

# Capitolo 12

## Equilibri e stabilità

Consideriamo le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (12.1)$$

per vincoli fissi, cioè  $T = T_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ , e per forze non dipendenti da  $t$ . Le (12.1) si possono scrivere nel modo seguente:

$$A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (12.2)$$

con

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{dA}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}.$$

Poiché  $A$  è definita positiva, le (12.2) si possono mettere in forma normale ed equivalgono al sistema di equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{v}). \end{cases} \quad (12.3)$$

Si ottiene che i punti di equilibrio sono della forma  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ ,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (12.4)$$

infatti  $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{0})$ .

**Definizione 40.** I valori  $\mathbf{q}_0$ , soluzioni di (12.4), si chiamano **configurazioni di equilibrio**.

**Osservazione 47.** In corrispondenza alle configurazioni di equilibrio  $\mathbf{q}_0$  si hanno soluzioni costanti  $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{q}_0)$  delle equazioni di Newton.

Se le forze attive derivano da un'energia potenziale generalizzata  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = V_0(\mathbf{q}) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  possiamo scrivere la lagrangiana

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

In questo caso le configurazioni di equilibrio sono definite dall'equazione

$$\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) = \mathbf{0}, \quad (12.5)$$

infatti, dalla relazione

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}},$$

tenendo conto che

$$V_1 = \mathbf{a}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial V_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial \mathbf{q}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \dot{\mathbf{q}},$$

si ottiene

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}).$$

## 12.1 Linearizzazione attorno a un equilibrio

Dato un punto di equilibrio  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ , proviamo ad analizzare la sua stabilità linearizzando le equazioni (12.3) in un intorno di questo punto. Poiché i termini

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{dA}{dt} \dot{\mathbf{q}}$$

sono quadratici omogenei in  $\dot{\mathbf{q}}$ , le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = A^{-1}(\mathbf{q}_0) \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})\mathbf{v} \right]. \end{cases} \quad (12.6)$$

Se le forze attive derivano dall'energia potenziale  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = V_0(\mathbf{q}) + \mathbf{a}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}$  si ha  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) + B(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$  (vedi Sezione 10.5) e le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -A^{-1}(\mathbf{q}_0) [V_0''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - B(\mathbf{q}_0)\mathbf{v}], \end{cases} \quad (12.7)$$

dove  $B$  è antisimmetrica con componenti  $B_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}$ . Le (12.7) sono le equazioni di Lagrange per la funzione

$$\begin{aligned} L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}_0) \dot{\mathbf{q}} - V_0(\mathbf{q}_0) - \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \cdot V_0''(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \\ &\quad - \left[ \mathbf{a}(\mathbf{q}_0) + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \right] \cdot \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (12.8)$$

da qui ho assunto che  $V = V_0$  (cioè  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ),  
questa ipotesi viene fatta nella prossima  
facciata

che è lo sviluppo di Taylor di  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  al secondo ordine centrato in  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$ . Verifichiamo che le (12.7) corrispondono alle equazioni di Lagrange per  $L_0$ . Dalle relazioni

$$\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = A(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{a}(\mathbf{q}_0) - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), \quad \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{q}} = -V_0''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) - \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) \right]^T \dot{\mathbf{q}}$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{q}} = A(\mathbf{q}_0)\ddot{\mathbf{q}} - \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) - \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) \right]^T \right) \dot{\mathbf{q}} + V_0''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0),$$

che dimostra che le equazioni di Lagrange per  $L_0$  corrispondono alle (12.7).

Nel caso particolare in cui  $V = V_0$ , tralasciando la costante  $-V_0(\mathbf{q}_0)$ , si ottiene

$$L_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}_0)\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \cdot V''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0). \quad (12.9)$$

Le equazioni di Lagrange per (12.9) sono

$$A(\mathbf{q}_0)\ddot{\mathbf{q}} + V''(\mathbf{q}_0)(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = \mathbf{0} \quad (12.10)$$

e si possono scrivere come

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \Lambda(\mathbf{q}_0) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}, \quad (12.11)$$

con

$$\Lambda(\mathbf{q}_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -A^{-1}V''(\mathbf{q}_0) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}.$$

