Capitolo 10

Equazioni di Lagrange

Consideriamo un sistema di N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, \ldots, m_N$, soggetti a vincoli olonomi con varietà delle configurazioni $\mathcal{C}_t$, che può dipendere dal tempo t. Introduciamo per ogni istante t un sistema di coordinate locali su $\mathcal{C}_t$:

$$\mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}, t) \in \mathcal{C}_t \subset \mathbb{R}^{3N}$$

Proposizione 59. *L'energia cinetica T è una funzione quadratica delle velocità lagrangiane $\dot{\boldsymbol{q}}$. In particolare*

$$T = T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = T_2(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + T_1(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + T_0(\boldsymbol{q}, t),$$

dove T_i è omogenea di grado i nelle variabili $\dot{\boldsymbol{q}}$. Inoltre $T_2 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} \cdot A(\boldsymbol{q}, t)\dot{\boldsymbol{q}}$, in cui la matrice $A(\boldsymbol{q}, t)$ è simmetrica e definita positiva.

Dimostrazione. Introduciamo la matrice diagonale di ordine $3N$

$$M = \mathrm{diag}\{m_1, m_1, m_1, \ldots, m_N, m_N, m_N\},$$

in cui ogni massa m_j dei punti del sistema appare tre volte sulla diagonale. Sia inoltre

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}(\boldsymbol{q}, t)$$

il vettore di $\mathbb{R}^{3N}$ che rappresenta le velocità possibili degli N punti. Con questa notazione l'energia cinetica si scrive

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\boldsymbol{v} \cdot M\boldsymbol{v} = \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}\Big) \cdot M\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}\Big) = T_2 + T_1 + T_0, \end{aligned}$$

con

$$T_2 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} \cdot A(\boldsymbol{q}, t)\dot{\boldsymbol{q}}, \qquad T_1 = \mathbf{b}(\boldsymbol{q}, t) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}, \qquad T_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \cdot M \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t},$$

dove $A = A(\boldsymbol{q}, t)$ è una matrice simmetrica, detta **matrice cinetica**, con coefficienti

$$a_{hk} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_k}, \qquad h, k = 1, \dots n,$$

e $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\boldsymbol{q}, t)$ è un vettore, con coefficienti

$$b_h = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}, \qquad h = 1, \dots, n.$$

Mostriamo che la matrice cinetica A è definita positiva.
Sia $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ con $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$. Allora

$$\boldsymbol{u} \cdot A\boldsymbol{u} = \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_k} u_h u_k = \Big(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} u_h\Big) \cdot M \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_k} u_k\Big) > 0,$$

infatti M è definita positiva e, se $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, si ha

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} u_h \neq \mathbf{0}$$

poichè i vettori $\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_n}$ sono linearmente indipendenti.

□

Osservazione 36. *Nel caso di vincoli fissi si ha semplicemente*

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} \cdot A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}},$$

cioè l'energia cinetica è una forma quadratica omogenea nelle velocità lagrangiane.

Esempio 22. Calcoliamo la matrice cinetica per il sistema meccanico piano composto da un disco omogeneo di massa M e raggio r e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ. Il disco può rotolare senza strisciare sull'asse Ox di un riferimento $\Sigma = Oxy$ nel piano del moto e l'asta ha un estremo incernierato nel baricentro B del disco.

Sia G il baricentro dell'asta. Le coordinate della posizione e della velocità di B e G sono date da

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_B = s\boldsymbol{e}_1 + r\boldsymbol{e}_2, \qquad && \boldsymbol{x}_G = (s + \ell\sin\theta)\boldsymbol{e}_1 + (r - \ell\cos\theta)\boldsymbol{e}_2, \\ &\boldsymbol{v}_B = \dot{s}\boldsymbol{e}_1, && \boldsymbol{v}_G = (\dot{s} + \ell\dot{\theta}\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + \ell\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso l'energia cinetica del sistema. Le velocità angolari del disco e dell'asta sono rispettivamente

$$\boldsymbol{\omega}_d = -\frac{\dot{s}}{r}\boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{\omega}_a = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_3$$

ed i loro momenti principali rispetto agli assi $B\hat{\boldsymbol{e}}_3$ e $G\hat{\boldsymbol{e}}_3$ sono

$$I_3^d = \frac{1}{2}Mr^2, \qquad I_3^a = \frac{1}{3}m\ell^2.$$

Usando il teorema di König si ottiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M|\boldsymbol{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_d \cdot I_3^d\boldsymbol{\omega}_d + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_a \cdot I_3^a\boldsymbol{\omega}_a \\ &= \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{3}{2}M + m\Big)\dot{s}^2 + \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2 + 2m\ell\cos\theta\dot{s}\dot{\theta}\Big), \end{aligned} \tag{10.1}$$

quindi la matrice cinetica è

$$A(s,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}M + m & m\ell\cos\theta \\ m\ell\cos\theta & \frac{4}{3}m\ell^2 \end{bmatrix},$$

che è definita positiva in quanto i determinanti dei minori principali

$$\frac{3}{2}M + m, \qquad \det A = 2Mm\ell^2 + m^2\ell^2\Big(\frac{4}{3} - \cos^2\theta\Big) > 0$$

sono positivi.

Osservazione 37. *Nell'esempio precedente le dimensioni delle componenti della matrice cinetica non sono le stesse poiché s ha le dimensioni di una lunghezza e l'angolo θ è una coordinata adimensionale.*

10.1 Vincoli ideali e principio di D'Alembert

Definizione 31. *Diciamo che i vincoli olonomi considerati sono anche* **ideali** *se il vettore delle reazioni vincolari $(\boldsymbol{\Phi}_1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_N)$ che essi possono esercitare sugli N punti del sistema in una qualunque configurazione $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_t$, sia che essi stiano in quiete che in movimento, soddisfa ad ogni istante la relazione*

$$\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\Phi}_j \cdot \mathbf{v}_j = 0$$

per ogni scelta del vettore delle velocità virtuali $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) \in T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{C}_t$.

