Capitolo 4

Sistemi di riferimento in moto relativo

Mostriamo come cambiano la velocità e l'accelerazione di un punto materiale rispetto a sistemi di riferimento diversi, in moto relativo tra loro. A tal fine introduciamo il vettore velocità angolare e le sue proprietà.

4.1 Velocità angolare e formule di Poisson

Consideriamo due sistemi di riferimento

$$\Sigma = O\,\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3 \qquad \Sigma' = O'\hat{\boldsymbol{e}}'_1\hat{\boldsymbol{e}}'_2\hat{\boldsymbol{e}}'_3$$

nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$. Le terne di vettori $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$ e $\{\hat{\boldsymbol{e}}'_1, \hat{\boldsymbol{e}}'_2, \hat{\boldsymbol{e}}'_3\}$ dei sistemi di riferimento formano due basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dello spazio vettoriale $\mathbb{V}^3$ associato ad $\mathbb{E}^3$. Pertanto, dato un vettore $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{V}^3$, esistono uniche le rappresentazioni in tali basi

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \sum_{h=1}^{3} u_h\,\hat{\boldsymbol{e}}_h = \sum_{h=1}^{3} u'_h\,\hat{\boldsymbol{e}}'_h.$$

Data una mappa vettoriale

$$t \mapsto \vec{\boldsymbol{u}}(t) \in \mathbb{V}^3,$$

definita in $\mathbb{R}$ o in un suo intervallo, se i coefficienti u_h, u'_h di $\vec{\boldsymbol{u}}$ nelle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sono derivabili rispetto al tempo, definiamo le derivate temporali di $\vec{\mathbf{u}}$ nei sistemi di riferimento Σ e Σ' come

$$\left.\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt}\right|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^{3} \dot{u}_h\,\hat{\boldsymbol{e}}_h, \qquad \left.\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} = \sum_{h=1}^{3} \dot{u}'_h\,\hat{\boldsymbol{e}}'_h.$$

Proposizione 15. *Se le coordinate di* $\hat{\boldsymbol{e}}'_h$ *in* Σ *sono funzioni derivabili del tempo* t *allora esiste un'unica mappa* $t \mapsto \vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \in \mathbb{V}^3$, *tale che*

$$\left.\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}'_h}{dt}\right|_{\Sigma} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{e}}'_h, \qquad h = 1, 2, 3. \tag{4.1}$$

Le relazioni (4.1) si chiamano **formule di Poisson** *e il vettore* $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t)$ *si dice* **velocità angolare** *di* Σ' *rispetto a* Σ *al tempo* t.

Dimostrazione. Consideriamo la matrice R di cambiamento di base da $\mathcal{B}' = \{\hat{\boldsymbol{e}}'_1, \hat{\boldsymbol{e}}'_2, \hat{\boldsymbol{e}}'_3\}$ a $\mathcal{B} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$, con componenti $R_{ji} = \hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j,\ i, j = 1, 2, 3$. Poichè

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}'_j = \delta_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq 3,$$

la matrice $R = (R_{jh})$ è ortogonale, cioè soddisfa la relazione

$$RR^T = I = R^T R.$$

Inoltre le terne che formano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono entrambe levogire, per cui $\det R = 1$, cioè

$$R \in SO(3).$$

Siano inoltre $\boldsymbol{e}_h \in \mathbb{R}^3$ i vettori della base canonica, che rappresentano $\hat{\boldsymbol{e}}_h$ nella base $\mathcal{B}$ ed $\boldsymbol{e}'_h \in \mathbb{R}^3$ i vettori delle componenti di $\hat{\boldsymbol{e}}'_h$ in $\mathcal{B}$. Valgono le relazioni $\boldsymbol{e}'_h = R\boldsymbol{e}_h$, $j = 1, 2, 3$. Il vettore

$$\left.\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}'_h}{dt}\right|_{\Sigma}$$