In questo caso la matrice del sistema linearizzato ha autovalori che dipendono solo dagli autovalori di  $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ . Siccome  $A(\mathbf{q}_0)$ ,  $V''(\mathbf{q}_0)$  sono simmetriche, con  $A$  definita positiva, sappiamo (vedi Sezione 12.7) che gli autovalori  $\lambda_h$  di  $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$  sono reali e che possiamo trovare una base di autovettori  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_h\}_{h=1, \dots, n}$  ortonormali rispetto al prodotto scalare definito da  $A(\mathbf{q}_0)$ , cioè tali che

$$\mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \delta_{hk},$$

dove  $\delta_{hk}$  è il delta di Kronecker. Per il teorema di Binet si ha

$$\det(A^{-1}V'' - \lambda I) = \det A^{-1} \det(V'' - \lambda A),$$

quindi gli autovalori  $\lambda_h$  si possono calcolare risolvendo l'equazione

$$\det(V''(\mathbf{q}_0) - \lambda A(\mathbf{q}_0)) = 0,$$

detta **equazione secolare**, evitando di calcolare  $A^{-1}(\mathbf{q}_0)$ . Inoltre si ha

$$\mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_h \cdot \lambda_k A(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_k = \lambda_k \delta_{hk},$$

cioè nella base  $\mathcal{B}$  entrambe le matrici  $A(\mathbf{q}_0), V''(\mathbf{q}_0)$  sono in forma diagonale.

Osserviamo che, se  $\lambda_h, h = 1, \dots, n$  sono gli autovalori di  $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ , allora gli autovalori di  $\Lambda(\mathbf{q}_0)$  sono

$$\pm\sqrt{-\lambda_h}, \quad h = 1, \dots, n.$$

In particolare, se  $\lambda_k < 0$  per qualche  $k$  allora  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è instabile perché il sistema (12.11) ha un esponente di Lyapounov positivo.<sup>1</sup>

Se  $\lambda_h \geq 0$  per  $h = 1, \dots, n$  allora gli autovalori di  $\Lambda(\mathbf{q}_0)$  sono tutti immaginari puri oppure nulli, quindi gli esponenti di Lyapounov sono tutti nulli ed il metodo di linearizzazione non ci permette di concludere niente sulla stabilità di  $\mathbf{q}_0$ . In questo caso per studiare la stabilità possiamo usare il metodo descritto nella prossima sezione.

## 12.2 Il teorema di Lagrange-Dirichlet

Si consideri un punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  del sistema di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (12.12)$$

**Definizione 41.** Si dice che una funzione  $f \in C^1(U; \mathbb{R})$ , definita in un intorno  $U$  di un punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0$  di (12.12), è una funzione di Lyapounov per  $\mathbf{x}_0$  se valgono le seguenti proprietà:

- i)  $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ ;
- ii)  $\frac{df}{dt}(\mathbf{x}) \leq 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in U$ .

dove  $\frac{df}{dt}$  è la derivata di  $f$  lungo una qualunque soluzione di (12.12), cioè

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Vale il seguente risultato:

**Teorema 4.** (Lyapounov) Se un punto di equilibrio ammette una funzione di Lyapounov, allora è stabile.

<sup>1</sup>gli esponenti di Lyapounov di un punto di equilibrio  $\mathbf{X}_0$  di un sistema di equazioni differenziali  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$  sono le parti reali degli autovalori della matrice  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}_0)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di Lyapounov per il punto di equilibrio  $\mathbf{x}_0 \in U$ , dove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Per ogni palla  $B = B(\mathbf{x}_0, r)$  di centro  $\mathbf{x}_0$  e raggio  $r$  contenuta in  $U$  sia  $\partial B$  la sfera che costituisce il bordo di  $B$  e definiamo

$$m = \min_{\mathbf{x} \in \partial B} f(\mathbf{x}).$$

Tale minimo esiste poiché  $f$  è continua sull'insieme compatto  $\partial B$ . Consideriamo la componente connessa  $V$  dell'insieme

$$\{\mathbf{x} \in B : f(\mathbf{x}) < m\}$$

che contiene  $\mathbf{x}_0$ . Se  $\mathbf{y} \in V$ , allora la traiettoria della soluzione  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; 0, \mathbf{y})$  di (12.12) che parte da  $\mathbf{y}$  al tempo  $t = 0$  non potrà mai uscire da  $B$  per tempi  $t > 0$  perchè per farlo dovrebbe necessariamente passare dal bordo di  $B$  sul quale la funzione composta  $f(\mathbf{x}(t))$  avrebbe un valore superiore al valore iniziale  $f(\mathbf{y})$ , contraddicendo la proprietà *ii*) delle funzioni di Lyapounov. □