Osservazione 38. *I vincoli senza attrito o di puro rotolamento sono esempi di vincoli ideali.*

Sia $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$ una qualunque soluzione delle equazioni di Newton

$$m_j \ddot{\boldsymbol{x}}_j = \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) + \boldsymbol{\Phi}_j, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Assumendo che i vincoli siano ideali possiamo scrivere

$$\sum_{j=1}^{N} \Big(m_j \ddot{\boldsymbol{x}}_j(t) - \mathbf{F}_j(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t), t) \Big) \cdot \mathbf{v}_j = 0, \tag{10.2}$$

per ogni scelta del vettore delle velocità virtuali $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N) \in T_{\boldsymbol{x}(t)}\mathcal{C}_t$. Se queste equazioni sono soddisfatte diciamo che il sistema meccanico soddisfa il **principio di D'Alembert**. Poiché i vettori

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_1}(\boldsymbol{q}(t), t), \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_n}(\boldsymbol{q}(t), t)$$

formano ad ogni istante t una base di $T_{\boldsymbol{x}(t)}\mathcal{C}_t$, dove

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}(t), t), \tag{10.3}$$

le equazioni (10.2) sono soddisfatte se e solo se

$$\sum_{j=1}^{N} \Big(m_j \ddot{\boldsymbol{x}}_j(t) - \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t), t) \Big) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t), t) = 0, \qquad h = 1, \ldots, n. \tag{10.4}$$

Le equazioni (10.4) sono equazioni pure, cioè non vi appaiono le reazioni vincolari. L'incognita è la curva $\boldsymbol{q}(t)$, infatti usando la relazione (10.3) abbiamo

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}(\boldsymbol{q}, t) \\
\ddot{\boldsymbol{x}} &= \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_k \partial q_h}(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^{n} \Big(2\frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial t \partial q_h}(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t)\ddot{q}_h \Big) + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial t^2}(\boldsymbol{q}, t)
\end{aligned} \tag{10.5}$$

dove abbiamo assunto che $\boldsymbol{\chi}$ sia di classe C^2.

Consideriamo le forze generalizzate[1]

$$Q_h = Q_h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}, t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t), \qquad h = 1, \ldots, n \tag{10.6}$$

[1]tra le $\boldsymbol{F}_j$ ci sono anche le forze interne: non importa che il sistema delle forze interne $\{(\boldsymbol{F}_j^{(I)}, P_j)\}_j$ sia equilibrato perché in (10.6) non appaiono solo $\boldsymbol{R}^{(I)}$, $\boldsymbol{N}_Q^{(I)}$ come nelle equazioni cardinali.

che avevamo già introdotto in (8.4) nel caso di vincoli fissi e forze indipendenti dal tempo. Utilizzando le forze generalizzate possiamo scrivere le equazioni (10.4) del principio di D'Alembert come

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \ddot{\boldsymbol{x}}_j(t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}(t), t) = Q_h(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t), t), \qquad h = 1, \dots, n. \tag{10.7}$$

In generale, nel calcolo delle Q_h non possiamo sostituire al sistema di forze applicate $\{(\vec{\boldsymbol{F}}_j, P_j)\}_j$ un qualunque sistema ad esso equivalente. Però nel caso di un corpo rigido eventualmente soggetto ad altri vincoli indipendenti dal tempo questo è possibile, infatti, per $j = 1, \dots, N$, si ha

$$\boldsymbol{\chi}_j(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\chi}_{O'}(\boldsymbol{q}) + R(\boldsymbol{q})\boldsymbol{x}'_j,$$

con $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^d$, $1 \le d \le 6$, per cui

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}) + \frac{\partial R}{\partial q_h}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{x}'_j.$$

Derivando rispetto a q_h la relazione $RR^T = I$ si trova che la matrice

$$\Omega^{(h)} = \frac{\partial R}{\partial q_h} R^T$$

è antisimmetrica, quindi possiamo scrivere

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial q_h} + \boldsymbol{\omega}^{(h)}(\boldsymbol{q}) \times R\boldsymbol{x}'_j,$$

dove $\boldsymbol{\omega}^{(h)} = \boldsymbol{\omega}^{(h)}(\boldsymbol{q})$ è il vettore associato ad $\Omega^{(h)}$ tramite la relazione

$$\Omega^{(h)}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega}^{(h)} \times \boldsymbol{u}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Quindi, se $\{(\boldsymbol{F}_j, \boldsymbol{\chi}_j)\}_j$ sono le coordinate del sistema di forze applicate ai punti del corpo, si ha

$$\begin{aligned} Q_h &= \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}) \\ &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_{O'}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{N}_{O'}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}^{(h)}(\boldsymbol{q}), \end{aligned}$$

cioè Q_h dipende solo dalla risultante $\boldsymbol{R}$ e dal momento risultante $\boldsymbol{N}_{O'}$ delle forze e dunque possiamo sostituire al sistema di forze applicate al corpo rigido un sistema ad esso equivalente.

Esempio 23. Calcoliamo le componenti lagrangiane della forza di gravità $Q_1, \dots, Q_n$ nel caso di un sistema vincolato di N punti materiali $P_1, \dots, P_N$ di masse $m_1, \dots, m_N$. Se $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{\chi}_j(\boldsymbol{q}, t) \in \mathbb{R}^3$ rappresenta ad ogni istante t le coordinate in $\mathbb{R}^3$ del punto P_j in funzione delle coordinate lagrangiane $\boldsymbol{q}$, si ha

$$\begin{aligned} Q_h &= \sum_{j=1}^{N} (-m_j g\boldsymbol{e}_3) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = -g\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} \Big(\sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{\chi}_j \Big) \\ &= -g\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} m \boldsymbol{\chi}_B = -mg\boldsymbol{e}_3 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_B}{\partial q_h}, \end{aligned}$$

dove

$$\boldsymbol{\chi}_B = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{\chi}_j$$

fornisce le coordinate del baricentro B del sistema ed $m = \sum_{j=1}^{N} m_j$ è la massa totale. Quindi, nel caso della forza di gravità si può sostituire il sistema di forze applicate $\{(-m_j g\boldsymbol{e}_3, P_j)\}_j$ con un'unica forza $-mg\boldsymbol{e}_3$ applicata al baricentro B.

Nel caso dei corpi continui si ha

$$Q_h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \int_C \mathbf{f}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t; \boldsymbol{x}') \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{x}') d\boldsymbol{x}', \tag{10.8}$$

dove $\boldsymbol{x}'$ sono le coordinate dei punti del corpo in un riferimento solidale Σ' ed $\mathbf{f}$ è una distribuzione continua di forze agenti sugli elementi materiali che costituiscono il corpo.