è rappresentato da $\dot{\boldsymbol{e}}'_h \in \mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}$. Dalla relazione $R^T R = I$ si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{e}}'_h = \dot{R}R^T R\boldsymbol{e}_h = \dot{R}R^T \boldsymbol{e}'_h.$$

La matrice $\dot{R}R^T$ è antisimmetrica, infatti derivando $RR^T = I$ rispetto a t si ottiene

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = \dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T = 0.$$

Data una matrice antisimmetrica A, esiste un unico vettore $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3. \tag{4.2}$$

La relazione tra le componenti di A e quelle di $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ è la seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Concludo che esiste un unico vettore $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$, associato alla matrice $\dot{R}R^T$, tale che

$$\dot{\boldsymbol{e}}'_h = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}'_h, \qquad h = 1, 2, 3.$$

Il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{h=1}^{3} \omega_h \hat{\boldsymbol{e}}_h \in \mathbb{V}^3$, rappresentato da $\boldsymbol{\omega}$ in $\mathcal{B}$, soddisfa la (4.1). Infatti se $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ rappresentano $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ in $\mathcal{B}$, allora $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ è rappresentato da $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \sum_{i=1}^{3} a_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \times \sum_{j=1}^{3} b_j \hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \hat{\boldsymbol{e}}_i \times \hat{\boldsymbol{e}}_j = \\ \sum_{1 \le i < j \le 3} (a_i b_j - a_j b_i) \hat{\boldsymbol{e}}_i \times \hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_{h=1}^{3} (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_h \hat{\boldsymbol{e}}_h. \end{aligned} \tag{4.3}$$

L'unicità di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ si dimostra per assurdo. Se esistessero $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1, \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$ che soddisfano le (4.1), allora si avrebbe $(\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 - \vec{\boldsymbol{\omega}}_2) \times \hat{\boldsymbol{e}}'_h = \vec{\boldsymbol{0}}$ per $h = 1, 2, 3$. Quindi $\vec{\boldsymbol{\omega}}_1 = \vec{\boldsymbol{\omega}}_2$.

□

Esercizio 10. *Per ogni $\vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{V}^3$ l'applicazione lineare*

$$\mathbb{V}^3 \ni \vec{\boldsymbol{u}} \mapsto \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{V}^3$$

ha un nucleo di dimensione dispari.

Suggerimento: scrivere la matrice corrispondente a questa applicazione in una base di cui $\vec{\boldsymbol{a}}$ è un elemento.

Proposizione 16. *Una formula esplicita per la velocità angolare è data da*

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{3} \hat{\boldsymbol{e}}'_h \times \left. \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}'_h}{dt} \right|_{\Sigma} \tag{4.4}$$

Dimostrazione. Usando le formule di Poisson (4.1) si ha

$$\sum_{h=1}^{3} \hat{\boldsymbol{e}}'_h \times \left. \frac{d\hat{\boldsymbol{e}}'_h}{dt} \right|_{\Sigma} = \sum_{h=1}^{3} \hat{\boldsymbol{e}}'_h \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{e}}'_h) = \sum_{h=1}^{3} [\vec{\boldsymbol{\omega}} - (\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}'_h) \hat{\boldsymbol{e}}'_h] = 2\vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

□

Esempio 2. Siano $\Sigma = O\, \hat{\boldsymbol{e}}_1 \hat{\boldsymbol{e}}_2 \hat{\boldsymbol{e}}_3$, $\Sigma' = O \hat{\boldsymbol{e}}'_1 \hat{\boldsymbol{e}}'_2 \hat{\boldsymbol{e}}'_3$ due sistemi di riferimento con la stessa origine O. Assumiamo che Σ' ruoti attorno all'asse $O\hat{\boldsymbol{e}}_3$ di Σ in modo che i vettori $\hat{\boldsymbol{e}}'_1$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ formino un angolo $\theta(t)$. Calcoliamo la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ.
Abbiamo che

$$\hat{\boldsymbol{e}}'_1 = \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_2, \quad \hat{\boldsymbol{e}}'_2 = -\sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_1 + \cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_2, \quad \hat{\boldsymbol{e}}'_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_3. \tag{4.5}$$

Derivando le (4.5) rispetto a t ed applicando (4.4) si ottiene che

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{e}}_3.$$

4.1.1 Derivata temporale di un vettore in riferimenti diversi

Mostriamo la relazione tra le derivate temporali di una stessa mappa vettoriale eseguite in due riferimenti diversi.

