

# Capitolo 3

## Moti centrali

Descriviamo le proprietà delle forze centrali a simmetria sferica e mostriamo come queste diano luogo a problemi integrabili. Trattiamo inoltre in dettaglio il caso particolare del problema di Keplero.

**Definizione 5.** Si dice che  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un **campo di forze centrale** con centro  $O$  se per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  vale la relazione

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad (3.1)$$

dove  $\rho = |\mathbf{x}|$  ed  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$ .

**Proposizione 11.** Un campo di forze  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è centrale se e solo se

$$\mathbf{F}(R\mathbf{x}) = R\mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \forall R \in SO(3). \quad (3.2)$$

*Dimostrazione.* Se  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  è della forma (3.1) allora si verifica facilmente che vale (3.2), in quanto si ha  $|R\mathbf{x}| = |\mathbf{x}| = \rho$  per ogni  $R \in SO(3)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Assumiamo adesso che valga (3.2). Mostriamo prima che  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , scelta arbitrariamente una rotazione  $R_{\mathbf{x}} \in SO(3)$  con  $R_{\mathbf{x}}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ , dalla (3.2) si ottiene

$$R_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(R_{\mathbf{x}}\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

cioè ogni rotazione che lascia fisso il vettore posizione  $\mathbf{x}$  lascia fissa anche la forza  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ . Ma ogni rotazione in  $\mathbb{R}^3$  diversa dall'identità lascia fissi solo i vettori di uno spazio lineare unidimensionale (che è appunto l'asse di rotazione). Si ha quindi

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Per dimostrare che  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}$  per una qualche funzione  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè che il campo di forze è a simmetria sferica, scegliamo arbitrariamente  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  tali

che  $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$ , che rappresentano le coordinate di due punti sulla stessa superficie sferica centrata nell'origine, e dimostriamo che

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y}. \quad (3.3)$$

Scelta  $R \in SO(3)$  tale che  $R\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , e usando (3.2) si ha

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F}(R\mathbf{x}) \cdot R\mathbf{x} = R\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot R\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}.$$

Dalla (3.3) segue che l'intensità della forza  $\mathbf{F}$  è la stessa in tutti i punti della sfera di raggio  $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$ . □

Osserviamo che in questo caso le equazioni di Newton  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  sono invarianti solo rispetto ad alcune trasformazioni di Galileo, quelle del tipo  $g_3$ , ma non lo sono rispetto alle traslazioni dell'origine, che corrisponde al centro di forza.

### 3.1 Integrabilità dei moti centrali

Consideriamo il moto di un punto materiale di massa  $m$  in un campo di forze centrali  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}$ . Dalla relazione

$$\dot{\mathbf{M}}_O = \mathbf{N}_O = \mathbf{x} \times f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho} = \mathbf{0}$$

abbiamo la conservazione del momento angolare  $\mathbf{M}_O$  rispetto al centro di forze  $O$ . Inoltre la forza  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  è conservativa, con energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\rho(\mathbf{x})), \quad \mathcal{V}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho, \quad (3.4)$$

infatti

$$\nabla V(\mathbf{x}) = \frac{d\mathcal{V}}{d\rho}(\rho(\mathbf{x}))\nabla\rho(\mathbf{x}) = -f(\rho(\mathbf{x}))\frac{\mathbf{x}}{\rho(\mathbf{x})},$$

per cui si conserva l'energia totale  $E = T + V$ .

Ricordiamo che un sistema meccanico si dice integrabile secondo Liouville se per ogni scelta delle condizioni iniziali possiamo scrivere la soluzione delle equazioni di Newton a meno di inversioni e quadrature.

**Proposizione 12.** *Il sistema dato da un punto materiale che si muove in un campo di forze centrali è integrabile.*

Trattiamo prima il caso particolare in cui  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$  e mostriamo che in questo caso il moto si svolge su una retta passante per  $O$ . Poiché  $\mathbf{M}_O = m\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ , possiamo trovare un vettore unitario  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  con<sup>1</sup>

$$\mathbf{x}(0) = \rho_0 \mathbf{e}, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\rho}_0 \mathbf{e}.$$

Se  $t \mapsto \rho(t)$  è la soluzione del problema di Cauchy unidimensionale

$$m\ddot{\rho} = f(\rho), \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0, \quad (3.5)$$

che si può scrivere a meno di inversioni e quadrature, allora

$$t \mapsto \mathbf{x}(t) = \rho(t) \mathbf{e}$$

è la soluzione di  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , con dati iniziali  $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)$ , e il moto è quindi rettilineo, su una retta passante per  $O$ .

Osserviamo che vale anche il viceversa: se il moto avviene lungo una retta passante per  $O$  allora  $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)$  sono sempre paralleli, quindi  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ .

Il problema di Cauchy (3.5) può essere scritto nella forma (2.10) con

$$V(x) = - \int f(x) dx$$

ed è quindi integrabile secondo Liouville per la Proposizione 8.

Assumiamo adesso che  $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$ . Possiamo usare la conservazione del momento angolare  $\mathbf{M}_O$  per ridurci ad un problema unidimensionale. L'invarianza della direzione di  $\mathbf{M}_O$  implica che il moto si svolge su un piano fisso  $\pi_O$  che dipende dalle condizioni iniziali: infatti la relazione

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \times m\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = 0$$

ci dice che il vettore  $\mathbf{x}$  è sempre ortogonale a  $\mathbf{M}_O$ . Possiamo quindi ruotare il sistema di riferimento  $O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_3$  introdotto, in funzione delle condizioni iniziali, facendo in modo che  $\mathbf{e}_3 \parallel \mathbf{M}_O$ . Con questa rotazione il moto si svolge quindi nel piano  $\pi_O = O \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2$ . Introduciamo in questo piano delle coordinate polari  $\rho, \theta$ , definite da

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\mathbf{x}}{\rho} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2.$$

Consideriamo anche il vettore

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_\rho = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$$

---

<sup>1</sup>possiamo scegliere il verso di  $\mathbf{e}$  in modo tale che  $\rho_0 > 0$ .

ed osserviamo che valgono le relazioni

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_\rho.$$

Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{x} = \rho \mathbf{e}_\rho, \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\theta} \rho \mathbf{e}_\theta, \quad \ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta.$$

L'equazione di Newton, proiettata lungo  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta$ , ci dà

$$m \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = f(\rho), \quad m \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\theta = 0. \quad (3.6)$$

La seconda equazione in (3.6) rappresenta la conservazione della terza componente del momento angolare

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3 = \rho \mathbf{e}_\rho \times m(\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) \cdot \mathbf{e}_3 = m \rho^2 \dot{\theta},$$

infatti

$$m(\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (m \rho^2 \dot{\theta}).$$

Fissiamo un valore  $c \neq 0$  di tale quantità:

$$m \rho^2 \dot{\theta} = c. \quad (3.7)$$

Sostituendo  $\dot{\theta} = \frac{c}{m \rho^2}$  nella prima equazione in (3.6) si ottiene

$$m \ddot{\rho} = f(\rho) + \frac{c^2}{m \rho^3}, \quad (3.8)$$

che è un problema unidimensionale. Possiamo scrivere (3.8) nella forma

$$m \ddot{\rho} = -\frac{d}{d\rho} \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho), \quad (3.9)$$

con

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho) = \mathcal{V}(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

La funzione  $\mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}$  si dice energia potenziale efficace. Il sistema (3.9) ha l'integrale primo

$$\mathcal{E}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \mathcal{V}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho),$$

che corrisponde all'energia totale  $E = T + V$  (che non dipende da  $\theta$ ) se scriviamo  $\dot{\theta}$  come funzione di  $\rho, \dot{\rho}, c$  tramite la relazione (3.7):

$$E|_{\dot{\theta}=\frac{c}{m\rho^2}} = \left[ \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + \mathcal{V}(\rho) \right] \Big|_{\dot{\theta}=\frac{c}{m\rho^2}} = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{2m\rho^2} + \mathcal{V}(\rho) = \mathcal{E}_{\text{eff}}^{(c)}(\rho, \dot{\rho}).$$

Di seguito scriveremo semplicemente  $\mathcal{V}_{\text{eff}}, \mathcal{E}_{\text{eff}}$ , evitando di sottolineare la dipendenza da  $c$  di tali funzioni.