Esempio 24. Consideriamo un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ che si può muovere in un piano Oxy, con un estremo incernierato nell'origine O. Assumiamo che tale piano ruoti uniformemente attorno all'asse Oy con velocità angolare costante $\omega\hat{\boldsymbol{e}}_2$. Usando come coordinata lagrangiana l'angolo θ che l'asta forma con la direzione verticale calcoliamo la componente lagrangiana Q_θ della forza centrifuga.

La densità di massa dell'asta è $\lambda = \frac{m}{2\ell}$. Se r è una coordinata lungo l'asta si ha

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\chi}(\theta; r) = r \sin\theta \boldsymbol{e}_1 - r\cos\theta \boldsymbol{e}_2, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \theta}(\theta; r) = r\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + r\sin\theta \boldsymbol{e}_2, \\ &\mathbf{f}(\theta; r) = -\lambda\omega^2 \boldsymbol{e}_2 \times (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{\chi}) = \lambda\omega^2 (\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1. \end{aligned}$$

Si trova che

$$Q_\theta = \int_0^{2\ell} \mathbf{f}(\theta; r) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \theta}\, dr = \lambda\omega^2 \int_0^{2\ell} r^2 \sin\theta\cos\theta\, dr = \frac{4}{3} m\ell^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta. \tag{10.9}$$

Mostriamo adesso che il sistema delle forze centrifughe è equivalente ad un sistema composto dalla sola risultante $\boldsymbol{R}$ delle forze centrifughe applicato al punto Q' dove l'asse centrale incrocia l'asta. La risultante è data da

$$\boldsymbol{R} = \int_0^{2\ell} \mathbf{f}(\theta; r)\, dr = \int_0^{2\ell} \lambda\omega^2 r \sin\theta\, dr \boldsymbol{e}_1 = m\omega^2\ell\sin\theta \boldsymbol{e}_1.$$

Un punto Q dell'asse centrale è dato dalla relazione

$$Q - O = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|^2}\vec{\boldsymbol{R}} \times \vec{\boldsymbol{N}}_O,$$

dove $\vec{\boldsymbol{N}}_O$ è il momento delle forze centrifughe rispetto all'origine O. In coordinate nel riferimento Oxy si ha

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_O &= \int_0^{2\ell} \boldsymbol{\chi}(\theta; r) \times \mathbf{f}(\theta; r)\, dr = \lambda\omega^2 \int_0^{2\ell} (\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{\chi} \times \boldsymbol{e}_1\, dr \\ &= \lambda\omega^2 \int_0^{2\ell} r^2 \sin\theta\cos\theta\, dr = \frac{4}{3}m\omega^2\ell^2\sin\theta\cos\theta \boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

Le coordinate del punto Q sono quindi

$$\boldsymbol{x}_Q = -\frac{4}{3}\ell\cos\theta\boldsymbol{e}_2.$$

Poiché il trinomio invariante $\boldsymbol{N}_Q \cdot \boldsymbol{R}$ è nullo si ha $\boldsymbol{N}_Q = \boldsymbol{0}$ se e solo se Q è un punto dell'asse centrale, che è parallelo a $\boldsymbol{R}$. Quindi il sistema delle forze centrifughe è equivalente al sistema composto dalla risultante $\boldsymbol{R}$ applicata nel punto Q' dell'asta di coordinate

$$\boldsymbol{x}_{Q'} = \boldsymbol{\chi}_{Q'}(\theta) = \frac{4}{3}\ell(\sin\theta\boldsymbol{e}_1 - \cos\theta\boldsymbol{e}_2).$$

Osserviamo che nelle equazioni del principio di D'Alembert possiamo utilizzare il sistema equivalente $(\vec{\boldsymbol{R}}, Q')$ per calcolare Q_θ. Infatti,

$$\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_{Q'}}{\partial\theta} = \frac{4}{3}\ell(\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2),$$

quindi

$$\boldsymbol{R}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}_{Q'}}{\partial\theta} = \frac{4}{3}m\ell^2\omega^2\sin\theta\cos\theta,$$

che corrisponde all'espressione in (10.9).
Osserviamo anche che il baricentro B dell'asta, di coordinate

$$\boldsymbol{\chi}_B(\theta) = \ell(\sin\theta\boldsymbol{e}_1 - \cos\theta\boldsymbol{e}_2),$$

non è un punto dell'asse centrale e se sostituiamo $(\vec{\boldsymbol{R}}, B)$ al sistema di forze centrifughe otteniamo un risultato sbagliato:

$$\boldsymbol{R} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_B}{\partial \theta} = m\ell^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta.$$

Esempio 25. Consideriamo un disco omogeneo di massa M e raggio R che può rotolare senza strisciare sull'asse Ox di un piano Oxy. Assumiamo che tale piano ruoti uniformemente attorno all'asse Oy con velocità angolare costante $\omega\hat{\boldsymbol{e}}_2$. Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa s lungo l'asse Ox del baricentro B del disco, calcoliamo la componente lagrangiana della forza centrifuga.

La densità di massa del disco è $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$. Se (r, θ) sono coordinate polari per il disco centrate in B si ha

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\chi}(s; r, \theta) = (s + r\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (R + r\sin\theta)\boldsymbol{e}_2, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial s}(s; r, \theta) = \boldsymbol{e}_1, \\ &\mathbf{f}(s; r, \theta) = -\sigma\omega^2\boldsymbol{e}_2 \times (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{\chi}) = \sigma\omega^2(\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1. \end{aligned}$$

Si trova che

$$Q_s = \int_0^{2\pi}\int_0^R \mathbf{f}(s; r, \theta)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial s}(s; r, \theta)\, dr\, d\theta = \sigma\omega^2 \int_0^{2\pi}\int_0^R (s + r\cos\theta) r\, dr\, d\theta = m\omega^2 s.$$

Esercizio 30. *Dimostrare che nel caso dell'Esempio 25 il baricentro B del disco appartiene all'asse centrale, quindi possiamo sostituire al sistema di forze centrifughe il sistema $(\vec{\boldsymbol{R}}, B)$, dove $\vec{\boldsymbol{R}}$ è la risultante di tali forze.*

Proposizione 60. *Assumiamo che la mappa $\boldsymbol{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}, t)$, che a ogni ogni istante t fornisce coordinate locali sulla varietà delle configurazioni $\mathcal{C}_t$, sia di classe C^2. Una curva $t \mapsto \boldsymbol{q}(t)$ soddisfa le equazioni del principio di D'Alembert* (10.4) *se e solo se essa soddisfa*[2]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}, t) - \frac{\partial T}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = Q_h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), \qquad h = 1, \ldots, n. \tag{10.10}$$

[2] nell'equazione differenziale (10.10) si intende che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_k \partial \dot{q}_h}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}\ddot{q}_k\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{q}_h}.$$

Le (10.10) rappresentano una forma delle **equazioni di Lagrange**.