**Teorema 5.** *Consideriamo il sistema lagrangiano definito da*

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V_0(\mathbf{q}) - V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (12.13)$$

*Se  $\mathbf{q}_0$  è un minimo locale stretto di  $V_0$  allora  $\mathbf{q}_0$  è una configurazione di equilibrio stabile.*

*Dimostrazione.* Si osserva che  $\mathbf{q}_0$  è una configurazione di equilibrio in quanto soddisfa (12.5). Siccome la lagrangiana (12.13) non dipende da  $t$ , allora la funzione

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + V_0(\mathbf{q}).$$

è un integrale primo delle equazioni di Lagrange per  $L$  (è l'integrale di Jacobi, vedi Proposizione 65). Inoltre  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è un punto di minimo locale stretto per  $J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , quindi si può usare  $J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  come funzione di Lyapounov relativa al punto  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  restringendola ad un opportuno intorno di tale punto. □

## 12.3 Analisi della stabilità

Nel caso in cui le forze generalizzate siano conservative, con energia potenziale  $V = V_0(\mathbf{q})$ , l'analisi del solo spettro di  $V''(\mathbf{q}_0)$ , dove  $\mathbf{q}_0$  è una configurazione di equilibrio, ci può permettere di studiare la stabilità dei punti di equilibrio di (12.11).

Se  $V''(\mathbf{q}_0)$  ha tutti gli autovalori positivi allora  $\mathbf{q}_0$  è un minimo stretto (non degenere) di  $V$ , quindi il punto  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Se  $V''(\mathbf{q}_0)$  ha un autovalore  $\mu < 0$  con autovettore  $\mathbf{v}$ , sia  $\mathbf{v} = \sum_h v_h \mathbf{u}_h$  l'espressione di  $\mathbf{v}$  come combinazione lineare degli elementi della base  $\mathcal{B}$ . Allora

$$\begin{aligned} 0 > \mu |\mathbf{v}|^2 &= \mathbf{v} \cdot V''(\mathbf{q}_0) \mathbf{v} = \sum_{h,k=1}^n v_h v_k \mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}_k = \sum_{h,k=1}^n v_h v_k \lambda_k \mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0) \mathbf{u}_k = \\ &= \sum_{h,k=1}^n v_h v_k \lambda_k \delta_{hk} = \sum_{h=1}^n v_h^2 \lambda_h, \end{aligned}$$

quindi esiste  $k$  con  $\lambda_k < 0$  ed il punto  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{0})$  è instabile.

NO

## 12.4 Stabilizzazione con termini girostatici

Se le componenti lagrangiane delle forze attive ammettono un'energia potenziale generalizzata  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = V_0(\mathbf{q}, t) + V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  è possibile che un punto di massimo di  $V_0$  sia stabile: infatti la presenza del termine  $V_1$  modifica lo spettro del linearizzato, anche se non modifica gli equilibri. Questo fenomeno si chiama **stabilizzazione girostatica**.

**Esempio 32.** (*oscillatore armonico in un riferimento rotante*)

Fissiamo un sistema di riferimento  $\Sigma = O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$  in  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  collegato all'origine  $O$  del riferimento da una molla di costante elastica  $k$ . Scegliamo delle condizioni iniziali  $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0$  per il punto al tempo  $t = 0$ . Siccome il campo di forze è centrale, dalla conservazione del momento angolare sappiamo che il moto è piano. Possiamo quindi orientare il riferimento  $\Sigma$  in modo tale che, per queste condizioni iniziali, il moto avvenga nel piano  $Oxy$ . Consideriamo adesso un riferimento  $\Sigma' = O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$ , con  $O' = O$ , e con velocità angolare costante  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ ,  $\omega \neq 0$ , rispetto a  $\Sigma$ .

La stabilità dell'origine per l'oscillatore armonico è nota a priori in  $\Sigma$ , e vale anche in  $\Sigma'$ . Introduciamo coordinate cartesiane  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$  relative a  $\Sigma'$  e studiamo la stabilità dell'equilibrio  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  nel riferimento rotante con il metodo della linearizzazione.

