{0}}.
\end{aligned}$$

5.4 Le equazioni cardinali

Si consideri un sistema meccanico formato da N punti materiali di massa $m_1, \ldots, m_n$, sui quali agiscono delle forze $\boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{F}_j^{(I)} + \boldsymbol{F}_j^{(E)}$, con forze interne $\boldsymbol{F}_j^{(I)}$ di tipo classico.

Proposizione 21. *Sia $\boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, \boldsymbol{x}_N(t))$ una qualunque soluzione del sistema di equazioni di Newton*

$$m_j \ddot{\boldsymbol{x}}_j = \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t), \qquad j = 1 \ldots N.$$

Allora $\boldsymbol{x}(t)$ risolve le seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{R}^{(E)} \\ \dot{\boldsymbol{M}}_Q = \boldsymbol{N}_Q^{(E)} - \boldsymbol{v}_Q \times \boldsymbol{p} \end{cases} . \tag{5.8}$$

Le (5.8) si chiamano **equazioni cardinali** *della Dinamica.*

[2] Troviamo già negli scritti di Leonardo da Vinci un chiaro riferimento a questo principio. Nel suo *Codice sul volo degli uccelli* (1505) egli scrive: 'Tanta forza si fa con la cosa in contra all'aria, quanto l'aria contro alla cosa. Vedi l'alie percosse contro all'aria far sostenere la pesante aquila nella suprema sottile aria vicina all'elemento fuoco. Ancora vedi la mossa aria sopra'l mare, ripercossa nelle gonfiate vele, far correre la carica e pesante nave; sicché per queste dimostrative e assegnate ragioni potrai conoscere l'omo con le sue congegnate e grandi alie, facendo forza contro alla resistente aria e, vincendo, poterla soggiogare e levarsi sopra di lei'.

Dimostrazione. Calcolando la derivata di $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{M}_Q$ rispetto al tempo lungo le soluzioni delle equazioni di Newton si ottiene che

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}} &= m\ddot{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{(I)} + \boldsymbol{R}^{(E)},\\ \dot{\boldsymbol{M}}_Q &= \boldsymbol{N}_Q - \dot{\boldsymbol{x}}_Q \times m\dot{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{N}_Q^{(I)} + \boldsymbol{N}_Q^{(E)} - \dot{\boldsymbol{x}}_Q \times m\dot{\boldsymbol{x}}_B.\end{aligned}$$

Si conclude usando le ipotesi sulle forze interne fatte nella sezione precedente.

□

5.5 Sistemi equivalenti di vettori applicati

Un sistema di vettori applicati è un insieme $\mathcal{S}$ della forma

$$\mathcal{S} = \{(\vec{\boldsymbol{v}}_1, P_1), \ldots, (\vec{\boldsymbol{v}}_N, P_N)\}$$

costituito da un insieme di coppie $(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)$ che rappresentano un vettore e il suo punto di applicazione. Le rette

$$P_j\vec{\boldsymbol{v}}_j = \{P_j + \lambda\vec{\boldsymbol{v}}_j, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

passanti per P_j e aventi la direzione di $\vec{\boldsymbol{v}}_j$, si dicono **rette di applicazione**, o anche **linee di azione**, dei vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_j$.

I vettori

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \sum_{j=1}^{N} \vec{\boldsymbol{v}}_j, \qquad \vec{\boldsymbol{N}}_Q = \sum_{j=1}^{N} (P_j - Q) \times \vec{\boldsymbol{v}}_j$$

si chiamano **risultante** e **momento risultante rispetto al polo** $Q \in \mathbb{E}^3$ del sistema $\mathcal{S}$.

Consideriamo adesso due sistemi di vettori applicati:

$$\mathcal{S}_1 = \{(\vec{\boldsymbol{v}}_1, P_1), \ldots, (\vec{\boldsymbol{v}}_N, P_N)\}, \qquad \mathcal{S}_2 = \{(\vec{\boldsymbol{w}}_1, Q_1), \ldots, (\vec{\boldsymbol{w}}_M, Q_M)\}.$$

Definizione 7. *I sistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ si dicono* **equivalenti** *se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo O qualunque.*

Osservazione 15. *Osserviamo che nelle equazioni cardinali (5.8) appaiono solamente la risultante e il momento risultante delle forze esterne applicate nei punti del sistema, quindi considerando un sistema di forze equivalente otteniamo le stesse equazioni differenziali.*

Notiamo che se i sistemi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ hanno la stessa risultante ($\vec{\boldsymbol{R}}^{\mathcal{S}_1} = \vec{\boldsymbol{R}}^{\mathcal{S}_2}$) e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo Q ($\vec{\boldsymbol{N}}_Q^{\mathcal{S}_1} = \vec{\boldsymbol{N}}_Q^{\mathcal{S}_2}$), allora i due sistemi hanno lo stesso momento risultante rispetto ad un qualunque altro polo Q':

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{N}}_{Q'}^{\mathcal{S}_1} &= \sum_{h=1}^{N}(P_h - Q') \times \vec{\boldsymbol{v}}_h = \vec{\boldsymbol{N}}_Q^{\mathcal{S}_1} + (Q - Q') \times \vec{\boldsymbol{R}}^{\mathcal{S}_1} = \\ &= \vec{\boldsymbol{N}}_Q^{\mathcal{S}_2} + (Q - Q') \times \vec{\boldsymbol{R}}^{\mathcal{S}_2} = \sum_{k=1}^{M}(Q_k - Q') \times \vec{\boldsymbol{w}}_k = \vec{\boldsymbol{N}}_{Q'}^{\mathcal{S}_2}\end{aligned}$$

Definizione 8. *Diciamo che un sistema di vettori applicati* $\{(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)\}_{j=1\ldots N}$ *è* **equilibrato** *se la risultante* $\vec{\boldsymbol{R}}$ *e il momento risultante* $\vec{\boldsymbol{N}}_Q$ *rispetto ad un polo* Q *qualunque sono nulli.*

Dalla relazione

$$\vec{\boldsymbol{N}}_{Q'} = \vec{\boldsymbol{N}}_Q + (Q - Q') \times \vec{\boldsymbol{R}}$$

valida per ogni $Q, Q' \in \mathbb{E}^3$, segue che per verificare che un sistema è equilibrato basta controllare che, oltre alla risultante $\vec{\boldsymbol{R}}$, si annulli il momento risultante $\vec{\boldsymbol{N}}_Q$ rispetto ad un particolare polo Q.

Introduciamo delle **operazioni elementari**, eseguibili su un sistema $\mathcal{S} = \{(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)\}_{j=1\ldots N}$ di vettori applicati, che danno luogo ad un sistema ad esso equivalente:

(i) composizione e scomposizione di vettori applicati in uno stesso punto;

(ii) aggiunta o eliminazione di due vettori opposti e paralleli alla retta congiungente i loro punti di applicazione (vettori *direttamente opposti*).