NO *Dimostrazione.* Le equazioni del principio di D'Alembert si possono scrivere

$$M\ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} = Q_h, \qquad h = 1, \dots, n, \tag{10.11}$$

dove $\ddot{\boldsymbol{x}}$ è data da (10.5). Dobbiamo quindi verificare che lungo le soluzioni di (10.2) si abbia

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = M\ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}, \qquad h = 1, \dots, n. \tag{10.12}$$

Consideriamo l'energia cinetica $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{v} \cdot M\boldsymbol{v}$, con

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}.$$

Per $h = 1, \dots, n$ si ha

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_h} \cdot M\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M\boldsymbol{v}$$

poichè

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h},$$

quindi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M\boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

in cui

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \sum_{h=1}^{n}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_h}\ddot{q}_h\Big) + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \ddot{\boldsymbol{x}}$$

lungo le soluzioni. Inoltre si ha

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_h} \cdot M\boldsymbol{v}.$$

Dalle relazioni

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_k \partial q_h}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial t \partial q_h}, \\
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h \partial t},
\end{aligned}$$

scambiando l'ordine di derivazione si ottiene

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_h}. \tag{10.13}$$

per cui[3]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial T}{\partial \dot q_h} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} \cdot M\ddot{\boldsymbol{x}}.$$

□

Osserviamo che le (10.10) si possono scrivere come sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale. Infatti, dalla relazione

$$T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} \cdot A(\boldsymbol{q},t)\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q},t) \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + c(\boldsymbol{q},t)$$

si ottiene

$$\nabla_{\dot{\boldsymbol{q}}} T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = A(\boldsymbol{q},t)\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q},t),$$

dunque le equazioni di Lagrange si possono scrivere

$$A(\boldsymbol{q},t)\ddot{\boldsymbol{q}} = F(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t), \tag{10.14}$$

con

$$F(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) + \nabla_{\boldsymbol{q}} T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) - \frac{dA}{dt}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t),$$

dove

$$\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{q}} T &= \Big(\frac{\partial T}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial T}{\partial q_n}\Big)^T, & \frac{\partial T}{\partial q_h} &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \frac{\partial A}{\partial q_h}\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial q_h} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial c}{\partial q_h}, \\
\frac{dA}{dt} &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial A}{\partial q_h}\dot q_h + \frac{\partial A}{\partial t}, & \frac{d\boldsymbol{b}}{dt} &= \sum_{h=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial q_h}\dot q_h + \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Poiché la matrice cinetica A è invertibile, introducendo la variabile $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ le (10.14) si possono scrivere come sistema del primo ordine in forma normale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{v}, \\ \dot{\boldsymbol{v}} = A^{-1}(\boldsymbol{q},t)F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v},t). \end{array} \right. \tag{10.15}$$

Definizione 32. *Chiamiamo* **sistemi lagrangiani** *i sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine della forma* (10.10) *per i quali*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^2}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \ \textit{è definita positiva per ogni}\ \boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t.$$

[3] osserviamo che, anche se appaiono alcune derivate terze, grazie alla (10.13) basta avere $F \in C^2$.

10.2 Forze conservative e lagrangiana

Definizione 33. *In un sistema di equazioni di Lagrange della forma* (10.10) *le forze generalizzate* $Q_1, \ldots, Q_n$ *si dicono* **conservative** *se esiste una funzione* $V(\boldsymbol{q}, t)$ *tale che*

$$Q_h(\boldsymbol{q}, t) = -\frac{\partial V}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t), \qquad h = 1, \ldots, n.$$

La funzione V *si chiama energia potenziale delle forze* Q_h.

Se il sistema di forze $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_N$ è conservativo con energia potenziale $\mathcal{V}(\boldsymbol{x})$, cioè si ha

$$\boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}), \quad -\nabla_{\boldsymbol{x}_j}\mathcal{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}), \qquad j = 1, \ldots, N,$$

allora possiamo scegliere

$$V(\boldsymbol{q}, t) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}, t)),$$

infatti

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t) &= -\sum_{j=1}^{N} \nabla_{\boldsymbol{x}_j}\mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}, t)) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t) = \\ &= \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}, t)) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t) = Q_h(\boldsymbol{q}, t). \end{aligned}$$

Nel caso di un sistema lagrangiano conservativo possiamo scrivere le equazioni (10.10) nella forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}, t) - \frac{\partial L}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = 0, \tag{10.16}$$

dove

Definizione 34. *La funzione*

$$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - V(\boldsymbol{q}, t)$$

si dice **lagrangiana***, o funzione di Lagrange.*

Esempio 26. Consideriamo un sistema meccanico costituito da un disco e da un'asta come nell'Esempio 22. Assumiamo anche che sul sistema agisca la forza di gravità, di accelerazione $g\boldsymbol{e}_2$, ed una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla che collega l'estremo libero A dell'asta all'asse Oy mantenendosi sempre parallela ad Ox.