Proposizione 17. *Data una mappa vettoriale $t \mapsto \vec{\boldsymbol{u}}(t) \in \mathbb{V}^3$, definita in $\mathbb{R}$ o in un suo intervallo e derivabile in due riferimenti Σ, Σ', vale la relazione*

$$\left.\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{u}}. \tag{4.6}$$

* *Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che, poiché $\hat{\boldsymbol{e}}'_i = \sum_j R_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j$,

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \sum_i u'_i \hat{\boldsymbol{e}}'_i = \sum_i u'_i \sum_j R_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_j \Big(\sum_i u'_i R_{ji}\Big)\hat{\boldsymbol{e}}_j,$$

dove le somme su i e j si intendono da 1 a 3. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt}\right|_{\Sigma} &= \sum_j \frac{d}{dt}\Big(\sum_i u'_i R_{ji}\Big)\hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_j\sum_i\Big(\dot{u}'_i R_{ji} + u'_i \dot{R}_{ji}\Big)\hat{\boldsymbol{e}}_j = \\
&= \sum_i \dot{u}'_i\Big(\sum_j R_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j\Big) + \sum_i u'_i \sum_j \dot{R}_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}_j = \left.\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \sum_i u'_i \left.\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}'_i}{dt}\right|_{\Sigma} = \\
&= \left.\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \sum_i u'_i \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{e}}'_i = \left.\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{u}}.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 11. *Dalla (4.6) segue che la derivata temporale di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ in Σ ed in Σ' coincidono. Per questo motivo in seguito scriveremo anche $\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}}$ al posto di $\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}\big|_{\Sigma}$ e di $\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}\big|_{\Sigma'}$.*

Se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ rappresentano le coordinate del vettore $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{V}^3$ nelle basi $\mathcal{B} = \{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$, $\mathcal{B}' = \{\hat{\boldsymbol{e}}'_1, \hat{\boldsymbol{e}}'_2, \hat{\boldsymbol{e}}'_3\}$ rispettivamente, possiamo scrivere

$$\dot{\boldsymbol{u}} = R\dot{\boldsymbol{u}}' + \boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{u}',$$

dove $R \in SO(3)$, $R\boldsymbol{e}_h = \boldsymbol{e}'_h$.

* vedere la dimostrazione alternativa riportata in fondo a questo pdf

4.1.2 Composizione di velocità angolari

Consideriamo tre sistemi di riferimento in $\mathbb{E}^3$:

$$\Sigma = O\,\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3, \qquad \Sigma' = O'\hat{\boldsymbol{e}}'_1\hat{\boldsymbol{e}}'_2\hat{\boldsymbol{e}}'_3, \qquad \Sigma'' = O''\hat{\boldsymbol{e}}''_1\hat{\boldsymbol{e}}''_2\hat{\boldsymbol{e}}''_3.$$

Proposizione 18. *Se $\vec{\boldsymbol{\omega}}'$ è la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ e se $\vec{\boldsymbol{\omega}}''$ è la velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ', allora la velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ di Σ'' rispetto a Σ è data dalla somma $\vec{\boldsymbol{\omega}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}}''$.*

Dimostrazione. Usando la (4.6) e le formule di Poisson si ha, per $h = 1, 2, 3$,

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{e}}''_h = \left.\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}''_h}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{d\hat{\boldsymbol{e}}''_h}{dt}\right|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}}' \times \hat{\boldsymbol{e}}''_h = (\vec{\boldsymbol{\omega}}'' + \vec{\boldsymbol{\omega}}') \times \hat{\boldsymbol{e}}''_h.$$

Si conclude usando l'unicità della velocità angolare.