Infatti, eseguendo ciascuna delle due operazioni otteniamo la stessa risultante. Per vedere che anche il momento risultante resta lo stesso basta calcolarlo nel punto in cui sono applicati i vettori oggetto della composizione o scomposizione per l'operazione (i), e in un punto qualsiasi della linea di azione dei due vettori direttamente opposti per l'operazione (ii).

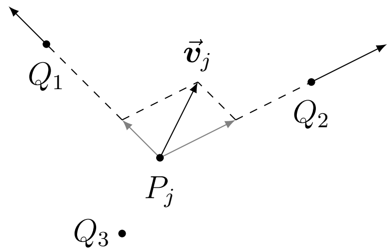
Osserviamo che tramite queste operazioni elementari possiamo trasportare ogni vettore applicato lungo la sua linea di azione. Infatti dato un vettore $\vec{\boldsymbol{v}}$ applicato in P e scelto un punto Q sulla linea di azione di $\vec{\boldsymbol{v}}$ possiamo aggiungere il vettore nullo $\vec{\boldsymbol{0}}$ applicato in Q e scomporlo come somma di $\vec{\boldsymbol{v}}$ e $-\vec{\boldsymbol{v}}$ (operazione (i), o anche (ii)). Possiamo poi eliminare i vettori applicati $(\vec{\boldsymbol{v}}, P), (-\vec{\boldsymbol{v}}, Q)$, in quanto direttamente opposti (operazione (ii)). Il sistema che ne risulta è quindi composto dal vettore $\vec{\boldsymbol{v}}$ applicato in Q.

Proposizione 22. *Ogni sistema di vettori applicati $\{(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)\}_{j=1,\dots,N}$ può essere ridotto tramite operazioni elementari ad un sistema di tre vettori (possibilmente nulli) applicati in tre punti non allineati scelti a piacere.*

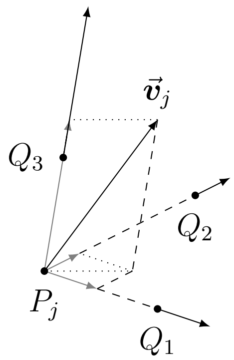
Dimostrazione. Siano Q_1, Q_2, Q_3 tre punti non allineati. Mostriamo che ogni vettore $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ applicato nel punto P_j si può sostituire con tre vettori applicati nei punti Q_i. Infatti, se $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ appartiene allo spazio lineare generato da $Q_2 - Q_1, Q_3 - Q_1$ e P_j giace nel piano $Q_1Q_2Q_3$, allora usando la prima operazione elementare possiamo scrivere $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ come combinazione lineare di due dei vettori $(Q_i - P_j), i = 1, 2, 3$.

Assumiamo ad esempio che

$$\vec{\boldsymbol{v}}_j = \lambda_1(Q_1 - P_j) + \lambda_2(Q_2 - P_j),$$



per opportuni coefficienti $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Possiamo sostituire $(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)$ con i due vettori $\lambda_i(Q_i - P_j)$, $i = 1, 2$ applicati nel punto P_j. Poi possiamo traslare tali vettori lungo la loro linea di azione e considerarli applicati nei punti Q_i.



Se invece $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ non appartiene allo spazio lineare generato da $Q_2 - Q_1, Q_3 - Q_1$, a meno di una traslazione sulla sua linea di azione si può supporre $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ applicato in un punto P_j che non giaccia nel piano $Q_1Q_2Q_3$. Possiamo quindi scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_j = \lambda_1(Q_1 - P_j) + \lambda_2(Q_2 - P_j) + \lambda_3(Q_3 - P_j),$$

per opportuni coefficienti $\lambda_i \in \mathbb{R}$, sostituire $(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)$ con i tre vettori $\lambda_i(Q_i - P_j)$, $i = 1, 2, 3$ applicati in P_j e traslare tali vettori lungo la loro linea di azione in modo che siano applicati nei punti Q_i.

Concludo osservando che per ogni indice j abbiamo sostituito a $(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)$ tre vettori (possibilmente nulli) applicati in Q_1, Q_2, Q_3. Usando la prima operazione elementare possiamo considerare, per ciascuno dei tre punti Q_i, la somma vettoriale di tutti i vettori applicati in questo. Si ottiene così la tesi.

□

Proposizione 23. *Ogni sistema $\mathcal{S}$ di vettori applicati può essere ridotto tramite operazioni elementari ad un sistema di due soli vettori applicati. Uno dei due punti di applicazione può essere scelto a piacere.*

Dimostrazione. Si scelga un punto Q a piacere e altri due punti Q_1, Q_2 in modo che Q, Q_1, Q_2 non siano allineati. Per la Proposizione 22 possiamo ridurre $\mathcal{S}$ tramite operazioni elementari ad un sistema di tre vettori (eventualmente nulli) $\vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{w}}_1, \vec{\boldsymbol{w}}_2$ applicati in Q, Q_1, Q_2 rispettivamente. Sia Π_1 il piano passante per $Q, Q_1, Q_1 + \vec{\boldsymbol{w}}_1$ e Π_2 il piano passante per $Q, Q_2, Q_2 + \vec{\boldsymbol{w}}_2$. Se $\vec{\boldsymbol{w}}_1$ (risp. $\vec{\boldsymbol{w}}_2$) è nullo scegliamo un piano qualsiasi passante per Q e Q_1 (risp. Q e Q_2).

Consideriamo prima il caso generale, in cui

$$\Pi_1 \neq \Pi_2, \qquad Q_1, Q_2 \notin r$$

dove $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$ è la retta corrispondente all'intersezione dei due piani. Scegliamo un punto $A \neq Q$ su r. Il vettore applicato $(\vec{\boldsymbol{w}}_1, Q_1)$ è equivalente all'insieme dei due vettori applicati $\{(\vec{\boldsymbol{w}}_1^Q, Q_1), (\vec{\boldsymbol{w}}_1^A, Q_1)\}$, diretti come $Q_1 - Q$ e $Q_1 - A$ e tali che $\vec{\boldsymbol{w}}_1 = \vec{\boldsymbol{w}}_1^Q + \vec{\boldsymbol{w}}_1^A$. Questi due vettori si possono trasportare lungo le loro linee di azione in modo che risultino applicati in Q e A rispettivamente. Possiamo inoltre eseguire una riduzione analoga sul vettore applicato $(\vec{\boldsymbol{w}}_2, Q_2)$. In questo modo abbiamo ridotto $\mathcal{S}$ ad un sistema di tre vettori applicati in Q e due vettori applicati in A. Si conclude usando la prima operazione elementare.

Nei casi particolari non ancora considerati possiamo procedere come sopra scegliendo il punto A in modo opportuno. Se

$$\Pi_1 \neq \Pi_2 \quad \text{e} \quad Q_1 \in r \text{ (risp. } Q_2 \in r)$$

basta prendere $A \equiv Q_1$ (risp. $A \equiv Q_2$), se invece

$$\Pi_1 = \Pi_2$$

possiamo prendere indifferentemente $A \equiv Q_1$ oppure $A \equiv Q_2$.