L'energia potenziale delle forze attive è data da

$$V(s,\theta) = MgR + mg(R - \ell\cos\theta) + \frac{1}{2}k(s + 2\ell\sin\theta)^2.$$

Tenendo conto dell'espressione dell'energia cinetica calcolata in (10.1) e trascurando le costanti additive si ha

$$L = T - V = \Big(\frac{3}{4}M + \frac{m}{2}\Big)\dot{s}^2 + \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell\cos\theta\dot{s}\dot{\theta} + mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}k(s + 2\ell\sin\theta)^2,$$

per cui

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} &= \Big(\frac{3}{2}M + m\Big)\dot{s} + m\ell\cos\theta\dot{\theta},\\
\frac{\partial L}{\partial s} &= -k(s + 2\ell\sin\theta),\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\theta} + m\ell\cos\theta\dot{s},\\
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m\ell\sin\theta\dot{s}\dot{\theta} - mg\ell\sin\theta - 2k(s + 2\ell\sin\theta)\ell\cos\theta.
\end{aligned}$$

Concludiamo che le equazioni di Lagrange sono

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{3}{2}M + m\Big)\ddot{s} - m\ell\sin\theta\dot{\theta}^2 + m\ell\cos\theta\ddot{\theta} + k(s + 2\ell\sin\theta) = 0,\\
&\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell\cos\theta\ddot{s} + mg\ell\sin\theta + 2k(s + 2\ell\sin\theta)\ell\cos\theta = 0.
\end{aligned}$$

NO

10.3 Lagrangiane equivalenti

Vale il seguente risultato

Lemma 3. *Sia $F(\boldsymbol{q},t)$ una funzione di classe C^2 e sia*

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Allora si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\Big(\frac{dF}{dt}\Big) - \frac{\partial}{\partial q_h}\Big(\frac{dF}{dt}\Big) = 0, \qquad h = 1,\dots,n.$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\Big(\frac{dF}{dt}\Big) = \frac{\partial F}{\partial q_h},$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\Big(\frac{dF}{dt}\Big) = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_h}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_h}.$$

Inoltre

$$\frac{\partial}{\partial q_h}\Big(\frac{dF}{dt}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial t}.$$

Si conclude usando la regolarità di F.

□

Siano $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$, $F(\boldsymbol{q}, t)$ funzioni di classe C^2. Se definiamo

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = c\, L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \frac{d}{dt}F(\boldsymbol{q}, t), \tag{10.17}$$

con $c \neq 0$ costante, e

$$\frac{d}{dt}F(\boldsymbol{q}, t) = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial F}{\partial q_h}(\boldsymbol{q}, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\boldsymbol{q}, t),$$

allora, dal Lemma 3 segue che L e $\mathcal{L}$ definiscono le stesse equazioni di Lagrange.

Esercizio 31. *In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxz con asse Oz verticale ascendente e si consideri un triangolo rettangolo ABC di altezza h, con angolo retto in A e angolo α in B, il cui lato AB scivola sull'asse Ox con legge oraria $A(t) \equiv (s(t), 0)$, dove $s \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ è una funzione nota del tempo. Sul triangolo può rotolare senza strisciare un disco omogeneo $\mathcal{C}$ di massa m e raggio R. Sul disco agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Usando come coordinata lagrangiana l'ascissa q del punto di contatto P tra disco e triangolo sul lato BC del triangolo*

i) scrivere la lagrangiana L del disco relativa al sistema di riferimento Oxz e la lagrangiana L' relativa a un sistema solidale al triangolo;

ii) trovare una funzione $F(q, t)$ tale che

$$L = L' + \frac{d}{dt}F.$$

Soluzione. Nel riferimento Oxz le coordinate del baricentro G del disco sono

$$x_G(q,t) = s(t) + q\cos\alpha + R\sin\alpha, \qquad z_G(q,t) = h - q\sin\alpha + R\cos\alpha.$$

Nel riferimento $Ax'z'$, con assi Ax', Az' paralleli ad Ax, Az rispettivamente, le coordinate del baricentro G del disco sono

$$x'_G(q,t) = q\cos\alpha + R\sin\alpha, \qquad z'_G(q,t) = h - q\sin\alpha + R\cos\alpha$$

Le lagrangiane del problema nei due riferimenti si scrivono rispettivamente:

$$L = T - V, \qquad L' = T' - V'$$

con

$$T = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot I_G\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}m(\frac{3}{2}\dot{q}^2 + \dot{s}^2 + 2\cos\alpha\dot{s}\dot{q}),$$
$$V = mg(h - q\sin\alpha)$$

e

$$T' = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}'_G|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot I_G\boldsymbol{\omega} = \frac{3}{4}m\dot{q}^2,$$
$$V' = mg(h - q\sin\alpha) + m\ddot{s}(q\cos\alpha + R\sin\alpha).$$

Il secondo termine nell'ultima formula corrisponde all'energia potenziale delle forze apparenti di trascinamento, che possiamo considerare un'unica forza $-m\ddot{s}\boldsymbol{e}_1$ applicata al baricentro G. Dimostriamo quest'ultima affermazione. Sia $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}'} = -\rho\ddot{s}\boldsymbol{e}_1$ la densità di forza di trascinamento, $\rho = m/(\pi R^2)$ la densità di massa del disco $\mathcal{C}$ e $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q};\boldsymbol{x}') \in \mathbb{R}^3$ le coordinate del punto $\boldsymbol{x}'$ del corpo nel riferimento $Ax'z'$ in funzione delle coordinate lagrangiane $\boldsymbol{q}$. La forza generalizzata corrispondente si scrive

$$Q_h = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}'}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q};\boldsymbol{x}')\,\mathbf{dx}' = -\rho\ddot{s}\int_{\mathcal{C}}\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}(\boldsymbol{q};\boldsymbol{x}')\,\mathbf{dx}'\cdot\boldsymbol{e}_1 = -m\ddot{s}\frac{\partial(\boldsymbol{x}_G - \boldsymbol{x}_A)}{\partial q_h}\cdot\boldsymbol{e}_1.$$

Questa forza generalizzata deriva dall'energia potenziale $m\ddot{s}x'_G$, dove

$$x'_G = x_G - x_A = q\cos\alpha + R\sin\alpha.$$

$\square$

NO

10.4 Covarianza delle equazioni di Lagrange

Verifichiamo che la forma delle equazioni

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}. \tag{10.18}$$

resta la stessa se operiamo un cambiamento di coordinate.