## 3.2 Legge delle aree

Dalla conservazione del momento angolare si ha che, se  $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$ ,  $\theta$  è monotona, quindi può essere utilizzata come variabile indipendente per descrivere la traiettoria. Infatti se  $c \neq 0$ , allora  $\dot{\theta} = \frac{c}{m\rho^2}$  ha lo stesso segno di  $c$ .

Sia  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\theta; \theta_0)$  l'insieme descritto dal raggio vettore quando l'angolo polare passa dal valore  $\theta_0$  a  $\theta$ . L'area di questo insieme è

$$a(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \int_0^{\rho(\theta')} \rho' d\rho' d\theta' = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \rho^2(\theta') d\theta',$$

per cui, posto  $\tilde{a}(t) = a(\theta(t))$ , si ha

$$\frac{d\tilde{a}}{dt} = \frac{da}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} = \frac{c}{2m},$$

quindi la conservazione della terza componente del momento angolare

$$\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_3 = m\rho^2 \dot{\theta}$$

corrisponde alla conservazione della velocità areolare, detta anche **legge delle aree**.

## 3.3 Formula di Binet

Consideriamo un punto materiale che si muove in un piano in cui mettiamo coordinate polari  $(\rho, \theta)$ . Assumiamo che valga la legge delle aree:

$$\frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} = \alpha,$$

con  $\alpha \neq 0$ . Queste ipotesi valgono in particolare nel caso dei moti centrali. Allora la componente radiale dell'accelerazione è

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \right). \quad (3.10)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{d\rho}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{2\alpha}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} = -2\alpha \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho} \right), \\ \ddot{\rho} &= \frac{d\dot{\rho}}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right), \end{aligned}$$

per cui, usando la relazione  $\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$  si ottiene (3.10), che si chiama **formula di Binet**.

### 3.4 Traiettoria del moto

Fissate le condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)$ , per determinare il comportamento qualitativo della traiettoria nel piano del moto, con coordinate polari  $(\rho, \theta)$ , si utilizzano le leggi di conservazione

$$m\rho^2\dot{\theta} = c, \quad \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = E, \quad (3.11)$$

in cui  $c, E$  sono i valori delle quantità conservate al tempo iniziale  $t = 0$ .

Se  $c = 0$  abbiamo già visto nella Proposizione 12 che la traiettoria è rettilinea. Se  $c \neq 0$  allora possiamo descrivere la traiettoria attraverso una mappa  $\theta \mapsto \rho(\theta)$ . Dalle (3.11) si ottiene

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{m\rho^2}{|c|} \sqrt{\frac{2}{m}(E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho))}. \quad (3.12)$$

Consideriamo il caso seguente in cui la traiettoria è limitata. Siano  $\rho_{\min}, \rho_{\max}$  due punti di inversione consecutivi ( $\rho_{\min} < \rho_{\max}$ ) che corrispondono a un valore regolare  $E$  dell'energia, tali che il moto si svolge all'interno dell'intervallo  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho_{\min}) &= E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho_{\max}) = 0, \\ E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) &> 0 \text{ se } \rho \in (\rho_{\min}, \rho_{\max}), \\ \mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho_{\min}) &< 0 < \mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho_{\max}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

In questo caso, nello spazio delle fasi ridotto con coordinate  $(\rho, \dot{\rho})$  abbiamo un'orbita periodica di periodo

$$T_\rho = \sqrt{2m} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{1}{\sqrt{E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho)}} d\rho.$$

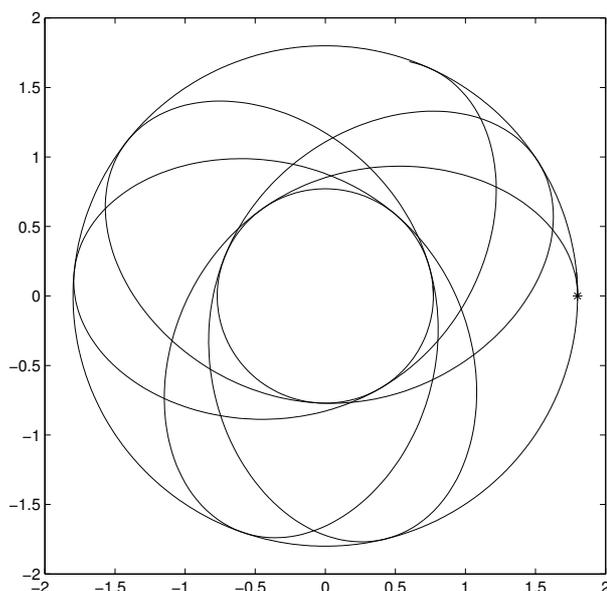
Nel piano del moto genericamente si ottiene una traiettoria a forma di rosetta (vedi figura), infatti dalla conservazione del momento angolare si ha che  $t \mapsto \theta(t)$  è monotona. Inoltre  $\rho$  oscilla periodicamente tra il valore massimo  $\rho_{\max}$  e il valore minimo  $\rho_{\min}$ .

Definiamo l'**angolo di avanzamento** del pericentro<sup>2</sup> come

$$\Delta\theta = c\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{1}{\rho^2 \sqrt{E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho)}} d\rho. \quad (3.14)$$

---

<sup>2</sup>nota che  $\Delta\theta$  può essere anche negativo e ha lo stesso segno di  $c$ .



**Proposizione 13.** *Assumendo che valgano le relazioni (3.13), la mappa  $\theta \mapsto \rho(\theta)$ , che definisce la traiettoria della soluzione tramite*

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta),$$

ha le simmetrie definite dalle relazioni

$$\begin{aligned} \rho(\Delta\theta - \theta) &= \rho(\theta), & \theta &\in [0, \Delta\theta] \\ \rho(\Delta\theta + \theta) &= \rho(\theta), & \theta &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dove abbiamo assunto che  $\rho(0)$  corrisponda ad un punto di inversione, per cui  $\rho'(0) = \dot{\rho}(0)/\dot{\theta}(0) = 0$ .