□

Proposizione 24. *Ogni sistema di vettori applicati equilibrato si può ridurre ad un sistema nullo, cioè costituito da soli vettori nulli, tramite operazioni elementari.*

Dimostrazione. Applicando a tale sistema la riduzione della Proposizione 23 si arriva ad un sistema di due vettori applicati che risultano necessariamente opposti (poiché la risultante è nulla) e diretti lungo la retta congiungente i loro due punti di applicazione (poiché il momento risultante rispetto a un polo qualunque è nullo). Tale sistema si riduce mediante la seconda operazione elementare ad un sistema nullo.

□

Proposizione 25. *Sia $\mathcal{S} = \{(\vec{\boldsymbol{v}}_1, P_1), (\vec{\boldsymbol{v}}_2, P_2), (\vec{\boldsymbol{v}}_3, P_3)\}$ un sistema equilibrato formato da soli tre vettori. Allora le rette di applicazione di tali vettori sono coplanari. Inoltre, tali rette sono concorrenti in uno stesso punto oppure parallele.*

Dimostrazione. Indichiamo con r_1, r_2, r_3 le tre rette di applicazione. Se queste sono coincidenti il risultato vale banalmente. Se non è così allora possiamo trasportare i vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ lungo le loro linee di azione e assumere che i punti di applicazione P_j non siano allineati. Consideriamo le coppie $(\vec{\boldsymbol{v}}_1, P_1)$ e $(\vec{\boldsymbol{v}}_2, P_2)$. Dato un punto Q dell'asse r_{12}, passante per P_1, P_2, le proiezioni dei momenti

$$(P_1 - Q) \times \vec{\boldsymbol{v}}_1, \qquad (P_2 - Q) \times \vec{\boldsymbol{v}}_2$$

lungo r_{12} sono nulle. Poiché il sistema è equilibrato, il momento risultante rispetto a qualunque polo è nullo, quindi anche la proiezione del momento

$$(P_3 - Q) \times \vec{\boldsymbol{v}}_3$$

lungo r_{12} deve essere nulla. Dunque i vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_3$, $P_3 - Q$, $P_2 - P_1$ sono linearmente dipendenti e il punto $P_3 + \vec{\boldsymbol{v}}_3$ sta nel piano $P_1P_2P_3$. Analogamente si dimostra che i punti $P_1 + \vec{\boldsymbol{v}}_1$, $P_2 + \vec{\boldsymbol{v}}_2$ stanno in tale piano. Quindi le rette di applicazione r_1, r_2, r_3 sono coplanari.

Se r_1, r_2 si incontrano in un punto Q, si possono trasportare $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2$ fino ad avere il loro punto di applicazione in Q. La somma $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{v}}_1 + \vec{\boldsymbol{v}}_2$ di tali vettori applicata in Q equivale al sistema dei due vettori applicati. Poiché il sistema $\mathcal{S}$ è equilibrato, la linea di azione r di $(\vec{\boldsymbol{u}}, Q)$ deve coincidere con la linea di azione r_3 di $(\vec{\boldsymbol{v}}_3, P_3)$, che quindi deve passare per Q. Se invece r_1 e r_2 sono parallele, è parallela ad esse anche r_3: infatti, se r_1, r_3 avessero un punto in comune, in questo punto dovrebbe concorrere anche r_2.

□

Proposizione 26. *Dati due sistemi equivalenti di vettori applicati*

$$\mathcal{S}_1 = \{(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)\}_{j=1,\dots,N}, \qquad \mathcal{S}_2 = \{(\vec{\boldsymbol{w}}_k, Q_k)\}_{k=1,\dots,M},$$

possiamo sempre ridurre l'uno all'altro tramite operazioni elementari.

Dimostrazione. Si consideri il sistema $\mathcal{S}_2' = \{(-\vec{\boldsymbol{w}}_h, Q_h)\}_{h=1,\dots,M}$. Il sistema $\mathcal{S}_3 = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_2'\}$, composto dall'unione dei tre sistemi, si può ridurre a $\mathcal{S}_1$ tramite operazioni elementari. Infatti per ogni vettore $\vec{\boldsymbol{w}}_k$ in $\mathcal{S}_2$ si trova $-\vec{\boldsymbol{w}}_k$ in $\mathcal{S}_2'$ applicato allo stesso punto Q_k, quindi queste coppie di vettori si possono cancellare. Osserviamo adesso che il sistema $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2'\}$ è equilibrato, poiché la risultante e il momento risultante (rispetto a qualsiasi polo) di $\mathcal{S}_2'$ sono opposti a quelli di $\mathcal{S}_2$, che sono uguali a quelli di $\mathcal{S}_1$. Quindi $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2'\}$ si può ridurre tramite operazioni elementari ad un sistema nullo per la Proposizione 24. Concludiamo quindi che il sistema $\mathcal{S}_3$ si può ridurre anche a $\mathcal{S}_2$ tramite operazioni elementari. □

5.5.1 Asse centrale

Dimostriamo il seguente risultato.

Proposizione 27. *Dato un sistema di vettori applicati*

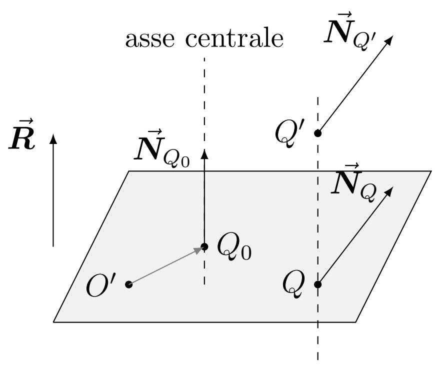
$$\mathcal{S} = \{(\vec{\boldsymbol{v}}_i, P_i)\}_{i=1\dots N}, \tag{5.9}$$

con risultante $\vec{\boldsymbol{R}}$ *non nulla, esiste un'unica retta* r*, detta* **asse centrale***, formata da tutti e soli i punti* $Q \in \mathbb{E}^3$ *tali che*

$$\vec{\boldsymbol{N}}_Q \times \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{0}}. \tag{5.10}$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che per ogni scelta di $P, Q \in \mathbb{E}^3$ si ha

$$\vec{\boldsymbol{N}}_P = \sum_{j=1}^{N}((P_j - Q) + (Q - P)) \times \vec{\boldsymbol{v}}_j = \vec{\boldsymbol{N}}_Q + (Q - P) \times \vec{\boldsymbol{R}}. \tag{5.11}$$



Scelto a piacere un punto $O' \in \mathbb{E}^3$, consideriamo il piano $\Pi_{O'}$ passante per O' e ortogonale alla risultante $\vec{\boldsymbol{R}}$. Osserviamo che se $Q \in \Pi_{O'}$ e Q' è un punto della retta $\{Q + \lambda\vec{\boldsymbol{R}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ passante per Q e parallela a $\vec{\boldsymbol{R}}$, dalla relazione (5.11) si ottiene $\vec{\boldsymbol{N}}_{Q'} = \vec{\boldsymbol{N}}_Q$, per cui

$$\vec{\boldsymbol{N}}_{Q'} \times \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{N}}_Q \times \vec{\boldsymbol{R}}.$$