Proposizione 61. *Consideriamo un sistema lagrangiano definito da una funzione* $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$. *Sia* $\boldsymbol{q} \mapsto \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{q})$ *un cambiamento di variabili di classe* C^2. *Allora* $t \mapsto \boldsymbol{q}(t)$ *è una soluzione delle equazioni di Lagrange per* L *se e solo se* $t \mapsto \boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{q}(t))$ *è una soluzione delle equazioni di Lagrange per*

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}, t) = L\Big(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{Q}), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{-1}}{\partial \boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q})\dot{\boldsymbol{Q}}, t\Big).$$

Dimostrazione. Si introduce la trasformazione

$$(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \mapsto \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \Big(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{q}), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}, t\Big).$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial}{\partial \dot{Q}_h}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell}\dot{Q}_\ell\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h}$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_h} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big)\frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell \partial Q_h}\dot{Q}_\ell\Big).$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_h} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial}{\partial Q_h}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_\ell}\dot{Q}_\ell\Big) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{\partial \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Big(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_k^{-1}}{\partial Q_h \partial Q_\ell}\dot{Q}_\ell\Big).
\end{aligned}$$

Usando il fatto che $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ è di classe $\mathcal{C}^2$ si ottiene

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{Q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{Q}} = \bigg(\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}\Big)\Big[\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{q}}\Big]^{-1}\bigg) \circ \boldsymbol{\Phi}^{-1}.$$

□

Osservazione 39. *La Proposizione 61 non vale se* $\boldsymbol{\varphi}$ *dipende anche da* t.

Esercizio 32. *Trovare come cambiano le equazioni di Lagrange facendo un cambiamento di coordinate dipendente dal tempo.*

10.5 Energia potenziale generalizzata

SÌ

Diciamo che le componenti lagrangiane delle forze Q_h ammettono un'energia potenziale generalizzata se esiste una funzione $V(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ tale che

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}, t). \tag{10.19}$$

Se esiste una tale funzione V, allora definendo $L = T - V$ le equazioni di Lagrange (10.10) si possono scrivere nella forma (10.16). Notiamo che, se esiste V che soddisfa (10.19), allora si ha

$$V(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = V_0(\boldsymbol{q}, t) + V_1(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), \tag{10.20}$$

con V_i omogenea di grado i $(i = 0, 1)$ nelle $\dot{\boldsymbol{q}}$, infatti per ogni $h = 1, \dots, n$ si ha

NO

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot{q}_h}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}\ddot{q}_k\Big) + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = Q_h.$$

Poiché le forze attive $\boldsymbol{F}_j$ agenti sui punti del sistema possono dipendere solo dalle loro posizioni e velocità e dal tempo, si ha necessariamente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = 0, \qquad h, k = 1, \dots, n. \tag{10.21}$$

Allora, integrando due volte la (10.21), si ottiene

$$V(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \mathbf{a}(\boldsymbol{q}, t) \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + V_0(\boldsymbol{q}, t), \tag{10.22}$$

per certe funzioni $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e V_0. Se le componenti lagrangiane Q_h delle forze ammettono un potenziale generalizzato, allora dalle (10.19), (10.22) si ottiene

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = -\frac{\partial V_0}{\partial \boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}, t) + B(\boldsymbol{q}, t)\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(\boldsymbol{q}, t),$$

dove $B(\boldsymbol{q}, t)$ è una matrice antisimmetrica con coefficienti

$$B_{hk} = \frac{\partial a_h}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_h},$$

infatti

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial \dot{q}_h}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial a_h}{\partial q_k} - \frac{\partial a_k}{\partial q_h}\Big)\dot{q}_k + \frac{\partial a_h}{\partial t} - \frac{\partial V_0}{\partial q_h}.\end{aligned}$$

SÌ

Proposizione 62. *Le forze apparenti ammettono l'energia potenziale generalizzata*

$$V' = m\vec{\boldsymbol{a}}_{O'} \cdot (P - O') - \frac{1}{2} m|\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O')|^2 - m\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (P - O') \cdot \vec{\boldsymbol{v}}', \tag{10.23}$$

Scrivendo i vettori in coordinate nella base $\mathcal{B}$ si ha

$$V' = m\boldsymbol{a}_{O'} \cdot R\boldsymbol{q} - \frac{1}{2} m|\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{q}|^2 - m\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{q} \cdot R\dot{\boldsymbol{q}}, \tag{10.24}$$

in cui $\boldsymbol{q}$ è il vettore delle coordinate cartesiane di $P - O'$ nella base $\mathcal{B}'$ ed $R = (R_{ij})$ con $R_{ij} = \hat{\boldsymbol{e}}'_j \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i$.

NO

Dimostrazione. La differenza delle energie cinetiche, T' nel riferimento Σ' e T nel riferimento Σ, ci fornisce un'espressione per l'energia potenziale delle forze apparenti che agiscono su un punto materiale di massa m. Per dimostrarlo basta scrivere le equazioni di Lagrange di prima specie per il punto materiale in Σ' ed in Σ, utilizzando le stesse coordinate lagrangiane. Assumendo che sul punto non agiscano forze nel riferimento Σ, si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} T' - \frac{\partial}{\partial q_h} T' = Q'_h, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} T - \frac{\partial}{\partial q_h} T = 0, \qquad h = 1, \ldots, n,$$

dove Q'_h sono le componenti lagrangiane delle forze apparenti. Siccome le equazioni devono essere le stesse, per differenza si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}(T' - T) - \frac{\partial}{\partial q_h}(T' - T) = Q'_h \qquad h = 1, \ldots, n.$$

Notiamo che i termini quadratici nelle velocità lagrangiane $\dot{\boldsymbol{q}}$ spariscono, infatti

$$\begin{aligned} T' - T &= \frac{1}{2} m|\dot{\boldsymbol{q}}|^2 - \frac{1}{2} m|\boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{q} + R\dot{\boldsymbol{q}}|^2 = \\ &= -\frac{1}{2} m|\boldsymbol{v}_{O'}|^2 - \frac{1}{2} m|\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{q}|^2 - m\boldsymbol{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{q} + R\dot{\boldsymbol{q}}) - m\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{q} \cdot R\dot{\boldsymbol{q}} \end{aligned}$$

quindi possiamo scegliere $V' = T' - T$.