□

4.2 Equazione del moto in riferimenti diversi

Scriviamo le formule che legano la velocità $\vec{\boldsymbol{v}}$ e l'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}$ di un punto materiale P in un sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3$ alla velocità $\vec{\boldsymbol{v}}'$ e all'accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}'$ relative ad un altro riferimento $\Sigma' = O'\hat{\boldsymbol{e}}'_1\hat{\boldsymbol{e}}'_2\hat{\boldsymbol{e}}'_3$, in moto con velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ rispetto a Σ.

Proposizione 19. *Valgono le relazioni*

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{v}} &= \vec{\boldsymbol{v}}' + \vec{\boldsymbol{v}}^T, && (4.7)\\ \vec{\boldsymbol{a}} &= \vec{\boldsymbol{a}}' + \vec{\boldsymbol{a}}^T + \vec{\boldsymbol{a}}^C, && (4.8) \end{aligned}$$

in cui

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{v}}^T &= \vec{\boldsymbol{v}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O'),\\ \vec{\boldsymbol{a}}^T &= \vec{\boldsymbol{a}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')) + \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times (P - O'),\\ \vec{\boldsymbol{a}}^C &= 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}' \end{aligned}$$

dove $\vec{\boldsymbol{v}}_{O'}$, $\vec{\boldsymbol{a}}_{O'}$ sono la velocità e l'accelerazione di O' in Σ.

Dimostrazione. Per ricavare le formule precedenti scriviamo

$$P - O = (P - O') + (O' - O).$$

Derivando rispetto a t in Σ e usando la (4.6) si ha

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{v}} &= \frac{d(P-O')}{dt}\Big|_{\Sigma} + \frac{d(O'-O)}{dt}\Big|_{\Sigma} = \frac{d(P-O')}{dt}\Big|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P-O') + \vec{\boldsymbol{v}}_{O'} \\ &= \vec{\boldsymbol{v}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P-O') + \vec{\boldsymbol{v}}_{O'},\end{aligned}$$

che corrisponde alla (4.7). Derivando ancora e usando la (4.6) si ottiene[1]

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}'}{dt}\Big|_{\Sigma'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}' + \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times (P-O') + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P-O')) + \vec{\boldsymbol{a}}_{O'},$$

da cui segue la (4.8). □

I termini $\vec{\boldsymbol{a}}^T$ e $\vec{\boldsymbol{a}}^C$ si chiamano rispettivamente **accelerazione di trascinamento** e **accelerazione di Coriolis**. Il termine $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P-O'))$ si chiama **accelerazione centripeta**. In coordinate nella base $\mathcal{B}$ abbiamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= R\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}_{O'}, \\ \dot{\boldsymbol{x}} &= R\dot{\boldsymbol{x}}' + \dot{\boldsymbol{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{x}', \\ \ddot{\boldsymbol{x}} &= R\ddot{\boldsymbol{x}}' + \ddot{\boldsymbol{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times R\boldsymbol{x}' + 2\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{x}}'\end{aligned}$$

in cui $\boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', x_3')$ è il vettore delle coordinate di $(P-O')$ in $\mathcal{B}'$.

Se l'equazione del moto di un punto materiale P di massa m in un riferimento $O\,\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3$ si scrive

$$m\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{F}}(P-O, \vec{\boldsymbol{v}}, t),$$

allora nel riferimento $O'\hat{\boldsymbol{e}}_1'\hat{\boldsymbol{e}}_2'\hat{\boldsymbol{e}}_3'$ possiamo scrivere

$$m\vec{\boldsymbol{a}}' = \vec{\boldsymbol{F}}((P-O') + (O'-O), \vec{\boldsymbol{v}}' + \vec{\boldsymbol{v}}^T, t) - m\vec{\boldsymbol{a}}^T - m\vec{\boldsymbol{a}}^C.$$