*Dimostrazione.* Possiamo dimostrare questa proprietà di simmetria tramite la formula di Binet. Infatti, posto

$$u = \frac{1}{\rho},$$

da

$$-\frac{4m\alpha^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \right) = f(\rho)$$

si ottiene

$$u'' = g(u), \quad g(u) = -\frac{f(\frac{1}{u})}{4m\alpha^2 u^2} - u. \quad (3.15)$$

Siano  $u_{\max} = 1/\rho_{\min}$ ,  $u_{\min} = 1/\rho_{\max}$ . Questi sono punti di inversione per il moto unidimensionale definito da (3.15) in corrispondenza al livello  $\frac{E}{4m\alpha^2}$  dell'energia

$$\mathcal{E}(u, u') = \frac{1}{2}u'^2 + \mathcal{W}(u),$$

dove  $\mathcal{W}(u) = -\int g(u)du$ . Infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u) &= -\int g(u)du = -\frac{1}{4m\alpha^2} \int f\left(\frac{1}{u}\right)d\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{u^2}{2} \\ &= \frac{1}{4m\alpha^2} \mathcal{V}\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{u^2}{2} = \frac{1}{4m\alpha^2} \mathcal{V}_{\text{eff}}\left(\frac{1}{u}\right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

quindi  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  risolvono l'equazione

$$\frac{E}{4m\alpha^2} - \mathcal{W}(u) = 0.$$

Derivando la (3.16) rispetto a  $u$  si ottiene

$$\mathcal{W}'(u) = -\frac{1}{4m\alpha^2 u^2} \mathcal{V}'_{\text{eff}}\left(\frac{1}{u}\right),$$

quindi

$$\mathcal{W}'(u_{\max}) = -\frac{\rho_{\min}^2}{4m\alpha^2} \mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho_{\min}) > 0, \quad \mathcal{W}'(u_{\min}) = -\frac{\rho_{\max}^2}{4m\alpha^2} \mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho_{\max}) < 0.$$

Inoltre, si ha

$$\frac{E}{4m\alpha^2} - \mathcal{W}(u) > 0, \quad \forall u \in (u_{\min}, u_{\max}).$$

Avendo un moto per valori regolari dell'energia  $\frac{1}{2}u'^2 + \mathcal{W}(u)$  possiamo procedere come nella Sezione 2.4 per dimostrare, assumendo  $u(0) = u_{\min}$ , che la soluzione  $u(\theta)$  soddisfa le relazioni

$$\begin{aligned} u(T_u - \theta) &= u(\theta), & \theta &\in [0, T_u] \\ u(T_u + \theta) &= u(\theta), & \theta &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

con

$$T_u = 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{E}{4m\alpha^2} - \mathcal{W}(u)\right)}} du.$$

Usando il cambiamento di variabile  $\rho = \frac{1}{u}$  osserviamo che

$$T_u = -2 \int_{\rho_{\max}}^{\rho_{\min}} \frac{\sqrt{4m\alpha^2}}{\sqrt{2(E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho))}\rho^2} d\rho = |c| \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{1}{\rho^2 \sqrt{E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho)}} d\rho = |\Delta\theta|,$$

dove  $\Delta\theta$  è l'angolo di avanzamento del pericentro. Si conclude utilizzando la relazione  $\rho(\theta) = 1/u(\theta)$ . □

**Osservazione 6.** Dalla Proposizione 3.4 si ottiene che la traiettoria  $\rho(\theta)$  è periodica di periodo  $\Delta\theta$  e si può costruire per simmetria a partire dal tratto che va dal pericentro  $P$  all'apocentro successivo  $A$ . Per ottenere il tratto seguente, che va da  $A$  al pericentro successivo  $P'$ , basta infatti riflettere il tratto precedente rispetto all'asse che passa per  $A$  e  $P$ .

**Osservazione 7.** La condizione per avere una traiettoria periodica nel piano del moto è che

$$\frac{\Delta\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}.$$

Infatti, se  $\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{m}{n}$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$ , l'angolo  $\theta$  è avanzato di  $n\Delta\theta = 2m\pi$  dopo  $n$  periodi  $T_\rho$  della funzione  $\rho(t)$ . Quindi, partendo da un punto al pericentro ci si ritrova nello stesso punto dopo aver fatto  $m$  giri attorno all'origine. Inoltre, la velocità è la stessa in quanto  $\rho(t) = \rho(t + T_\rho)$  e  $\dot{\theta}(t) = \frac{c}{m\rho^2(t)}$ .

Dimostriamo adesso la seguente proprietà:

**Proposizione 14.** *Assumendo che valgano le relazioni (3.13), genericamente la traiettoria è ovunque densa nella corona circolare*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}\}.$$

*Dimostrazione.* Vogliamo dimostrare che, se  $\frac{\Delta\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ , scelto comunque un punto della corona l'orbita passa arbitrariamente vicino a quel punto. Tutti i valori di  $\rho$  nell'intervallo  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$  vengono raggiunti periodicamente. Fissiamo una circonferenza  $C_\rho$  centrata in  $O$  e di raggio  $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ . Dimostriamo, seguendo [3], che in generale  $C_\rho$  viene riempita in modo ovunque denso.

Definiamo la mappa

$$\phi : C_\rho \rightarrow C_\rho, \quad \phi(\rho e^{i\theta}) = \rho e^{i(\theta + \Delta\theta)}$$

dove  $\Delta\theta$  è l'angolo di avanzamento del pericentro.

Se  $\Delta\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$  allora i punti  $\{\phi^m(x)\}_m$ , con  $x = \rho e^{i\theta}$ , sono tutti distinti. Siccome  $C_\rho$  è compatto c'è almeno un punto di accumulazione, quindi per ogni  $\epsilon > 0$  esistono interi positivi  $n, m$ , con  $n > m$ , tali che

$$d(\phi^n(x), \phi^m(x)) < \epsilon.$$

Inoltre la mappa  $\phi$  conserva la distanza tra due punti perché è una rotazione, quindi

$$d(\phi^{n-m}(x), x) = d(\phi^n(x), \phi^m(x)).$$

Posto  $k = n - m$  otteniamo una successione

$$x, \phi^k(x), \phi^{2k}(x), \phi^{3k}(x), \dots$$

di punti distinti su  $C_\rho$  che sono equidistanti e due consecutivi di essi distano meno di  $\epsilon$ . Si conclude usando l'arbitrarietà di  $\epsilon$  e di  $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ .  $\square$

Si può dimostrare che solo due tipi di forze centrali, quelle dell'oscillatore armonico e del problema di Keplero, sono tali che tutte le orbite limitate con momento angolare non nullo sono periodiche. Questo risultato è noto come **teorema di Bertrand** (vedi Sezione 3.7).

### 3.5 Il problema dei due corpi

Studiamo il moto di due punti materiali di massa  $m_1, m_2$  soggetti alla loro interazione mutua. Le equazioni del moto sono

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1, \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_2$$

e assumiamo che le forze  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  soddisfino le seguenti proprietà:

- (i)  $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ,
- (ii)  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ ,
- (iii)  $\mathbf{F}_j \times \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ,
- (iv)  $\mathbf{F}_1 = f(\rho) \frac{\mathbf{r}}{\rho}, \quad \rho = |\mathbf{r}|$

dove  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^1$ .