Utilizziamo adesso il Lemma 3. Il termine $\frac{1}{2} m|\boldsymbol{v}_{O'}|^2$ è una funzione nota solo del tempo e può essere tralasciata. Inoltre si ha

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_{O'} \cdot R\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{a}_{O'} \cdot R\boldsymbol{q} + \boldsymbol{v}_{O'} \cdot (\dot{R}\boldsymbol{q} + R\dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{a}_{O'} \cdot R\boldsymbol{q} + \boldsymbol{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{q} + R\dot{\boldsymbol{q}}),$$

per cui possiamo sostituire

$$-m\boldsymbol{v}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{q} + R\dot{\boldsymbol{q}})$$

con

$$m\boldsymbol{a}_{O'}\cdot R\boldsymbol{q} - m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_{O'}\cdot R\boldsymbol{q})$$

e trascurare il secondo termine perché è una derivata totale di una funzione di $(\boldsymbol{q},t)$. Infatti se

$$\tilde{V} = V + \frac{d}{dt}F,$$

dove $F = F(\boldsymbol{q},t)$, e si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q},$$

allora vale anche

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial\tilde{V}}{\partial\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q}.$$

La dimostrazione è la stessa fatta nella Sezione10.3.

□

Osservazione 40. *In generale non si riesce a distinguere tra i termini relativi alle forze di trascinamento e quelli della forza di Coriolis.*

Proposizione 63. *Nel caso particolare in cui $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ è costante possiamo definire separatamente un'energia potenziale per le forze di trascinamento $-m\vec{\boldsymbol{a}}_{O'}$, $-m\vec{\boldsymbol{\omega}}\times(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times(P-O'))$, e per la forza di Coriolis $-2m\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{v}}'$.*

Dimostrazione. Consideriamo un punto materiale di massa m con posizione $P-O'$, velocità $\vec{\boldsymbol{v}}'$ e accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}'$ relative a Σ', rappresentate dai vettori $\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}\in\mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}'$. Sia inoltre $\boldsymbol{\omega}$ il vettore delle coordinate della velocità angolare in $\mathcal{B}$.

Usiamo il risultato seguente

Lemma 4. *Se $\boldsymbol{\omega}$ è costante, esiste una matrice costante di rotazione R_0 tale che*

$$R_0R^T\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}, \tag{10.25}$$

dove R è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. Se il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ è costante in Σ allora è costante anche in Σ'. Scegliamo $R_0 = R(0)$. Consideriamo il sistema di riferimento $\Sigma'' = O'\hat{\boldsymbol{e}}_1''\hat{\boldsymbol{e}}_2''\hat{\boldsymbol{e}}_3''$, i cui versori $\hat{\boldsymbol{e}}_h''$ sono rappresentati in $\mathcal{B}$ da

$$\boldsymbol{e}_h''(t) = R_0^T\boldsymbol{e}_h'(t), \qquad h = 1,2,3.$$

Poiché vale $\boldsymbol{e}_h'(0) = R_0\boldsymbol{e}_h$, si ha $\boldsymbol{e}_h''(0) = \boldsymbol{e}_h$ per $h = 1,2,3$.

Il vettore $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ è anche la velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ, quindi $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ è costante anche in Σ''. Le coordinate di $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ nella base $\mathcal{B}''$ sono date da $R_0R^T\boldsymbol{\omega}$; si ha dunque

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times R_0R^T\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}.$$

Poiché per ipotesi si ha $R_0R^T(0) = I$, si ottiene

$$\boldsymbol{\omega} \times R_0R^T\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0},$$

da cui, sfruttando il fatto che R_0R^T è un'isometria e che $R(t)$ è continua, si ottiene la (10.25).

□

Nel seguito assumeremo per semplicità che $R_0 = I$, cioè che al tempo $t = 0$ l'orientazione del riferimento Σ' coincida con quella di Σ. In questa ipotesi, la (10.25) si può scrivere come

$$R\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}. \tag{10.26}$$

Siano $\boldsymbol{q}$ le coordinate cartesiane di $P - O'$ in $\mathcal{B}'$. Per ciascun termine $\boldsymbol{F}$ delle forze apparenti

$$-m\ddot{\boldsymbol{x}}_{O'}, \quad -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{q}), \quad -2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{q}}$$

cerchiamo una funzione V tale che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = Q_h = \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}, \tag{10.27}$$

con

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{x}_{O'}(t) + R(t)\boldsymbol{q},$$

per cui

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} = R\boldsymbol{e}_h = \boldsymbol{e}'_h,$$

e la (10.27) diventa

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}'_h.$$

Quindi al membro destro delle (10.27) dobbiamo ottenere le componenti delle forze apparenti nella base $\mathcal{B}'$.

La forza di trascinamento dovuta al moto di O' è

$$\boldsymbol{F}_{tr} = -m\ddot{\boldsymbol{x}}_{O'}.$$

Tale forza ammette l'energia potenziale

$$V_{tr}(\boldsymbol{q},t) = m\ddot{\boldsymbol{x}}_{O'} \cdot R\boldsymbol{q}, \tag{10.28}$$

infatti

$$-\frac{\partial}{\partial q_h} V_{tr} = -m\ddot{\boldsymbol{x}}_{O'} \cdot \boldsymbol{e}'_h.$$

La forza centrifuga è

$$\boldsymbol{F}_{centr} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{q}).$$

Tale forza ammette l'energia potenziale[4]

$$V_{centr}(\boldsymbol{q},t) = -\frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{q}|^2 = -\frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}|^2, \tag{10.29}$$

in cui abbiamo usato (10.26) ed il fatto che R è un'isometria. Infatti

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_{centr}}{\partial q_h} &= m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_h = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{e}_h = \\ &= -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{e}'_h = \boldsymbol{F}_{centr} \cdot \boldsymbol{e}'_h. \end{aligned}$$

La forza di Coriolis è

$$\boldsymbol{F}_{Cor} = -2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{q}}.$$

Tale forza ammette l'energia potenziale generalizzata

$$V_{Cor}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = mR\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{q}} = m\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{q}}. \tag{10.30}$$

Infatti

$$\frac{\partial V_{Cor}}{\partial q_h} = m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{e}_h = m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{e}'_h,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial V_{Cor}}{\partial \dot{q}_h} &= m\frac{d}{dt}\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{e}_h = \\ &= m\dot{\boldsymbol{q}} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{e}_h = -m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{e}'_h, \end{aligned}$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V_{Cor}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V_{Cor}}{\partial q_h} = -2m\boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{e}'_h = \boldsymbol{F}_{Cor} \cdot \boldsymbol{e}'_h.$$

□

Osservazione 41. *Dalle espressioni a destra nelle* (10.29), (10.30) *si vede che in realtà queste energie potenziali non dipendono dal tempo.*

[4] Dalla seconda espressione di V_{centr} si nota che in effetti essa non dipende da t.