Per dimostrare l'esistenza dell'asse centrale posso quindi limitarmi a cercare nel piano $\Pi_{O'}$ un punto Q_0 tale che $\vec{\boldsymbol{R}} \times \vec{\boldsymbol{N}}_{Q_0}$ sia nullo. Si ha

$$\vec{\boldsymbol{N}}_{Q_0} \times \vec{\boldsymbol{R}} = (\vec{\boldsymbol{N}}_{O'} + (O' - Q_0) \times \vec{\boldsymbol{R}}) \times \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{N}}_{O'} \times \vec{\boldsymbol{R}} - |\vec{\boldsymbol{R}}|^2(O' - Q_0),$$

poichè $(O' - Q_0) \perp \vec{\boldsymbol{R}}$. Quindi, ponendo $\vec{\boldsymbol{N}}_{Q_0} \times \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{0}}$, si ottiene come unica soluzione

$$Q_0 - O' = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{R}}|^2}\vec{\boldsymbol{R}} \times \vec{\boldsymbol{N}}_{O'}.$$

□

Dalla relazione (5.11) segue anche che

$$\vec{\boldsymbol{N}}_P \cdot \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{R}}, \qquad \forall P, Q \in \mathbb{E}^3. \tag{5.12}$$

L'espressione $\vec{\boldsymbol{N}}_P \cdot \vec{\boldsymbol{R}}$ non dipende dalla scelta del polo e si chiama **trinomio invariante**, con riferimento alla somma dei tre termini che si ottengono sviluppando il prodotto scalare.

Per ogni punto $Q \in \mathbb{E}^3$ usando la formula (1.8) possiamo scrivere $\vec{\boldsymbol{N}}_Q$ come somma di due vettori ortogonali:

$$\vec{\boldsymbol{N}}_Q = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{R}}|^2}[(\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{R}})\vec{\boldsymbol{R}} + \vec{\boldsymbol{R}} \times (\vec{\boldsymbol{N}}_Q \times \vec{\boldsymbol{R}})]. \tag{5.13}$$

Il primo vettore è lo stesso al variare di Q perché $\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{R}}$ è il trinomio invariante. Se si sceglie come polo un punto Q_0 dell'asse centrale si ha $\vec{\boldsymbol{N}}_{Q_0} \times \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{0}}$. Quindi

$$|\vec{\boldsymbol{N}}_{Q_0}| = \min_{Q\in\mathbb{E}^3} |\vec{\boldsymbol{N}}_Q|.$$

Dalla relazione (5.13) segue anche che se Q_0 è un punto dell'asse centrale si ha $\vec{\boldsymbol{N}}_{Q_0} = \vec{\boldsymbol{0}}$ se e solo se $\vec{\boldsymbol{N}}_{Q_0} \cdot \vec{\boldsymbol{R}} = 0$, quindi solo se il trinomio invariante (che può essere calcolato usando un polo qualunque) è nullo.

Esercizio 11. *Trovare l'asse centrale nel caso del sistema $\mathcal{S}$ costituito delle forze di gravità applicate in N punti materiali $P_1, \dots, P_N$ di masse $m_1, \dots, m_N$:*

$$\mathcal{S} = \{(\vec{\boldsymbol{F}}_i, P_i)\}_{i=1\dots N}, \qquad \vec{\boldsymbol{F}}_i = -m_i g \hat{\boldsymbol{e}}_3, \tag{5.14}$$

dove g è l'accelerazione di gravità.

Soluzione. La risultante delle forze è $\vec{\boldsymbol{R}} = -mg\hat{\boldsymbol{e}}_3$, dove m è la massa totale. Scelto a piacere un punto $O' \in \mathbb{E}^3$ si ha

$$\begin{aligned} Q_0 - O' &= \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{R}}|^2}\vec{\boldsymbol{R}} \times \vec{\boldsymbol{N}}_{O'} = -\frac{1}{mg}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \times \Big[\sum_{j=1}^N (P_j - O') \times (-m_j g \hat{\boldsymbol{e}}_3)\Big] \\ &= \hat{\boldsymbol{e}}_3 \times [(B - O') \times \hat{\boldsymbol{e}}_3] \end{aligned}$$

L'asse centrale passa per il punto Q_0 ed è parallelo ad $\vec{\boldsymbol{R}}$. Se scegliamo $O' = B$, la formula precedente ci dice anche che il baricentro B è un punto dell'asse centrale. □

5.5.2 Coppie di vettori applicati

Una **coppia di vettori applicati** è un sistema della forma

$$\{(\vec{\boldsymbol{v}}_1, P_1), (\vec{\boldsymbol{v}}_2, P_2)\}$$

tali che $\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \vec{\mathbf{0}}$. Assumiamo $\vec{\boldsymbol{v}}_1 \neq \vec{\mathbf{0}}$. La quantità $|(P_1 - P_2) \times \vec{\boldsymbol{v}}_1|/|\vec{\boldsymbol{v}}_1|$, che rappresenta la distanza tra le due rette di applicazione $P_1\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $P_2\vec{\boldsymbol{v}}_2$, si chiama **braccio della coppia**.
Osserviamo che il momento di una coppia di vettori applicati non dipende dalla scelta del polo. Infatti si ha

$$(Q_1 - Q) \times \vec{\boldsymbol{v}}_1 + (Q_2 - Q) \times \vec{\boldsymbol{v}}_2 = (Q_1 - Q_2) \times \vec{\boldsymbol{v}}_1, \qquad \forall Q \in \mathbb{E}^3.$$

Proposizione 28. *Ogni sistema di vettori applicati $\mathcal{S} = \{(\vec{\boldsymbol{v}}_i, P_i)\}_{i=1,\dots,N}$ è equivalente ad un sistema costituito da un vettore applicato in un punto qualunque Q, e da una coppia di vettori applicati, dipendente dalla scelta di Q.*

Dimostrazione. Sia $\vec{\boldsymbol{R}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{v}}_i$ la risultante dei vettori del sistema e $\vec{\boldsymbol{N}}_Q = \sum_i (P_i - Q) \times \vec{\boldsymbol{v}}_i$ il momento risultante rispetto ad un polo fissato $Q \in \mathbb{E}^3$. Consideriamo il sistema di vettori applicati

$$\mathcal{S}' = \{(\vec{\boldsymbol{R}}, Q), (\vec{\boldsymbol{v}}, Q_1), (-\vec{\boldsymbol{v}}, Q_2)\}$$

con $Q_1, Q_2 \in \mathbb{E}^3$ e $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{V}^3$, scelti in modo che il momento della coppia $(Q_1 - Q_2) \times \vec{\boldsymbol{v}}$ sia uguale a $\vec{\boldsymbol{N}}_Q$. Si verifica facilmente che $\mathcal{S}'$ è equivalente a $\mathcal{S}$.