Il cambiamento di coordinate

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mapsto (\mathbf{x}_B, \mathbf{r})$$

definito dalle relazioni

$$(m_1 + m_2)\mathbf{x}_B = m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

disaccoppia le equazioni di Newton: si ottengono infatti le equazioni

$$m\ddot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{0}, \quad \mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (3.17)$$

in cui

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad m = m_1 + m_2.$$

Possiamo quindi studiare il problema di moto centrale dato dalla seconda delle (3.17) e poi ricostruire la soluzione tramite le relazioni

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_B = \frac{m_2}{m}\mathbf{r}, \quad \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_B = -\frac{m_1}{m}\mathbf{r}. \quad (3.18)$$

**Osservazione 8.** Dalle (3.18) si vede che le traiettorie nel riferimento del centro di massa si ottengono per similitudine da quelle del moto relativo, soluzione di un problema di moto centrale.

**Osservazione 9.** Nel caso della forza di attrazione gravitazionale di Newton si ha  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ , dove  $G$  è la costante di gravitazione universale, per cui, utilizzando la relazione  $m\mu = m_1 m_2$ , si ottiene  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm\mu}{\rho^3} \mathbf{r}$ , con  $\rho = |\mathbf{r}|$ . In questo modo la seconda equazione in (3.17) si scrive

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -Gm\mu \frac{\mathbf{r}}{\rho^3},$$

che corrisponde al problema del moto di un corpo di massa  $\mu$  (**massa ridotta**) che si muove in un campo di forze centrali prodotto dall'attrazione gravitazionale di un punto di massa  $m$  fisso nell'origine.

## 3.6 Il problema di Keplero

Nel periodo tra il 1600 ed il 1601 Johannes Kepler (1571-1630) fu assistente di Tycho Brahe<sup>3</sup> a Praga. Sulla base delle osservazioni di Brahe, Kepler formulò le tre leggi seguenti:

- 1) le traiettorie dei pianeti sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi;
- 2) il raggio vettore che congiunge un pianeta al Sole descrive aree uguali in tempi uguali;
- 3) i quadrati dei periodi di rivoluzione  $T$  dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori  $a$  delle loro traiettorie. Inoltre la costante  $\frac{T^2}{a^3}$  è la stessa per tutti i pianeti.

Le prime due leggi appaiono in *Astronomia Nova* (1609), la terza si trova in *Harmonices Mundi* (1619).

In questa sezione discuteremo dei seguenti problemi:

- i) *problema di Keplero diretto*: dato il campo di forze calcolare i moti possibili;
- ii) *problema di Keplero inverso*: dati i moti possibili calcolare il campo di forze.

Entrambi i problemi sono stati risolti da Newton, vedi [15].

---

<sup>3</sup>L'astronomo Tycho Brahe (1546-1601) riuscì a fare diverse osservazioni astronomiche dei pianeti conosciuti, con una precisione dell'ordine di un minuto di arco (= 1/60 di grado), che era un'ottima accuratezza considerato il fatto che non aveva ancora a disposizione un telescopio.

### Problema diretto

Posto

$$k = GmM, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2,$$

consideriamo il moto centrale dato dalle equazioni

$$m\ddot{\mathbf{x}} = f(\rho)\frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad f(\rho) = -\frac{k}{\rho^2}$$

con  $\rho = |\mathbf{x}|$  e con condizioni iniziali  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$ . La forza centrale ammette l'energia potenziale

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{k}{\rho}.$$

Assumiamo che il momento angolare sia non nullo e introduciamo coordinate polari  $\rho, \theta$  nel piano del moto  $\Pi$ . Sia  $c = m\rho^2\dot{\theta}$  il valore costante della componente del momento angolare ortogonale a  $\Pi$ , che corrisponde alle condizioni iniziali scelte. Essendo il moto centrale vale la legge delle aree, che rappresenta la conservazione del momento angolare  $m\rho^2\dot{\theta}$  e ci dà la seconda legge di Keplero.

Proiettando l'equazione di Newton in direzione radiale  $\mathbf{e}_\rho$  e usando la formula di Binet si ottiene l'equazione per la componente radiale della forza:

$$-\frac{4m\alpha^2}{\rho^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right] = -\frac{k}{\rho^2}$$

dove  $\alpha = \frac{c}{2m}$  è la costante delle aree. Ponendo

$$p = \frac{4m\alpha^2}{k} \tag{3.19}$$

e usando la variabile  $u = 1/\rho$  si ottiene l'equazione differenziale lineare

$$u'' + u = \frac{1}{p} \tag{3.20}$$

dove l'apice ' indica la derivata rispetto a  $\theta$ . L'equazione (3.20) ha come soluzione generale

$$u(\theta) = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{1}{p}$$

con  $A > 0$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . Introducendo il parametro  $e = Ap$  si ha l'equazione di una conica in coordinate polari

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}. \tag{3.21}$$

**Esercizio 8.** Verificare questa affermazione confrontando (3.21) con l'equazione di una conica in coordinate cartesiane  $x, y$  nel piano del moto.

Scriviamo  $p, e$  in funzione di  $c, E$ . Sostituendo la relazione  $\alpha = \frac{c}{2m}$  in (3.19) si ottiene

$$p = \frac{c^2}{mk}. \quad (3.22)$$

Il valore minimo di  $\rho$  lungo la traiettoria definita da (3.21) è dato da

$$\rho_{\min} = \frac{p}{1+e} \quad (3.23)$$

ed è un punto di inversione del moto per la variabile  $\rho$  se  $e \neq 0$ , altrimenti abbiamo un'orbita circolare e  $\rho_{\min}$  è un equilibrio. In ogni caso, vale la relazione

$$E - \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho_{\min}) = 0, \quad (3.24)$$

dove

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{c^2}{2m\rho^2}$$

è l'energia potenziale efficace del problema di Keplero. Dalle relazioni (3.22), (3.23) si ottiene

$$\rho_{\min} = \frac{c^2}{mk(1+e)}$$

che, sostituita nella (3.24), ci dà

$$\begin{aligned} 0 &= E + \frac{k}{\rho_{\min}} - \frac{c^2}{2m\rho_{\min}^2} = E + \frac{mk^2(1+e)}{c^2} - \frac{c^2m^2k^2(1+e)^2}{2mc^4} = \\ &= E + \frac{mk^2(1+e)}{c^2} \left(1 - \frac{1+e}{2}\right) = E + \frac{mk^2(1-e^2)}{2c^2}, \end{aligned}$$

da cui

$$e^2 = 1 + \frac{2Ec^2}{mk^2}. \quad (3.25)$$

Dalla (3.25) si ottiene che

$$\begin{aligned} E < 0 &\iff e < 1 && \text{orbite ellittiche,} \\ E = 0 &\iff e = 1 && \text{orbite paraboliche,} \\ E > 0 &\iff e > 1 && \text{orbite iperboliche.} \end{aligned}$$

Inoltre dalla relazione  $mk^2 + 2Ec^2 \geq 0$  segue che non tutte le coppie  $(c, E)$  sono ammissibili (vedi Figura 3.1).