L'energia potenziale, tenendo conto delle forze apparenti, è

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} k |\mathbf{q}|^2 - \frac{1}{2} m |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2 + m \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot (kI + m\Omega^2) \mathbf{q} + m \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}, \quad (12.14)$$

con

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

infatti

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}|^2 = \Omega \mathbf{q} \cdot \Omega \mathbf{q} = -\mathbf{q} \cdot \Omega^2 \mathbf{q},$$

poiché  $\Omega^T = -\Omega$ . Possiamo scrivere la (12.14) come  $V = V_0 + V_1$ , con  $V_j$  omogenea di grado  $j$  in  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Gli equilibri (in questo caso solo  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ ) si ottengono cercando i punti critici di  $V_0$ . Se  $\omega^2 > \frac{k}{m}$  allora  $V_0''$  ha autovalori negativi, quindi se considerassimo solo il termine  $V_0$  per lo studio della stabilità si otterrebbe che l'origine è instabile.

Includiamo adesso anche  $V_1$  nello studio della stabilità. Le equazioni del moto corrispondenti all'energia potenziale (12.14) si scrivono

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{k}{m}\mathbf{q} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}}$$

oppure, come sistema del primo ordine,

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(\frac{k}{m}I + \Omega^2) & -2\Omega \end{bmatrix}.$$

Dato che la terza componente di  $\mathbf{q}$  e di  $\dot{\mathbf{q}}$  è identicamente nulla, possiamo descrivere il moto con il sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \beta I & -2\omega J \end{bmatrix},$$

dove

$$\mathbf{z} = (q_1, q_2)^T, \quad \beta = \omega^2 - \frac{k}{m}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di  $\Gamma$  si ottengono dall'equazione

$$\det(\Gamma - \lambda I) = \lambda^4 + 2(2\omega^2 - \beta)\lambda^2 + \beta^2 = 0. \quad (12.15)$$

Il discriminante è

$$\Delta = 16\omega^2(\omega^2 - \beta) = 16\omega^2 \frac{k}{m} > 0,$$

quindi le radici  $\lambda^2$  di (12.15) sono reali e distinte. Inoltre, dato che  $2\omega^2 > \beta$ , per la regola dei segni di Cartesio le radici  $\lambda^2$  sono negative o nulle e gli autovalori di  $\Gamma$  sono immaginari puri o nulli:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega', \quad \omega' \neq \omega.$$

L'origine risulta quindi una configurazione di equilibrio stabile.

**Osservazione 48.** L'esempio precedente mostra che nel teorema di Lagrange-Dirichlet l'ipotesi che  $\mathbf{q}_0$  sia un punto di minimo stretto per  $V_0$  è una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la stabilità di  $\mathbf{q}_0$ , infatti

$$V_0'' = kI + m\Omega^2 = (k - m\omega^2)I$$

e, se  $\omega > \sqrt{k/m}$ , allora  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  è un punto di massimo per  $V_0$ .

## 12.5 Piccole oscillazioni attorno a un equilibrio stabile

Assumiamo che la lagrangiana abbia la forma

$$L = T_2 - V,$$

con  $V = V_0$ , e che  $\mathbf{q}_0$  sia un minimo non degenero di  $V$ . Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli autovalori di  $A^{-1}V''(\mathbf{q}_0)$ , soluzioni di

$$\det(V''(\mathbf{q}_0) - \lambda A(\mathbf{q}_0)) = 0.$$

Osserviamo che moltiplicando scalarmente l'equazione  $V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_h = \lambda_h A\mathbf{u}_h$  per  $\mathbf{u}_h$  si ottiene

$$\lambda_h = \frac{\mathbf{u}_h \cdot V''(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_h}{\mathbf{u}_h \cdot A(\mathbf{q}_0)\mathbf{u}_h} > 0, \quad h = 1, \dots, n.$$

La soluzione generale del sistema lineare (12.10) è

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \sum_{h=1}^n c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h)\mathbf{u}_h \quad (12.16)$$

con  $c_h \geq 0$ ,  $\varphi_h \in S^1$ ,  $\omega_h = \sqrt{\lambda_h} > 0$ , come si può facilmente verificare per sostituzione di (12.16) in (12.10).