□

Proposizione 29. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di vettori applicati $\mathcal{S} = \{(\vec{\boldsymbol{v}}_i, P_i)\}_{i=1,\dots,N}$ sia equivalente al sistema composto da un unico vettore applicato in un punto opportuno, oppure ad una sola coppia, è che il trinomio invariante sia nullo. Se la risultante $\vec{\boldsymbol{R}}$ è non nulla si ha il primo caso e il punto di applicazione è un punto qualunque dell'asse centrale; se $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ si ha il secondo.*

Dimostrazione. La condizione

$$\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{R}} = 0 \tag{5.15}$$

per un polo $Q \in \mathbb{E}^3$ (e quindi per tutti) è necessaria. Infatti se $\mathcal{S}$ è equivalente ad un sistema composto da una sola coppia allora questo sistema ha risultante nulla. Se invece $\mathcal{S}$ è equivalente ad un unico vettore applicato in un punto Q' allora il momento risultante rispetto a Q' è nullo. In entrambi i casi il trinomio invariante risulta nullo.

Vediamo che la condizione (5.15) è anche sufficiente. Se $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\mathbf{0}}$ allora, usando la Proposizione 28, si trova che $\mathcal{S}$ è equivalente ad una coppia di vettori applicati. Se $\vec{\boldsymbol{R}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ basta osservare che $\vec{\boldsymbol{N}}_Q = \vec{\mathbf{0}}$ per ogni punto Q dell'asse centrale, infatti si ha

$$\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{R}} = 0, \qquad \vec{\boldsymbol{N}}_Q \times \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Dunque $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema $\{(\vec{\boldsymbol{R}}, Q)\}$.

□

Osserviamo che nella discussione precedente è compreso il caso di un sistema equilibrato: in tal caso l'unico vettore o l'unica coppia sono nulli.

Esempio 3. Il sistema di forze di gravità $\mathcal{S}$ dell'Esercizio 11 è equivalente al sistema $\mathcal{S}' = \{(\vec{\boldsymbol{R}}, B)\}$ formato da un'unica forza $\vec{\boldsymbol{R}} = -mg\hat{\boldsymbol{e}}_3$ applicata nel baricentro B, infatti il trinomio invariante $\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{R}}$ è nullo (tutte le forze sono parallele ed $\vec{\boldsymbol{N}}_Q$ è ad esse ortogonale) e il baricentro è un punto dell'asse centrale.

Come conseguenza il momento risultante delle forze di gravità rispetto al baricentro è nullo.

Osservazione 16. *L'esempio precedente mostra anche che ogni sistema di vettori applicati paralleli ha trinomio invariante nullo.*

Diciamo che un sistema $S = \{(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)\}_{j=1,\ldots,N}$ di vettori applicati è **piano** se i punti $P_j, P_j + \vec{\boldsymbol{v}}_j$, $j = 1, \ldots, N$ giacciono tutti in uno stesso piano.

Esercizio 12. *Mostrare che ogni sistema piano di vettori applicati ha trinomio invariante nullo.*

5.5.3 Centro di vettori paralleli

Consideriamo un sistema di vettori applicati tutti paralleli, della forma

$$\mathcal{S} = \{(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)\}_{j=1,\ldots,N},$$

in cui

$$\vec{\boldsymbol{v}}_j = v_j \hat{\boldsymbol{e}},$$

con $v_j \in \mathbb{R}$ ed $\hat{\boldsymbol{e}} \in \mathbb{V}^3$ è un vettore unitario. Scelto $Q \in \mathbb{E}^3$ arbitrariamente, chiamiamo **centro dei vettori paralleli** $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_N$ il punto $C \in \mathbb{E}^3$ definito dalla relazione

$$C - Q = \frac{\sum_{j=1}^N v_j (P_j - Q)}{\sum_{j=1}^N v_j}. \tag{5.16}$$

In modo analogo a quanto fatto per il baricentro si può dimostrare che la definizione del centro C non dipende dalla scelta di Q.

Se $v = \sum_{j=1}^N v_j \neq 0$ osserviamo che il punto C appartiene all'asse centrale, infatti

$$\vec{\boldsymbol{N}}_C = \sum_{j=1}^N (P_j - C) \times v_j \hat{\boldsymbol{e}} = \sum_{j=1}^N v_j (P_j - C) \times \hat{\boldsymbol{e}} = v(C - C) \times \hat{\boldsymbol{e}} = \vec{\boldsymbol{0}}.$$

Osserviamo che il centro C del sistema resta lo stesso se cambiamo la direzione comune $\hat{\boldsymbol{e}}$ dei vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ lasciando invariati i loro punti di applicazione P_j, infatti la definizione (5.16) non dipende da $\hat{\boldsymbol{e}}$.

5.6 Sistemi meccanici conservativi

Proposizione 30. *Le forze interne di tipo classico ammettono l'energia potenziale*

$$V^{(I)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\le i<j\le N} \mathcal{V}_{ij}(\rho_{ij}(\boldsymbol{x})), \qquad \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N), \tag{5.17}$$

con

$$\frac{d\mathcal{V}_{ij}}{d\rho_{ij}} = -f_{ij},$$

cioè valgono le relazioni

$$\boldsymbol{F}_k^{(I)} = -\nabla_{\boldsymbol{x}_k} V^{(I)}, \qquad k = 1, \dots, N$$

dove

$$\nabla_{\boldsymbol{x}_k} V^{(I)} = \left[\frac{\partial V^{(I)}}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right]^T.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ e che le funzioni $\mathcal{V}_{ij}(\rho_{ij})$ e $\mathcal{V}_{ji}(\rho_{ij})$ possono differire solo per una costante additiva poiché $f_{ij} = f_{ji}$. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{x}_k} V^{(I)} &= \sum_{1\le i<j\le N} \nabla_{\boldsymbol{x}_k} \mathcal{V}_{ij} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} \nabla_{\boldsymbol{x}_k} \mathcal{V}_{kj} \\
&= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} \frac{d\mathcal{V}_{kj}}{d\rho_{kj}} \nabla_{\boldsymbol{x}_k} \rho_{kj} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} f_{kj} \frac{\boldsymbol{r}_{kj}}{\rho_{kj}} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} \boldsymbol{F}_{kj} = -\boldsymbol{F}_k^{(I)}.
\end{aligned}$$

Nei passaggi precedenti abbiamo usato il fatto che

$$\mathcal{V}_{ij} = \mathcal{V}_{ij}(\rho_{ij}) = \mathcal{V}_{ij}(|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|),$$

per cui $\mathcal{V}_{ij}$ non dipende da $\boldsymbol{x}_k$ se $k \neq i, j$. Inoltre abbiamo usato le relazioni

$$\nabla_{\boldsymbol{x}_k} \rho_{kj} = \left[\frac{\partial |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_j|}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right]^T = \frac{\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_j}{|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_j|}, \qquad k, j = 1, \dots, N.$$

□

Nella Figura 5.1, per $N = 4$, evidenziamo a sinistra con una curva tratteggiata gli indici dei termini che appaiono nella somma che definisce $V^{(I)}$; a destra mettiamo invece in evidenza gli indici dei termini non nulli che appaiono nell'espressione di $\nabla_{\boldsymbol{x}_k} V^{(I)}$ per $k = 2$. I cerchi grigi più grandi corrispondono agli indici (i, j) per cui si ha $i = k$ oppure $j = k$. Al posto dell'indice $(1, 2)$ possiamo considerare $(2, 1)$ perché $\mathcal{V}_{12}$ e $\mathcal{V}_{21}$ differiscono al più per una costante.