Consideriamo un sistema di N punti materiali $P_1, \dots, P_N$ e assumiamo che su di essi agiscano delle forze $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$ che ammettono un'energia potenziale generalizzata, cioè che esista una funzione $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$ take che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}_j} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \boldsymbol{x}_j} = \boldsymbol{F}_j, \qquad j = 1, \dots, N.$$

Se il sistema di punti è soggetto a vincoli olonomi e a ogni istante t la mappa

$$\boldsymbol{q} \mapsto \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}, t)$$

rappresenta una parametrizzazione locale della varietà delle configurazioni $\mathcal{C}_t$, allora la funzione

$$V(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \mathcal{V}(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}, t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), t)$$

è un'energia potenziale generalizzata per le forze agenti sul sistema vincolato, infatti per $h = 1, \dots, n$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\Big)\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_h}\Big) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_h} \\
&= \Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\Big) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big]\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}\Big) - \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_h}\Big] \\
&= \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}, t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = Q_h(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t),
\end{aligned}$$

poiché

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}, \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial q_h}\Big) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_h}.$$

sì

Esempio 27. Calcoliamo l'energia potenziale della forza centrifuga per il sistema dell'Esempio 24. Si ha

$$V(\theta) = \int_0^{2\ell} -\frac{1}{2}\lambda|\omega \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{\chi}|^2\, dr,$$

dove

$$\lambda = \frac{m}{2\ell}, \qquad \boldsymbol{\chi}(\theta; r) = 2r(\sin\theta\, \boldsymbol{e}_1 - \cos\theta\, \boldsymbol{e}_2),\ \ r \in [0, 2\ell],$$

sono rispettivamente la densità di massa dell'asta ed il vettore delle coordinate di un generico punto dell'asta. Quindi

$$V(\theta) = -\frac{1}{2}\lambda\omega^2 \int_0^{2\ell} r^2 \sin^2\theta\, dr = -\frac{2}{3}m\omega^2\ell^2\sin^2\theta.$$

Si verifica facilmente che

$$-\frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_\theta,$$

in cui la forza generalizzata Q_θ è data dalla (10.9).

SĪ **Esempio 28.** (*Problema dei tre corpi ristretto circolare piano in un sistema di riferimento ruotante*) Consideriamo un punto materiale P di massa μ che si muove in un piano sotto l'azione della forza di attrazione gravitazionale prodotta da due punti materiali P_1, P_2 di masse m_1, m_2 molto più grandi di μ. Assumiamo che il moto di P_1 e P_2 non sia influenzato dalla presenza di P e che questi punti si muovano nello stesso piano di P su orbite circolari, soluzioni del problema dei due corpi, centrate nel loro baricentro O. Consideriamo un riferimento $\Sigma = Oxyz$, dove Oxy è il piano del moto dei punti considerati. Sia d la distanza $|P_1 - P_2|$ e G la costante gravitazionale di Newton. Possiamo scegliere le unità di misura in modo che

$$d = 1, \qquad m_1 + m_2 = 1, \qquad G = 1.$$

Poniamo $m = m_2$ e consideriamo un riferimento $\Sigma' = O\xi\eta\zeta$, che si muove rispetto a Σ in modo che $Oz' = Oz$ e la direzione del vettore $P_2 - P_1$ corrisponda a quella dell'asse $O\xi$ (vedi figura). La velocità angolare di Σ' rispetto a Σ è $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega\hat{\boldsymbol{e}}_3$, con $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ perpendicolare al piano del moto, e con le unità di misura scelte si ha[5]

$$\omega = 1.$$

Inoltre, usando l'integrale del centro di massa, si ha

$$|P_1 - O| = m, \qquad |P_2 - O| = 1 - m.$$

Siano $\boldsymbol{q} = (\xi, \eta, 0)$ le coordinate del punto P nel riferimento Σ'. L'energia potenziale per unità di massa μ delle forze che agiscono su P è

$$\begin{aligned} V &= -\frac{(1-m)}{|P-P_1|} - \frac{m}{|P-P_2|} - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}|^2 - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{q} \times \dot{\boldsymbol{q}} \\ &= -\frac{(1-m)}{\sqrt{(\xi+m)^2+\eta^2}} - \frac{m}{\sqrt{(\xi-1+m)^2+\eta^2}} - \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) - (\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}). \end{aligned}$$

NO

10.6 Funzione di dissipazione di Rayleigh

Dato un sistema di N punti materiali dividiamo le forze attive in due categorie, quelle che ammettono un'energia potenziale generalizzata V e quelle che non la ammettono. Possiamo scrivere le equazioni di Lagrange nella forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = Q_h, \qquad h = 1, \dots, n \tag{10.31}$$

[5] per dimostrarlo basta usare la terza legge di Keplero.

dove $L = T - V$ e Q_h sono le componenti lagrangiane delle forze che non ammettono energia potenziale. Se le Q_h sono prodotte da forze dissipative della forma

$$\vec{\boldsymbol{F}}_j = -k\vec{\boldsymbol{v}}_j, \qquad j = 1, \dots, N$$

possiamo considerare la **funzione di dissipazione di Rayleigh**

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}k\sum_{j=1}^{N}|\boldsymbol{v}_j|^2, \tag{10.32}$$

dove $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_j(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ sono le velocità dei punti del sistema in funzione delle posizioni e velocità lagrangiane. Osserviamo che si ha

$$\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{q}, t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), t) = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \boldsymbol{v}_j}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t),$$

per cui le forze generalizzate si scrivono

$$Q_h = \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{F}_j\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \boldsymbol{v}_j}\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_j}{\partial q_h} = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \boldsymbol{v}_j}\frac{\partial \boldsymbol{v}_j}{\partial \dot{q}_h} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h}.$$

In questo caso le (10.31) diventano

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h} = 0, \qquad h = 1, \dots, n.$$