In coordinate nella base $\mathcal{B}$ l'ultima equazione diventa

$$\begin{aligned}mR\ddot{\boldsymbol{x}}' = {}&\mathbf{F}(R\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}_{O'}, R\dot{\boldsymbol{x}}' + \dot{\boldsymbol{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{x}', t) \\ &- m\big(\ddot{\boldsymbol{x}}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{x}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times R\boldsymbol{x}'\big) - 2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{x}}'.\end{aligned}$$

4.3 Deviazione dei gravi in caduta libera

Si consideri un sistema di riferimento $\Sigma = Oxyz$, avente per origine il centro della Terra. Studiamo il moto di un punto materiale P in un sistema di riferimento solidale alla Terra, assumendo che questa abbia forma sferica e che ruoti attorno all'asse Oz con velocità angolare $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ costante. In prima approssimazione la forza di

[1] usiamo la relazione $\frac{d}{dt}(\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}})\big|_{\Sigma} = \frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{u}}\big|_{\Sigma} \times \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{u}} \times \frac{d}{dt}\vec{\boldsymbol{v}}\big|_{\Sigma}$, che segue dalla (4.3).

attrazione gravitazionale esercitata dal Sole sul punto materiale è bilanciata dalla forza centrifuga del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole.

Dato un sistema di riferimento $\Sigma' = O'\xi\eta\zeta$ solidale alla Terra, l'accelerazione relativa è data da

$$\vec{\boldsymbol{a}}' = \vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{a}}^T - \vec{\boldsymbol{a}}^C,$$

dove

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{g}}, \qquad \vec{\boldsymbol{a}}^T = \vec{\boldsymbol{a}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')), \qquad \vec{\boldsymbol{a}}^C = 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}',$$

con $\vec{\boldsymbol{g}}$ costante in Σ'. Inoltre

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{O'} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (O' - O)), \tag{4.9}$$

infatti O, O' sono fissi in Σ', per cui (4.9) segue applicando la formula (4.6) nel calcolo della derivata prima e seconda di $O' - O$ rispetto a t in Σ, e tenendo conto che $O' - O$ è costante in Σ', oppure da

$$\vec{\boldsymbol{a}}_O = \vec{\boldsymbol{a}}'_O + \vec{\boldsymbol{a}}_{O'} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times [\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (O - O')] + 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}'_O$$

e da $\vec{\boldsymbol{a}}_O = \vec{\boldsymbol{a}}'_O = \vec{\boldsymbol{v}}'_O = \vec{\boldsymbol{0}}$. Siccome $P - O'$ è molto più piccolo di $O' - O$ posso trascurare il termine $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O'))$ quindi

$$\vec{\boldsymbol{a}}' = \vec{\boldsymbol{g}} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (O' - O)) - 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}'.$$

Poniamo

$$\vec{\boldsymbol{g}}_{O'} = \vec{\boldsymbol{g}} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (O' - O)),$$

che è l'accelerazione di gravità locale, dipendente dalla latitudine. Possiamo orientare il riferimento Σ' nel modo seguente: scelgo l'asse $O'\zeta$ lungo la direzione della gravità locale, l'asse $O'\xi$ parallelo al piano del meridiano, diretto verso l'equatore, e l'asse $O'\eta$ in modo tale che i versori di $O'\xi\eta\zeta$ formino una terna levogira, vedi Figura 4.1. Approssimiamo la gravità locale con $\vec{\boldsymbol{g}}$, trascurando[2] il termine $-\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (O' - O))$. Con queste approssimazioni l'equazione del moto per il punto P in Σ' diventa quindi

$$\frac{d^2}{dt^2}(P - O')|_{\Sigma'} = \vec{\boldsymbol{g}} - 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{v}}'. \tag{4.10}$$

Indicando con λ la latitudine di O' e usando le coordinate ξ, η, ζ, l'equazione (4.10) si scrive

$$\ddot{\xi} = 2\omega \sin\lambda \dot{\eta}, \quad \ddot{\eta} = -2\omega \sin\lambda \dot{\xi} - 2\omega \cos\lambda \dot{\zeta}, \quad \ddot{\zeta} = -g + 2\omega \cos\lambda \dot{\eta}, \tag{4.11}$$