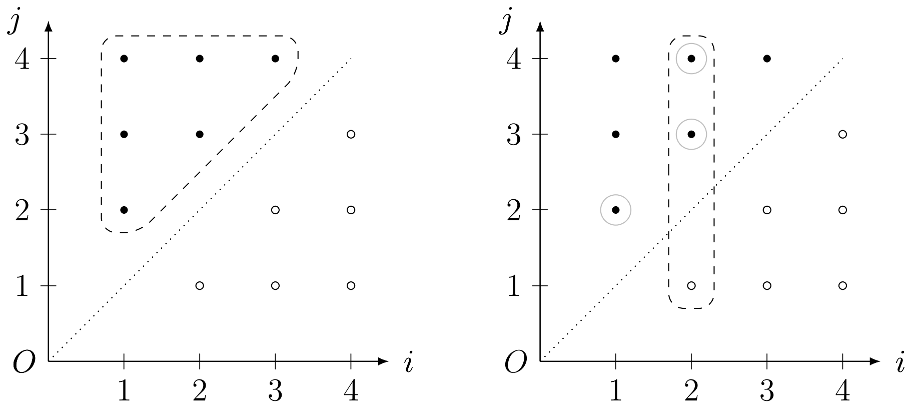


Figura 5.1: Caso $N = 4$. Indici dei termini della somma che definisce $V^{(I)}$ (a sinistra); indici dei termini non nulli che appaiono in $\nabla_{\boldsymbol{x}_k} V^{(I)}$ per $k = 2$ (a destra).

Osservazione 17. *Possiamo anche assumere, senza perdita di generalità, che $\mathcal{V}_{ij} = \mathcal{V}_{ji}$. In questo caso l'energia potenziale delle forze interne si scrive*

$$V^{(I)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \mathcal{V}_{ij}(\rho_{ij}).$$

Osservazione 18. *Le funzioni*

$$V_k^{(I)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} \mathcal{V}_{kj}(\rho_{kj}), \qquad k = 1, \ldots, N$$

soddisfano le relazioni

$$\boldsymbol{F}_k^{(I)} = -\nabla_{\boldsymbol{x}_k} V_k^{(I)},$$

ma la somma $\sum_{k=1}^{N} V_k^{(I)}$ non va bene come energia potenziale delle forze interne, perché ci dà un contributo doppio delle forze.

Introduciamo la potenza delle forze interne e esterne, denotate rispettivamente con

$$\Pi^{(I)} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j^{(I)} \cdot \boldsymbol{v}_j, \qquad \Pi^{(E)} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j^{(E)} \cdot \boldsymbol{v}_j.$$

Con questa notazione si ottiene

$$\Pi = \Pi^{(I)} + \Pi^{(E)}.$$

Abbiamo la seguente

Proposizione 31. *(teorema dell'energia cinetica) Sia* $\boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{x}_1(t) \dots \boldsymbol{x}_N(t))$ *una qualunque soluzione delle equazioni di Newton (1.13). Allora, lungo questa soluzione vale la relazione*

$$\dot{T} = \Pi = \Pi^{(I)} + \Pi^{(E)}. \tag{5.18}$$

Se le forze interne sono di tipo classico, con energia potenziale $V^{(I)}$*, allora la* (5.18) *si può scrivere*

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)}) = \Pi^{(E)}. \tag{5.19}$$

Dimostrazione.

$$\Pi = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\boldsymbol{x}}_j \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{x}}_j \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_j) = \dot{T}.$$

Siccome le forze interne ammettono l'energia potenziale $V^{(I)}$, abbiamo

$$\frac{d}{dt} V^{(I)} = \sum_{i=1}^{N} \nabla_{\boldsymbol{x}_i} V^{(I)} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i = -\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{(I)} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i = -\Pi^{(I)},$$

da cui segue (5.19). □

Definizione 9. *La forza esterna* $\boldsymbol{F}_j^{(E)}$ *che agisce sul punto* P_j *si dice conservativa se è puramente posizionale, cioé* $\boldsymbol{F}_j^{(E)} = \boldsymbol{F}_j^{(E)}(\boldsymbol{x}_j)$*, ed esiste una funzione scalare* $V_j(\boldsymbol{x}_j)$ *tale che* $\boldsymbol{F}_j^{(E)} = -\nabla_{\boldsymbol{x}_j} V_j$.

Definizione 10. *Un sistema meccanico di* N *punti materiali si dice* **conservativo** *se le forze* $\boldsymbol{F}_j$ *che agiscono sui punti* P_j *sono puramente posizionali e se esiste una funzione scalare* $V(\boldsymbol{x})$ *tale che* $\boldsymbol{F}_j = -\nabla_{\boldsymbol{x}_j} V$*, per* $j = 1 \dots N$*. La funzione* V *si chiama energia potenziale del sistema.*

Se le forze esterne $\boldsymbol{F}_j^{(E)}$ sono tutte conservative allora la funzione

$$V^{(E)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} V_j(\boldsymbol{x}_j)$$

soddisfa

$$\boldsymbol{F}_j^{(E)} = -\nabla_{\boldsymbol{x}_j} V^{(E)}, \qquad j = 1 \dots N.$$

In questo caso il sistema meccanico è conservativo, con energia potenziale

$$V(\boldsymbol{x}) = V^{(I)}(\boldsymbol{x}) + V^{(E)}(\boldsymbol{x}).$$

Introduciamo l'**energia totale**

$$E(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = T(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) + V^{(I)}(\mathrm{x}) + V^{(E)}(\mathrm{x}).$$

Proposizione 32. *(conservazione dell'energia) L'energia totale di un sistema di N punti materiali soggetto a forze interne di tipo classico e a forze esterne conservative è un integrale primo.*

Dimostrazione. Usando la (5.19) si ha

$$\frac{d}{dt}(T + V^{(I)} + V^{(E)}) = \Pi^{(E)} + \frac{d}{dt}V^{(E)} = 0,$$

infatti

$$\frac{d}{dt}V^{(E)} = \sum_{i=1}^{N} \nabla_{\boldsymbol{x}_i} V^{(E)} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i = -\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{(E)} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i = -\Pi^{(E)}.$$