Calcoliamo adesso il periodo  $T$  di un'orbita ellittica che corrisponde ai valori  $c, E$  ( $E < 0$ ) del momento angolare e dell'energia. Valgono le relazioni seguenti,

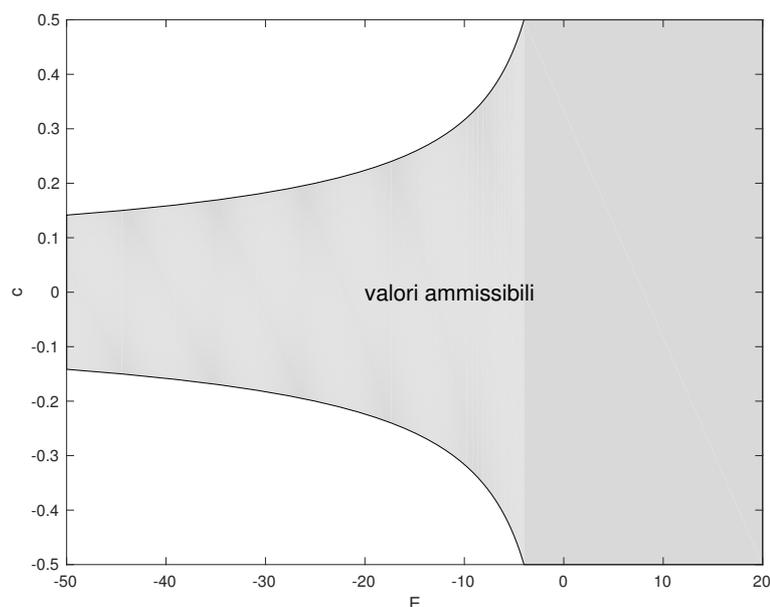


Figura 3.1: Valori ammissibili per la coppia  $(E, c)$ .

che legano semiasse maggiore  $a$ , semiasse minore  $b$  ai parametri  $p, e$  e quindi ai valori di  $c, E$ :

$$p = a(1 - e^2), \quad b = a\sqrt{1 - e^2}, \quad (3.26)$$

per cui

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (3.27)$$

L'area dell'ellisse è

$$\pi ab = \pi a\sqrt{ap} = \pi a^{3/2} \frac{|c|}{\sqrt{mk}}$$

e la velocità areale è

$$\alpha = \frac{c}{2m},$$

per cui

$$T^2 = \frac{(\pi ab)^2}{\alpha^2} = \frac{\pi^2 a^3 c^2 4m^2}{mk c^2} = \frac{4\pi^2 m}{k} a^3$$

che rappresenta la terza legge di Keplero. In particolare, il periodo  $T$  dipende solo dal semiasse maggiore  $a$  e quindi solo dall'energia  $E$ , infatti, usando

$$c^2 = mkp = mka(1 - e^2),$$

si ha

$$E = \mathcal{E}_{\text{eff}}(\rho_{\min}, 0) = -\frac{k}{a(1 - e)} + \frac{c^2}{2ma^2(1 - e)^2} = -\frac{k}{a(1 - e)} \left[1 - \frac{1}{2}(1 + e)\right] = -\frac{k}{2a}.$$

**Osservazione 10.** Se consideriamo il problema di Keplero derivante dal problema di due corpi di massa  $m_1, m_2$  si ha

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad k = G m_1 m_2,$$

per cui  $k/m = G(m_1 + m_2)$  e la costante di proporzionalità è quindi

$$\frac{4\pi^2 m}{k} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \quad (3.28)$$

Se  $m_1$  ed  $m_2$  rappresentano rispettivamente la massa del Sole e quella di un pianeta, dalla (3.28) segue che la costante  $k/m$  dipende dal pianeta scelto, contraddicendo quindi parte della terza legge di Keplero. Comunque, usando come unità la massa solare  $m_1$  e scegliendo pianeti diversi del sistema solare la variazione della somma  $m_1 + m_2$  è al massimo dell'ordine di  $10^{-3}$ , cioè uguale al rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole.

## Il vettore di Laplace-Lenz

Introduciamo il **vettore di Laplace-Lenz**

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O - mk \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad (3.29)$$

dove  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$ .

Mostriamo che  $\mathbf{L}$  è un integrale primo per il moto centrale con energia potenziale di Keplero  $\mathcal{V}(\rho) = -\frac{k}{\rho}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}} &= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{M}_O - mk \left[ \frac{\mathbf{v}}{\rho} - \frac{\mathbf{x}}{\rho^2} \frac{d}{dt}(\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}) \right] = \\ &= \left( -\frac{k\mathbf{x}}{\rho^3} \right) \times (\mathbf{x} \times m\mathbf{v}) - \frac{mk}{\rho} \mathbf{v} + \frac{mk}{\rho^2} \mathbf{x} \left( \frac{2\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{2\rho} \right) = \\ &= -\frac{mk}{\rho^3} [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{x} - \rho^2 \mathbf{v}] - \frac{mk}{\rho} \mathbf{v} + \frac{mk}{\rho^3} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso la norma di  $\mathbf{L}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} &= \left( \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O - mk \frac{\mathbf{x}}{\rho} \right) \cdot \left( \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O - mk \frac{\mathbf{x}}{\rho} \right) = \\ &= |\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O|^2 - 2 \frac{mk}{\rho} \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} + m^2 k^2 = \\ &= \left( |\mathbf{p}|^2 - 2 \frac{mk}{\rho} \right) \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} + m^2 k^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O = \mathbf{p} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2 \mathbf{x} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{p},$$

per cui

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O) = |\mathbf{p}|^2 \mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x}.$$

Usando la relazione

$$\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_O = |\mathbf{M}_O|^2 = c^2,$$

l'espressione dell'energia cinetica  $T = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$  e la (3.25) si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} &= c^2 \left( |\mathbf{p}|^2 - 2 \frac{mk}{\rho} \right) + m^2 k^2 = c^2 \left( 2mT - 2 \frac{mk}{\rho} \right) + m^2 k^2 = \\ &= 2mEc^2 + m^2 k^2 = m^2 k^2 \left( \frac{2Ec^2}{mk^2} + 1 \right) = m^2 k^2 e^2. \end{aligned}$$

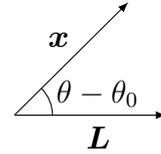
Concludo che la norma del vettore di Laplace-Lenz è il prodotto di  $mk$  e dell'eccentricità  $e$ . Per questo motivo  $\mathbf{L}$  viene anche chiamato **vettore eccentricità**.

Denotiamo con  $\psi$  l'angolo tra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{L}$ . Si ha allora

$$e \cos \psi = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{x}}{mk} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{x}}{mk\rho} - 1 = \frac{c^2}{mk\rho} - 1.$$

Usando la (3.22) si ottiene

$$1 + e \cos \psi = \frac{p}{\rho}$$



e si ritrova l'equazione della traiettoria in forma polare (3.21) con l'angolo  $\psi$  al posto di  $\theta - \theta_0$ .

Ne segue che  $\mathbf{L}$  deve indicare la direzione del pericentro, che corrisponde a  $\theta = \theta_0$  (vedi figura).

## Problema inverso

Mostriamo che, se valgono le leggi di Keplero, l'accelerazione di ogni pianeta è sempre diretta verso il Sole ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza da esso.

Il fatto che il moto sia piano (perché le traiettorie sono ellissi) e che valga la legge delle aree implica che l'accelerazione sia puramente radiale.