Le quantità  $\omega_h$  si chiamano **frequenze proprie** del sistema e le famiglie di soluzioni particolari

$$c_h \cos(\omega_h t + \varphi_h)\mathbf{u}_h, \quad h = 1, \dots, n$$

si chiamano **modi normali** di oscillazione attorno all'equilibrio  $\mathbf{q}_0$ .

## 12.6 Alcuni esempi

**Esempio 33.** Si consideri il sistema meccanico in Figura 12.1. Calcolare tutti gli equilibri e studiarne la stabilità al variare dei parametri.

L'energia potenziale è data da

$$\begin{aligned} V(\theta, \phi) &= \frac{1}{2}k_1(|P - A|^2 + |Q - B|^2) + \frac{1}{2}k_2|P - Q|^2 \\ &= 2k_1(\cos \phi - \cos \theta) - k_2 \cos(\phi - \theta) + \text{costante}. \end{aligned}$$



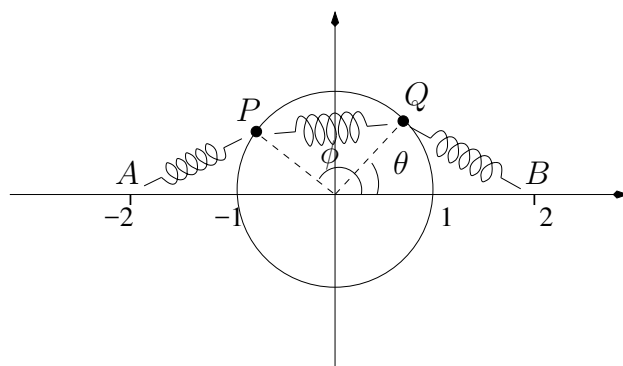


Figura 12.1:

Gli equilibri sono le soluzioni di

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta, \phi) &= 2k_1 \sin \theta - k_2 \sin(\phi - \theta) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi}(\theta, \phi) &= -2k_1 \sin \phi + k_2 \sin(\phi - \theta) = 0\end{aligned}$$

Sommando le due equazioni si ha

$$\sin \theta = \sin \phi \quad (12.17)$$

e sostituendo nella prima

$$\sin \theta [2k_1 + k_2(\cos \phi - \cos \theta)] = 0$$

Da  $\sin \theta = \sin \phi = 0$  abbiamo le quattro configurazioni di equilibrio

$$(\theta, \phi) = (0, 0); \quad (0, \pi); \quad (\pi, 0); \quad (\pi, \pi) \quad (12.18)$$

e, se  $k_1 < k_2$ , a queste si aggiungono le due configurazioni  $(\theta, \phi) = (\bar{\theta}, \bar{\phi})$ , con  $\bar{\theta}$  soluzione di  $\cos \theta = k_1/k_2$  e  $\bar{\phi} = \pi - \bar{\theta}$ . Studiamo la stabilità di questi equilibri. Le derivate seconde di  $V$  sono

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\theta, \phi) &= 2k_1 \cos \theta + k_2 \cos(\phi - \theta) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \theta}(\theta, \phi) &= -k_2 \cos(\phi - \theta) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}(\theta, \phi) &= -2k_1 \cos \phi + k_2 \cos(\phi - \theta).\end{aligned}$$

Consideriamo la matrice hessiana  $V''$  di  $V$  valutata nelle configurazioni di equilibrio (12.18):

$$V''(0, 0) = \begin{bmatrix} 2k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -2k_1 + k_2 \end{bmatrix}, \quad V''(0, \pi) = \begin{bmatrix} 2k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & 2k_1 - k_2 \end{bmatrix},$$

$$V''(\pi, 0) = \begin{bmatrix} -2k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & -2k_1 - k_2 \end{bmatrix}, \quad V''(\pi, \pi) = \begin{bmatrix} -2k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & 2k_1 + k_2 \end{bmatrix}.$$

Dalle relazioni

$$\begin{aligned} \det V''(0, 0) &= -4k_1^2, & \det V''(\pi, \pi) &= -4k_1^2, \\ \det V''(\pi, 0) &= 4k_1(k_1 + k_2), & \operatorname{tr} V''(\pi, 0) &= -2(2k_1 + k_2) \end{aligned}$$

si ottiene che  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$ ,  $(\pi, \pi)$  sono instabili, poiché in tali punti  $V''$  ha almeno un autovalore  $< 0$ .