[2]Osserviamo che la norma della velocità angolare del moto di rotazione della Terra è $\omega = \frac{2\pi}{86400}\mathrm{s}^{-1}$ e la misura del raggio equatoriale della Terra è $R_\oplus \approx 6378$ Km. Stimiamo la norma del termine trascurato con $\omega^2 R_\oplus \approx 0.03373$ ms^{-2}, che è più piccolo di due ordini di grandezza del valore della accelerazione di gravità $g \approx 9.81$ ms^{-2}.

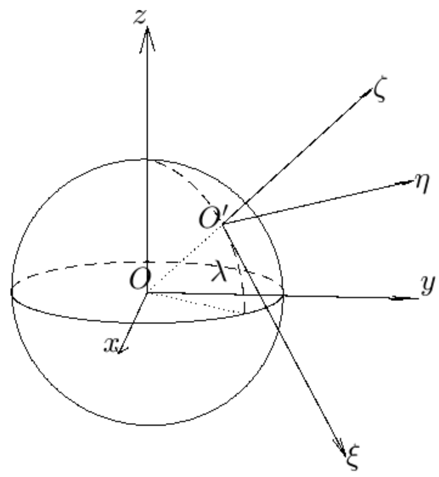

Figura 4.1: Il riferimento $O'\xi\eta\zeta$ in cui si studia il moto del grave.

infatti

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega(-\cos\lambda\hat{\boldsymbol{e}}_\xi + \sin\lambda\hat{\boldsymbol{e}}_\zeta),$$

dove $\hat{\boldsymbol{e}}_\xi, \hat{\boldsymbol{e}}_\zeta$ sono i versori degli assi $O'\xi, O'\zeta$.

Considero per queste equazioni le condizioni iniziali

$$\xi(0) = \eta(0) = \zeta(0) = \dot{\xi}(0) = \dot{\eta}(0) = \dot{\zeta}(0) = 0. \tag{4.12}$$

La soluzione del problema di Cauchy lineare dato da (4.11), (4.12) si potrebbe scrivere esplicitamente. Comunque possiamo semplificare i conti facendo un'ulteriore approssimazione. Integrando rispetto al tempo la prima e la terza equazione in (4.11) e sostituendo le risultanti espressioni di $\dot{\xi}, \dot{\zeta}$ nella seconda si ottiene

$$\ddot{\eta} = -4\omega^2\eta + 2g\omega t\cos\lambda.$$

Trascurando il termine con ω^2 e integrando si ottiene

$$\eta(t) = \frac{1}{3}g\omega t^3\cos\lambda.$$

Questa formula ci dice che un grave in caduta libera sulla Terra è soggetto a deviazione verso Est.

Prop. 17

Data una mappa vettoriale $t \to \vec{u}(t) \in \mathbb{V}^3$, definita in $\mathbb{R}$ o in un suo intervallo e derivabile in due riferimenti Σ e Σ', vale la relazione

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

Dim

Scriviamo $\vec{u} = \sum_{h=1}^{3} u_h \hat{e}_h$

$$\vec{u} = \sum_{h=1}^{3} u'_h \hat{e}'_h$$

Usiamo di seguito questa seconda espressione

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{d}{dt}\left(\sum_{h=1}^{3} u'_h \hat{e}'_h\right)\right|_{\Sigma} =$$

$$\underbrace{\sum_{h=1}^{3} (\dot{u}'_h)\, \hat{e}'_h}_{= \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\Sigma'}} + \sum_{h=1}^{3} u'_h \underbrace{\left(\left.\frac{d\hat{e}'_h}{dt}\right|_{\Sigma}\right)}_{= \vec{\omega} \times \hat{e}'_h} =$$

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\Sigma'} + \underbrace{\sum_{k=1}^{3} \vec{\omega} \times u'_k \, \hat{e}'_k}_{= \vec{\omega} \times \vec{u}}$$