Sostituiamo l'equazione della traiettoria, nota per la prima legge di Keplero,

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

nella formula di Binet:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\rho = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right] = -\frac{4\alpha^2}{\rho^2} \left( -\frac{e \cos \theta}{p} + \frac{1 + e \cos \theta}{p} \right) = -\frac{4\alpha^2}{p} \frac{1}{\rho^2}.$$

Esaminiamo adesso il fattore  $\frac{4\alpha^2}{p}$ , che potrebbe cambiare al variare dalle condizioni iniziali. Scegliamo un'orbita ellittica. Siano  $T, a, b$  il periodo ed i semiassi maggiore e minore di quest'orbita. Usando la formula  $\alpha = \frac{\pi ab}{T}$  e la (3.27) si ottiene

$$\frac{4\alpha^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \frac{a}{b^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

che per la terza legge di Keplero è costante.

### 3.7 Il teorema di Bertrand

Nel 1873 viene pubblicato il seguente risultato di J. Bertrand (vedi [5]): ‘tra le leggi di attrazione che assumono azione nulla a distanza infinita, quella della natura è la sola per la quale un corpo, lanciato *arbitrariamente*, con una velocità inferiore a un certo limite, e attirato verso un centro fisso, descrive necessariamente attorno a questo centro una curva chiusa. Tutte le leggi di attrazione *permettono* orbite chiuse, ma la legge della natura è la sola che le impone.<sup>4</sup>

Diamo di seguito un enunciato più formale, che include forze che non decadono con la distanza.

**Teorema 1.** *Dato un campo di forze centrale attrattivo  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}$ ,  $\rho = |\mathbf{x}|$ , con  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  analitica ed  $f(\rho) < 0$ , tale che tutte le traiettorie non rettilinee e limitate siano chiuse, allora*

$$f(\rho) = -\frac{A}{\rho^2} \quad \text{oppure} \quad f(\rho) = -A\rho$$

per una costante  $A > 0$ .

*Dimostrazione.* Utilizzeremo prevalentemente la notazione di Bertrand e seguiremo la sua dimostrazione, aggiungendo alcuni dettagli. Essendo la forza centrale, se consideriamo traiettorie non rettilinee queste hanno necessariamente momento

---

<sup>4</sup>J. Bertrand (1873): ‘parmi les lois d’attraction qui supposent l’action nulle à une distance infinie, celle de la nature est la seule pour laquelle un mobile lancé *arbitrairement* avec une vitesse inférieure à une certaine limite, et attiré vers un centre fixe, décrit nécessairement autour de ce centre une courbe fermée. Toutes les lois d’attraction *permettent* des orbites fermées, mais la loi de la nature est la seule qui les *impose*’

angolare non nullo. Introduciamo coordinate polari  $\rho, \theta$  nel piano del moto e denotiamo con  $c$  il valore costante della componente del momento angolare  $m\rho^2\dot{\theta}$ , ortogonale a tale piano. Dalla formula di Binet si ha

$$f(\rho) = -\frac{k^2}{\rho^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right] \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{c^2}{m}.$$

Ponendo  $z = 1/\rho$  e

$$\psi(z) = -\rho^2 f(\rho)|_{\rho=1/z}$$

si ottiene

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z - \frac{1}{k^2} \psi(z) = 0. \quad (3.30)$$

Moltiplicando la relazione (3.30) per  $\frac{dz}{d\theta}$  ed integrando rispetto a  $\theta$  si ha

$$\left( \frac{dz}{d\theta} \right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2} w(z) = h$$

per una qualche costante  $h$ , con

$$w(z) = 2 \int \psi(z) dz. \quad (3.31)$$

Ricaviamo la relazione che lega  $h, k^2$  all'energia  $E$  di questo moto centrale. Dalle relazioni

$$w(z) = -2 \int \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2 \int f\left(\frac{1}{z}\right) d\left(\frac{1}{z}\right) = -2\mathcal{V}\left(\frac{1}{z}\right),$$

con  $-\frac{d\mathcal{V}}{d\rho}(\rho) = f(\rho)$  e

$$\left( \frac{dz}{d\theta} \right)^2 = \frac{1}{\rho^4} \left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2,$$

con

$$\left( \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = \frac{\dot{\rho}^2}{\dot{\theta}^2} \Big|_{t=t(\theta)} = \frac{m^2}{c^2} \rho^4 \dot{\rho}^2 \Big|_{t=t(\theta)}, = \frac{m}{k^2} \rho^4 \dot{\rho}^2 \Big|_{t=t(\theta)},$$

si ottiene

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{k^2}{2\rho^2} + \mathcal{V}(\rho) \right) = \frac{E}{k^2}.$$

Osserviamo che l'ipotesi che la forza sia attrattiva implica l'esistenza di orbite circolari di raggio  $\rho_o = 1/z_o$  per ogni scelta di  $z_o > 0$ : infatti queste corrispondono ad equilibri dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = \phi_k(z),$$

con

$$\phi_k(z) = \frac{1}{k^2}\psi(z) - z,$$

e per ogni  $z_o > 0$  possiamo trovare  $k$  tale che  $\phi_k(z_o) = 0$ . In particolare si ottiene che l'insieme delle orbite limitate non è vuoto.

Mostriamo adesso, prendendo spunto da in [1], che se tutte le orbite non rettilinee e limitate sono chiuse possiamo trovare, variando  $k$ , un intervallo aperto non vuoto di valori di  $z = z_o$  corrispondenti ad orbite circolari che sono minimi locali non degeneri dell'energia potenziale

$$\mathcal{W}_k(z) = - \int \phi_k(z) dz,$$

cioè tali che  $\phi'_k(z_o) < 0$ . Il valore di  $h$  per cui si ha un'orbita circolare di raggio  $\rho_o = 1/z_o$  è dato da

$$\frac{h}{2} = \mathcal{W}_k(z_o).$$

Osserviamo che non è possibile che  $\phi'_k(z_o) > 0$ . Infatti, analizzando il comportamento della separatrice stabile del sistema  $\frac{dz}{d\theta} = v$ ,  $\frac{dv}{d\theta} = \phi_k(z)$ , si dimostra che ci sarebbe un'orbita limitata asintotica all'equilibrio  $z_o$ , che quindi non potrebbe essere chiusa.<sup>5</sup>

Osserviamo anche che le equazioni

$$\phi_k(z) = 0, \quad \phi'_k(z) = 0$$

non possono essere soddisfatte per valori di  $(z, k)$  che formano un continuo. Infatti in tal caso, usando la definizione di  $\phi_k$  ed eliminando  $k$ , si avrebbe

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{1}{z},$$

che integrata ci dà  $\psi(z) = Az$ , con  $A > 0$ , e quindi

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2}\psi\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{A}{\rho^3}.$$

In questo caso l'energia potenziale efficace sarebbe

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = \frac{c^2 - mA}{2m\rho^2}$$

e si vede facilmente che, se  $c^2 < mA$  ed  $E < 0$ , si hanno delle traiettorie limitate, non rettilinee, che tendono all'origine (cioè  $\rho \rightarrow 0$ ), quindi non sono chiuse (l'origine è un punto singolare).