Invece, dalle relazioni

$$\det V''(0, \pi) = 4k_1(k_1 - k_2), \quad \operatorname{tr} V''(0, \pi) = 2(2k_1 - k_2),$$

si ha che la configurazione  $(0, \pi)$  è stabile se  $k_1 > k_2$ , instabile se  $k_1 < k_2$ .

Infine, osservando che

$$\cos(\bar{\phi} - \bar{\theta}) = -\cos^2 \bar{\theta} + \sin^2 \bar{\theta} = 1 - 2\cos^2 \bar{\theta} = 1 - 2\frac{k_1^2}{k_2^2}$$

e che  $\cos \bar{\phi} = -\cos \bar{\theta}$ , si ottiene

$$V''(\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta}) = V''(-\bar{\theta}, \pi + \bar{\theta}) = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 + 2\frac{k_1^2}{k_2} \\ -k_2 + 2\frac{k_1^2}{k_2} & k_2 \end{bmatrix},$$

da cui

$$\det V''(\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta}) = 4k_1^2 \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) > 0, \quad \operatorname{tr} V''(\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta}) = 2k_2 > 0.$$

Concludiamo che le configurazioni di equilibrio  $(\theta, \varphi) = (\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta})$ ,  $(-\bar{\theta}, \pi + \bar{\theta})$  sono stabili. Osserviamo che c'è una biforcazione per  $k_1 = k_2$ : l'equilibrio  $(\theta, \phi) = (0, \pi)$  da stabile diventa instabile e nascono due nuovi equilibri stabili  $(\theta, \phi) = (\bar{\theta}, \pi - \bar{\theta})$ ,  $(\pi - \bar{\theta}, \bar{\theta})$ .

**Esempio 34.** Nel piano  $Oxy$  si consideri il sistema meccanico formato da  $n$  punti materiali  $P_1, \dots, P_n$  di uguale massa  $m$ . Il punto  $P_i$  è vincolato a muoversi sulla retta  $x = i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Inoltre ogni  $P_i$  è collegato ai punti  $P_{i-1}$  e  $P_{i+1}$  da due molle di costante elastica  $k$ , dove si è posto  $P_0 \equiv (0, 0)$ ,  $P_{n+1} \equiv (n+1, 0)$ . Si usano come coordinate i valori  $q_i = y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  delle ordinate dei punti  $P_i$ . Scrivere le equazioni di Lagrange, trovare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

L'energia cinetica e potenziale del sistema sono

$$T = \frac{1}{2}m \sum_{h=1}^n \dot{q}_h^2, \quad V = \frac{1}{2}k \sum_{h=0}^n |P_{h+1} - P_h|^2 = \frac{1}{2}k \sum_{h=0}^n (q_{h+1} - q_h)^2 + \text{costante}$$

dove  $q_0 = q_{n+1} = 0$ .

Dimostriamo che l'unica configurazione di equilibrio è  $(y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)$ . Gli equilibri sono soluzioni di

$$V_{q_h} = -k(q_{h+1} - 2q_h + q_{h-1}) = 0, \quad h = 1, \dots, n.$$

Otengo il sistema lineare  $M\mathbf{q} = 0$ , con

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sia  $\lambda$  un autovalore di  $M$ , con autovettore  $\mathbf{v}$ . Allora

$$\mathbf{v} \cdot M\mathbf{v} = 2 \left( \sum_{h=1}^n v_h^2 - \sum_{h=1}^n v_{h+1}v_h \right) = [(v_1 - v_2)^2 + \dots + (v_{n-1} - v_n)^2 + v_1^2 + v_n^2] \geq 0$$

ed è nullo solo se  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Questo ci dice che  $M$  è definita positiva, quindi  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  è l'unica soluzione di  $M\mathbf{q} = 0$ .

Tale configurazione di equilibrio è stabile, come si vede applicando il teorema di Lagrange-Dirichlet, dato che  $V$  ha un minimo stretto in  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Gli autovalori della matrice hessiana  $V'' = kM$  sono tutti positivi.