□

5.7 Altri risultati sul problema degli N corpi

Consideriamo N punti materiali $P_1 \dots P_N$ di masse $m_1 \dots m_N$ soggetti soltanto alla loro interazione mutua, dovuta a forze interne di tipo classico. Sia $V(\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_N)$ l'energia potenziale di tali forze, per cui il moto dei punti soddisfa le equazioni

$$m_j \ddot{\boldsymbol{x}}_j = -\nabla_{\boldsymbol{x}_j} V(\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_N).$$

Introduciamo il **momento di inerzia** del sistema rispetto al baricentro $\boldsymbol{x}_B$:

$$I(\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_N) = \sum_{i=1}^{N} m_i |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_B|^2.$$

Dimostriamo che il momento di inerzia si può scrivere in termini delle distanze mutue tra i punti:

Proposizione 33. *Vale la seguente formula*

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_B|^2 = \frac{1}{m} \sum_{1 \le i < j \le N} m_i m_j |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|^2. \tag{5.20}$$

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} m_i m_j |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} m_i m_j (|\boldsymbol{x}_i|^2 + |\boldsymbol{x}_j|^2 - 2\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_j) = \\
= \;& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(m-m_i)|\boldsymbol{x}_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j(m-m_j)|\boldsymbol{x}_j|^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} m_i m_j(\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_j) = \\
= \;& m\sum_{i=1}^{N} m_i|\boldsymbol{x}_i|^2 - \sum_{i=1}^{N} m_i^2|\boldsymbol{x}_i|^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} m_i m_j(\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_j) = \\
= \;& m\sum_{i=1}^{N} m_i|\boldsymbol{x}_i|^2 - \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j(\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_j).
\end{aligned}
$$

Inoltre

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} m_i|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_B|^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i\Big(\boldsymbol{x}_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} m_j\boldsymbol{x}_j\Big)\cdot\Big(\boldsymbol{x}_i - \frac{1}{m}\sum_{h=1}^{N} m_h\boldsymbol{x}_h\Big) = \\
= \;& \sum_{i=1}^{N} m_i|\boldsymbol{x}_i|^2 - 2\sum_{i,j=1}^{N}\frac{m_i m_j}{m}\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_j + \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{m^2}\sum_{j,h=1}^{N} m_j m_h\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{x}_h = \\
= \;& \sum_{i=1}^{N} m_i|\boldsymbol{x}_i|^2 - \frac{2}{m}\sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j(\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_j) + \frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j(\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_j).
\end{aligned}
$$

□

Osservazione 19. *Il risultato precedente è utile per interpretare alcune questioni sul moto degli N corpi in termini del moto delle distanze mutue.*

A meno di applicare una trasformazione galileiana, possiamo assumere che il baricentro degli N punti sia fermo nell'origine: $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{0}$. Dimostriamo la seguente

Proposizione 34.

$$\ddot{I} = 4T + 2\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{x}_i$$

Dimostrazione. Basta derivare due volte $I(\boldsymbol{x}_1\dots\boldsymbol{x}_N)$ rispetto a t ed usare le equazioni di Newton:

$$\dot{I} = 2\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{x}_i\cdot\dot{\boldsymbol{x}}_i, \quad \ddot{I} = 2\sum_{i=1}^{N} m_i|\dot{\boldsymbol{x}}_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{x}_i.$$

□

Corollario 2. *(identità di Lagrange) Se le forze sono conservative e l'energia potenziale V è omogenea di grado α allora*

$$\ddot{I} = 4T - 2\sum_{i=1}^{N} \nabla_{\boldsymbol{x}_i} V \cdot \boldsymbol{x}_i = 4T - 2\alpha V = 4E - 2(\alpha + 2)V,$$

cioè $\ddot{I}$ dipende solo dalla posizione dei punti e dall'energia totale E.

5.8 Esercizi

Esercizio 13.

i) In un piano assegnato si fissi un sistema di riferimento $O\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2$ e si consideri il sistema di forze applicate

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\boldsymbol{F}}_1, P_1), \ldots, (\vec{\boldsymbol{F}}_5, P_5)\}$$

con

$$\vec{\boldsymbol{F}}_j = j\hat{\boldsymbol{e}}_2, \qquad P_j = O + j\hat{\boldsymbol{e}}_1, \qquad j = 1, \ldots, 5.$$

Trovare l'asse centrale del sistema $\mathcal{F}$.

ii) In un piano assegnato si consideri un sistema di vettori applicati paralleli

$$\mathcal{S} = \{(\vec{\boldsymbol{v}}_1, P_1), \ldots, (\vec{\boldsymbol{v}}_N, P_N)\}, \qquad N > 1.$$

Si prendano in tale piano due rette r_1, r_2 parallele e distinte, aventi la stessa direzione dei vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ del sistema $\mathcal{S}$.

Mostrare che è possibile trovare un sistema di vettori applicati equivalente ad $\mathcal{S}$ costituito da due vettori paralleli alle rette r_1, r_2 (eventualmente nulli) applicati uno a un punto di r_1 e l'altro a un punto di r_2.

Soluzione. i) Un punto Q dell'asse centrale è dato dalla formula

$$Q - O = \frac{\vec{\boldsymbol{R}} \times \vec{\boldsymbol{N}}_O}{|\vec{\boldsymbol{R}}|^2},$$

dove

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \sum_{j=1}^{5} j\hat{\boldsymbol{e}}_2 = 15\hat{\boldsymbol{e}}_2, \qquad \vec{\boldsymbol{N}}_O = \sum_{j=1}^{5} j\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times j\hat{\boldsymbol{e}}_2 = 55\hat{\boldsymbol{e}}_3.$$

Si ottiene quindi

$$Q - O = \frac{11}{3}\hat{\boldsymbol{e}}_1.$$

L'asse centrale è la retta costituita dai punti

$$Q + \lambda\vec{\boldsymbol{R}},$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Scelte in modo arbitrario due rette r_1, r_2, parallele ai vettori $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ e distinte tra loro, mostriamo che ogni sistema costituito da un solo vettore applicato $(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)$ del sistema $\mathcal{S}$ ammette un sistema equivalente composto da due vettori paralleli alle rette r_1, r_2 (possibilmente nulli), applicati uno a un punto di r_1 e l'altro a un punto di r_2.

Fissiamo un riferimento $O\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2$ nel piano assegnato in modo che $\vec{\boldsymbol{v}}_j \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{0}}$ per $j = 1, \ldots, N$. Quindi le rette r_1, r_2 sono parallele a $\hat{\boldsymbol{e}}_2$. Se $P_j \in r_1$ il sistema $\{(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j), (\vec{\boldsymbol{0}}, Q)\}$, con $Q \in r_2$ scelto arbitrariamente, soddisfa le proprietà richieste. Se $P_j \in r_2$ procedo in modo analogo.