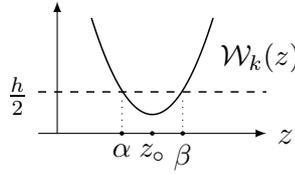
---

<sup>5</sup>basta prendere il ramo di separatrice stabile con  $z > z_o$  nel piano  $(z, z')$ .

Concludiamo che, in virtù delle ipotesi fatte, esiste una coppia  $(z_o, k)$  tale che

$$\phi_k(z_o) = 0, \quad \phi'_k(z_o) < 0.$$

Per continuità possiamo trovare (variando  $k$ ) un intervallo  $\mathcal{J}_o$  aperto non vuoto di valori di  $z$ , corrispondenti ad orbite circolari, che sono minimi locali non degeneri di  $\mathcal{W}_k(z)$ . Vicino a queste orbite circolari, troviamo (variando  $h$ ) delle orbite limitate, con traiettorie del tipo di quelle studiate nella Sezione 3.4. Per ciascuna di queste orbite limitate chiamiamo  $\alpha = z_{\min}$ ,  $\beta = z_{\max}$  i valori minimo e massimo di  $z$ . L'idea è di considerare dei valori degli integrali primi  $k^2, h$  tali che  $0 < \alpha < \beta$ , e  $\mathcal{W}_k''(z) > 0$  per ogni  $z \in [\alpha, \beta]$ , come nella figura seguente



Calcoliamo la relazione che lega  $k^2, h$  ad  $\alpha, \beta$ . Osserviamo che questi ultimi sono punti di inversione, quindi

$$h + \frac{1}{k^2}w(\alpha) - \alpha^2 = 0, \quad h + \frac{1}{k^2}w(\beta) - \beta^2 = 0,$$

da cui

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{w(\beta) - w(\alpha)}, \quad h = \frac{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha)}{w(\beta) - w(\alpha)}.$$

Il determinante della matrice jacobiana della mappa

$$(\alpha, \beta) \mapsto (1/k^2, h) \tag{3.32}$$

si scrive

$$-\frac{1}{(w(\beta) - w(\alpha))^3} [w'(\alpha)(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha(w(\beta) - w(\alpha))] [w'(\beta)(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta(w(\beta) - w(\alpha))]. \tag{3.33}$$

Mostriamo che questo determinante non si può annullare per ogni  $\alpha, \beta$  scelti in un intervallo di valori positivi. Se per assurdo questo non fosse vero, allora esisterebbe un intervallo  $\mathcal{I}$  tale che

$$w'(\alpha)(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha(w(\beta) - w(\alpha)) = 0, \tag{3.34}$$

oppure

$$w'(\beta)(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta(w(\beta) - w(\alpha)) = 0, \tag{3.35}$$

per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ , con  $0 < \alpha < \beta$ . Sostituendo nell'equazione (3.34) lo sviluppo di Taylor

$$w(\beta) = w(\alpha) + w'(\alpha)(\beta - \alpha) + \frac{1}{2}w''(\alpha)(\beta - \alpha)^2 + O((\beta - \alpha)^3)$$

si ottiene

$$[-w'(\alpha) + \alpha w''(\alpha)](\beta - \alpha)^2 + O((\beta - \alpha)^3) = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{I}.$$

Si ha quindi

$$\alpha w''(\alpha) - w'(\alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}.$$

Ricordando la relazione (3.31), si ottiene l'equazione differenziale

$$z\psi'(z) = \psi(z)$$

da cui  $\psi(z) = Az$ , con  $A > 0$ , quindi

$$f(\rho) = -\frac{A}{\rho^3},$$

che non soddisfa le ipotesi del teorema per quanto detto prima. L'equazione (3.35) conduce in modo analogo alla stessa contraddizione.

Esiste quindi un intervallo aperto non vuoto  $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_o$  tale che nell'insieme

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathcal{J} \times \mathcal{J} : 0 < \alpha < \beta\}$$

la mappa (3.32) è un diffeomorfismo.

L'angolo di avanzamento del pericentro  $\Delta\theta$  è dato da

$$\Delta\theta = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{h + \frac{1}{k^2}w(z) - z^2}}.$$

Poichè le orbite considerate sono chiuse, si deve avere  $\Delta\theta = q\pi$ , con  $q \in \mathbb{Q}$ . Scrivendo  $k^2, h$  in funzione di  $\alpha, \beta$  otteniamo che deve valere la relazione

$$q\pi = I(\alpha, \beta) \tag{3.36}$$

con

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{w(\beta) - w(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)w(z) - z^2(w(\beta) - w(\alpha))}} dz \tag{3.37}$$

per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{J}$ , con  $0 < \alpha < \beta$ , quindi  $q$  deve essere costante poichè  $\mathbb{Q}$  è un insieme totalmente sconnesso.

Selezioniamo in due passi i potenziali ammissibili, che soddisfano (3.36). Il primo passo consiste nel considerare traiettorie con  $\alpha, \beta$  molto vicini e passare al limite per  $\beta \rightarrow \alpha$ . Consideriamo un valore di  $\alpha \in \mathcal{J}$  e poniamo  $\beta = \alpha + u$ ,  $z = \alpha + y$ . Calcoliamo  $\lim_{u \rightarrow 0} I(\alpha, \alpha + u)$  tramite la formula di Taylor:

$$w(\beta) - w(\alpha) = w'(\alpha)u + \frac{1}{2}w''(\alpha)u^2 + o(u^2),$$

inoltre

$$\begin{aligned} & \alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2)w(z) - z^2(w(\beta) - w(\alpha)) = \\ &= \alpha^2 w(\beta) - \beta^2 w(\alpha) + (\beta^2 - \alpha^2) \left[ w(\alpha) + w'(\alpha)y + \frac{1}{2}w''(\alpha)y^2 + o(y^2) \right] - \\ & - (\alpha^2 + 2\alpha y + y^2)(w(\beta) - w(\alpha)) = \\ &= (\beta^2 - \alpha^2) \left[ w'(\alpha)y + \frac{1}{2}w''(\alpha)y^2 \right] - (2\alpha y + y^2)(w(\beta) - w(\alpha)) + o(u^3) = \\ &= (u - y)uy(w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)) + o(u^3), \end{aligned}$$

poiché i termini del secondo ordine in  $u$  si cancellano. Ottengo quindi che

$$\begin{aligned} q\pi &= \lim_{u \rightarrow 0} I(\alpha, \alpha + u) = \frac{\sqrt{w'(\alpha)}}{\sqrt{w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)}} \lim_{u \rightarrow 0} \int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} (1 + o(1)) = \\ &= \frac{\pi \sqrt{w'(\alpha)}}{\sqrt{w'(\alpha) - \alpha w''(\alpha)}}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

infatti, usando il cambio di variabili  $x = \sqrt{uy - y^2}$  su  $[0, u/2]$ , si ha

$$\int_0^u \frac{dy}{\sqrt{uy - y^2}} = \frac{2}{u} \int_{-u/2}^{u/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - 4\frac{x^2}{u^2}}} = \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \pi,$$

quindi l'ultimo integrale è indipendente da  $u$ . Elevando al quadrato la (3.38) si ottiene che  $w$  deve soddisfare l'equazione differenziale

$$q^2 \alpha w''(\alpha) + (1 - q^2)w'(\alpha) = 0. \quad (3.39)$$

Dalla (3.31) si ottiene l'equazione a variabili separate

$$q^2 z \psi'(z) + (1 - q^2)\psi(z) = 0. \quad (3.40)$$

Se  $q^2 = 1$ , dalla (3.40) si ha  $\psi(z) = A$  e dunque

$$w(z) = 2Az + B, \quad (3.41)$$

con  $A, B$  costanti di integrazione ( $A > 0$ ). Se  $q^2 \neq 1$ , ponendo  $\sigma = 1/q^2$  abbiamo

$$\log \psi = \log z^{1-\sigma} + \log A, \quad A > 0$$

e, passando agli esponenziali,  $\psi(z) = Az^{1-\sigma}$ , per cui

$$w(z) = \frac{2A}{2-\sigma} z^{2-\sigma} + B, \quad B \in \mathbb{R}, \quad (3.42)$$

che per  $\sigma = 1$  si riduce alla (3.41).