Le equazioni di Lagrange sono date da

$$m\ddot{q}_h = -V_{q_h} = k(q_{h+1} - 2q_h + q_{h-1}), \quad h = 1, \dots, n.$$

**NO**

## 12.7 Diagonalizzazione simultanea di forme quadratiche

Consideriamo le forme quadratiche

$$a(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot B\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

con  $A, B$  matrici di ordine  $n$  simmetriche,  $A$  definita positiva. L'insieme di livello

$$\mathcal{E}_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a(\mathbf{x}) = 1\}$$

è un ellissoide, quindi è compatto. Dunque esiste  $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{E}_A$  tale che

$$b(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A} b(\mathbf{x}).$$

Il vettore  $\mathbf{x}_1$  è un punto stazionario di  $b(\mathbf{x})$ , vincolato a  $\mathcal{E}_A$ . Dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange si ottiene

$$B\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{(1)}A\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_1 \cdot A\mathbf{x}_1 = 1,$$

per cui  $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{E}_A$  è autovettore di  $A^{-1}B$  con autovalore  $\lambda_1^{(1)} = b(\mathbf{x}_1)$ .

Sia  $\mathcal{S}^{n-1} = \mathbf{x}_1^\perp$  il sottospazio di dimensione  $n - 1$  costituito dai vettori di  $\mathbb{R}^n$  ortogonali a  $\mathbf{x}_1$  rispetto al prodotto scalare definito da  $A$ . Denoto con  $\mathcal{E}_A^{n-2} = \mathcal{E}_A \cap \mathcal{S}^{n-1}$  l'ellissoide di dimensione  $n - 2$  e considero  $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{E}_A^{n-2}$  tale che

$$b(\mathbf{x}_2) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A^{n-2}} b(\mathbf{x}).$$

Dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$B\mathbf{x}_2 = \lambda_2^{(2)}A\mathbf{x}_2 + \lambda_1^{(2)}A\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_2 = 1, \quad \mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_1 = 0. \quad (12.19)$$

Moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{x}_1$  la prima delle (12.19) e usando la simmetria di  $A$  e  $B$  si ottiene

$$\lambda_1^{(2)} = \mathbf{x}_1 \cdot B\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 \cdot B\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{(1)}\mathbf{x}_2 \cdot A\mathbf{x}_1 = 0,$$

per cui  $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{E}_A^{n-2}$  è autovettore di  $A^{-1}B$  con autovalore  $\lambda_2^{(2)} = b(\mathbf{x}_2)$ . Tale procedimento si può iterare cercando per ogni  $k = 3, \dots, n$  un vettore  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$b(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}_A^{n-k}} b(\mathbf{x}),$$

con  $\mathcal{E}_A^{n-k} = \mathcal{E}_A \cap \mathcal{S}^{n-k+1}$ , ed  $\mathcal{S}^{n-k+1}$  il sottospazio di dimensione  $n - k + 1$  costituito dai vettori di  $\mathbb{R}^n$  ortogonali a  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$  rispetto al prodotto scalare definito da  $A$ . In questo modo trovo una base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  di autovettori di  $A^{-1}B$  ortonormali rispetto al prodotto scalare definito da  $A$ , con autovalori reali

$$\lambda_1 = b(\mathbf{x}_1), \quad \lambda_2 = b(\mathbf{x}_2), \quad \dots \quad \lambda_n = b(\mathbf{x}_n),$$

dove  $\lambda_j = \lambda_j^{(j)}$ . Per calcolare esplicitamente gli autovalori  $\lambda_j$  si risolve l'equazione secolare

$$\det(B - \lambda A) = 0.$$

Denoto con  $U$  la trasposta della matrice che ha come colonne i vettori della base  $\mathcal{B}$ . Osserviamo che si ha

$$U^T A U = I, \quad U^T B U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (12.20)$$

infatti  $\mathbf{x}_i \cdot A\mathbf{x}_j = \delta_{ij}$  e  $\mathbf{x}_i \cdot B\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_i \cdot A\mathbf{x}_j = \lambda_j \delta_{ij}$ . Concludiamo che le forme quadratiche  $a(\mathbf{x})$ ,  $b(\mathbf{x})$  sono rappresentate da matrici diagonali nella base  $\mathcal{B}$ .