Se invece $P_j \notin r_1 \cup r_2$ faccio la costruzione seguente. Dato $(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)$ scelgo due punti $Q_1 \in r_1, Q_2 \in r_2$ in modo che

$$(Q_1 - P_j) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 = (Q_2 - P_j) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2 \neq 0.$$

Osservo che possiamo scrivere

$$\vec{\boldsymbol{v}}_j = \vec{\boldsymbol{v}}_j^{(1)} + \vec{\boldsymbol{v}}_j^{(2)}$$

dove

$$\vec{\boldsymbol{v}}_j^{(1)} = \lambda_j^{(1)}(Q_1 - P_j), \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_j^{(2)} = \lambda_j^{(2)}(Q_2 - P_j)$$

per due coefficienti $\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)} \neq 0$. Consideriamo le scomposizioni

$$\vec{\boldsymbol{v}}_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \beta_j^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_2, \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \beta_j^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_2.$$

e osserviamo che si ha

$$\alpha_j^{(1)} = -\alpha_j^{(2)}$$

perché la componente di $\vec{\boldsymbol{v}}_j$ lungo $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ è nulla.

Usando le operazioni elementari si vede quindi che un sistema equivalente al vettore applicato $(\vec{\boldsymbol{v}}_j, P_j)$ è allora

$$\{(\beta_j^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_2, Q_1), (\beta_j^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_2, Q_2)\}.$$

Possiamo ripetere questa scomposizione per ogni vettore applicato del sistema $\mathcal{S}$ e concludiamo considerando il sistema equivalente ad $\mathcal{S}$ definito da

$$\{(\vec{\boldsymbol{v}}^{(1)}, A_1), (\vec{\boldsymbol{v}}^{(2)}, A_2)\},$$

dove

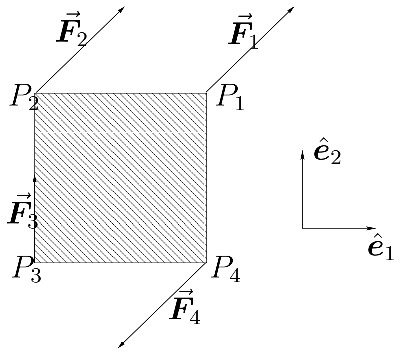
$$\vec{\boldsymbol{v}}^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j^{(1)}\hat{\boldsymbol{e}}_2, \qquad \vec{\boldsymbol{v}}^{(2)} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j^{(2)}\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

e A_1, A_2 sono rispettivamente due punti qualunque delle rette r_1, r_2.

Esercizio 14. *In un piano orizzontale si fissi un sistema di riferimento $O\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2$ e si consideri una lamina quadrata, orientata come in figura, con lati di lunghezza 2ℓ e vertici P_1, P_2, P_3, P_4. Ai vertici della lamina vengono applicate le forze*

$$\vec{\boldsymbol{F}}_1 = F(\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \hat{\boldsymbol{e}}_2), \quad \vec{\boldsymbol{F}}_2 = \vec{\boldsymbol{F}}_1, \quad \vec{\boldsymbol{F}}_3 = F\hat{\boldsymbol{e}}_2, \quad \vec{\boldsymbol{F}}_4 = -\vec{\boldsymbol{F}}_1,$$

con $F > 0$.



i) Trovare l'asse centrale del sistema

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\boldsymbol{F}}_j, P_j)\}_{j=1\ldots4}.$$

e dire se esso interseca la lamina.

ii) È possibile aggiungere una forza $\vec{\boldsymbol{F}}_5$ applicata ad un punto P_5 della lamina in modo tale che il sistema di forze applicate esteso

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{(\vec{\boldsymbol{F}}_j, P_j)\}_{j=1\ldots5}$$

sia equilibrato?

Soluzione. i) La risultante delle forze è

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \sum_{j=1}^{4} \vec{\boldsymbol{F}}_j = F(\hat{\boldsymbol{e}}_1 + 2\hat{\boldsymbol{e}}_2) \tag{5.21}$$

ed il momento risultante delle forze rispetto al polo P_3 è

$$\vec{\boldsymbol{N}}_{P_3} = \sum_{j=1}^{4}(P_j - P_3) \times \vec{\boldsymbol{F}}_j = -4\ell F\hat{\boldsymbol{e}}_3.$$

Il punto Q_0 dell'asse centrale che si trova sulla retta passante per P_3 e ortogonale ad $\vec{\boldsymbol{R}}$ è dato da

$$Q_0 - P_3 = \frac{\vec{\boldsymbol{R}} \times \vec{\boldsymbol{N}}_{P_3}}{|\vec{\boldsymbol{R}}|^2} = -\frac{4}{5}\ell(2\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \hat{\boldsymbol{e}}_2).$$

L'asse centrale è la retta passante per Q_0 e parallela ad $\vec{\boldsymbol{R}}$.

Dette x, y le coordinate cartesiane nel riferimento $P_3\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2$, l'equazione dell'asse centrale si scrive

$$y - \frac{4}{5}\ell = 2(x + \frac{8}{5}\ell),$$

cioè

$$y = 2x + 4\ell. \tag{5.22}$$

Osservo che l'asse centrale non interseca la lamina, in quanto la funzione $y(x)$ definita da (5.22) è crescente e per $x = 0$, che è l'ascissa di P_2, si ha $y(0) = 4\ell > 2\ell$, che è l'ordinata di P_2.

ii) Imponiamo le condizioni per avere un sistema equilibrato:

$$\sum_{j=1}^{5} \vec{\boldsymbol{F}}_j = \vec{\boldsymbol{0}}, \qquad \sum_{j=1}^{5} (P_j - Q) \times \vec{\boldsymbol{F}}_j = \vec{\boldsymbol{0}}$$

per una scelta qualunque del polo $Q \in \mathbb{E}^3$. Osservo che queste si possono scrivere come

$$\vec{\boldsymbol{R}} + \vec{\boldsymbol{F}}_5 = \vec{\boldsymbol{0}}, \qquad \vec{\boldsymbol{N}}_Q + (P_5 - Q) \times \vec{\boldsymbol{F}}_5 = \vec{\boldsymbol{0}},$$

dove $\vec{\boldsymbol{R}}$ è data da (5.21) ed

$$\vec{\boldsymbol{N}}_Q = \sum_{j=1}^{4} (P_j - Q) \times \vec{\boldsymbol{F}}_j.$$

Si ottiene che

$$\vec{\boldsymbol{F}}_5 = -\vec{\boldsymbol{R}}.$$

Inoltre, i punti Q dove $\vec{\boldsymbol{N}}_Q = \vec{\boldsymbol{0}}$ sono tutti e soli i punti dell'asse centrale del sistema $\mathcal{F}$, poichè il trinomio invariante $\vec{\boldsymbol{N}}_Q \cdot \vec{\boldsymbol{R}}$ è nullo. Per cui si ha

$$(P_5 - Q) \times \vec{\boldsymbol{F}}_5 = -(P_5 - Q) \times \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{0}}. \tag{5.23}$$

La relazione (5.23) ci dice che la forza $\vec{\boldsymbol{F}}_5$ deve essere applicata ad un punto P_5 dell'asse centrale del sistema $\mathcal{F}$. Abbiamo già visto nel punto i) che tale asse non interseca la lamina.