Secondo passo: sostituendo l'espressione (3.42) di  $w(z)$  in (3.37) si ha

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\beta^{2-\sigma} - \alpha^{2-\sigma}}}{\sqrt{\alpha^2 \beta^{2-\sigma} - \beta^2 \alpha^{2-\sigma} + (\beta^2 - \alpha^2) z^{2-\sigma} - z^2 (\beta^{2-\sigma} - \alpha^{2-\sigma})}} dz. \quad (3.43)$$

A questo punto passiamo al limite per  $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 1$  in (3.43). Osserviamo che in entrambi i casi  $\alpha, \beta$  possono assumere tutti i valori reali con  $0 < \alpha < \beta < 1$ . Infatti,

$$\mathcal{W}_k(z) = - \int \phi_k(z) dz = z^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{Az^{-\sigma}}{k^2(2-\sigma)} \right]$$

e scelti arbitrariamente  $\alpha, \beta$  con  $0 < \alpha < \beta < 1$ , possiamo trovare dei valori di  $k^2, h$  tali che

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} - \mathcal{W}_k(\alpha) &= \frac{h}{2} - \mathcal{W}_k(\beta) = 0, \\ \frac{h}{2} - \mathcal{W}_k(z) &> 0 \quad \text{se } z \in (\alpha, \beta), \\ \mathcal{W}'_k(\alpha) &< 0 < \mathcal{W}'_k(\beta). \end{aligned}$$

Distinguiamo due casi: a)  $2 - \sigma > 0$ ; b)  $2 - \sigma < 0$ . Nel caso a), usando la sostituzione  $\zeta = z^{\sigma/2}$ , otteniamo

$$q\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^{2-\sigma}(1-z^\sigma)}} = 2q^2 \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = q^2\pi,$$

quindi  $q = 1, \psi(z) = A$  ed  $f(\rho) = -A/\rho^2$ . Nel caso b) invece

$$q\pi = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2},$$

quindi  $q = \frac{1}{2}, \psi(z) = Az^{-3}$  ed  $f(\rho) = -A\rho$ .

□

### 3.8 Esercizi

**Esercizio 9.** Si consideri un punto materiale  $P$  di massa  $m$  libero di muoversi in un campo di forze centrali con energia potenziale

$$\mathcal{V}(\rho) = k \arctan \rho,$$

dove  $k > 0$  è una costante e  $\rho$  è la distanza di  $P$  dal centro di forze.

1. Detto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  il vettore delle coordinate del punto  $P$ , scrivere esplicitamente l'espressione della forza centrale  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .
2. Dimostrare che per ogni valore  $c \neq 0$  della componente del momento angolare ortogonale al piano del moto esiste un'unica traiettoria circolare.
3. Disegnare il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto con coordinate  $\rho, \dot{\rho}$ ;
4. Trovare il valore  $h$  dell'energia totale  $E$  tale che le traiettorie sono illimitate se e solo se  $E \geq h$ .

**Soluzione.** 1. La forza centrale si scrive

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho},$$

con

$$f(\rho) = -\mathcal{V}'(\rho) = -\frac{k}{1 + \rho^2}.$$

2. L'energia potenziale efficace si scrive

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = \mathcal{V}(\rho) + \frac{c^2}{2m\rho^2}.$$

Consideriamo un valore qualunque di  $c$ , con  $c \neq 0$ . Dobbiamo mostrare che questa funzione ha un unico punto stazionario positivo  $\bar{\rho}$ . Si ha

$$\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = \frac{k}{1 + \rho^2} - \frac{c^2}{m\rho^3},$$

per cui, dall'equazione  $\mathcal{V}'_{\text{eff}}(\rho) = 0$  si trova l'equazione polinomiale

$$p(\rho) = km\rho^3 - c^2\rho^2 - c^2 = 0.$$

Per la regola dei segni di Cartesio<sup>6</sup> questa equazione ha al massimo una soluzione positiva. Quest'ultima esiste perché

$$p(0) = -c^2, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} p(\rho) = +\infty.$$

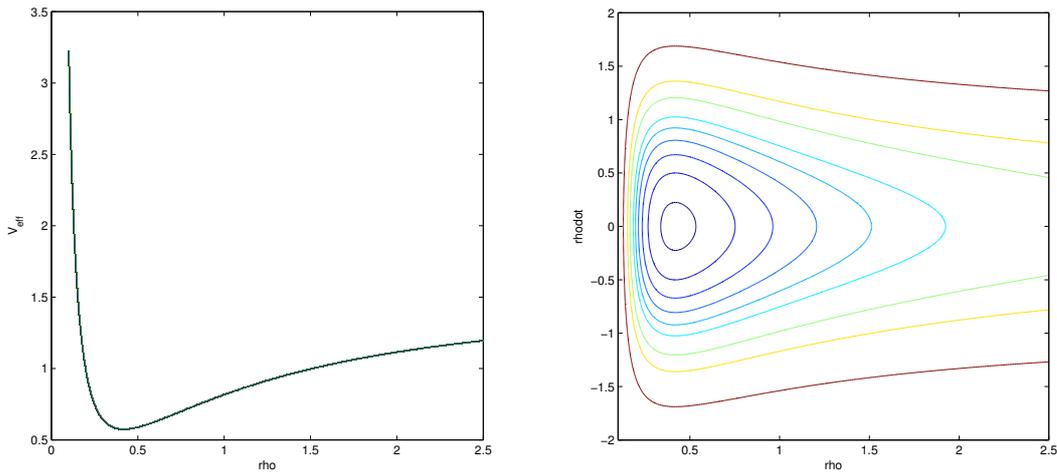
---

<sup>6</sup>dato un polinomio  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , con coefficienti reali  $a_j$ , il numero di radici positive è al massimo uguale al numero di cambiamenti di segno nella successione dei coefficienti  $a_n, \dots, a_0$ .

3. Tenendo conto dei limiti

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = +\infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = k \frac{\pi}{2}$$

e di quanto dimostrato al punto precedente, possiamo tracciare qualitativamente il grafico di  $\mathcal{V}_{\text{eff}}$  (a sinistra) ed il ritratto di fase nel piano delle fasi ridotto (a destra):



4. Dallo studio fatto al punto 3. si vede che il valore cercato dell'energia totale è

$$h = k \frac{\pi}{2}.$$