Capitolo 1

Sistemi meccanici discreti non vincolati

Introduciamo gli strumenti per descrivere il moto di un sistema di punti materiali $P_1, \dots, P_N$ dotati di masse $m_1, \dots, m_N$, soggetti a forze esterne assegnate, che si possono muovere liberamente nello spazio ambiente.

1.1 Spazio, tempo e sistemi di riferimento

Assumiamo che lo spazio ambiente sia uno spazio euclideo tridimensionale, che indichiamo con il simbolo $\mathbb{E}^3$. Esso è dunque uno spazio affine reale di dimensione tre a cui è associato[1] uno spazio vettoriale $\mathbb{V}^3$ dotato di un prodotto scalare, che indichiamo con $\cdot$, cioè di una forma bilineare simmetrica definita positiva $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{R}$. Possiamo introdurre su $\mathbb{V}^3$ la norma

$$|\vec{\boldsymbol{u}}| = \sqrt{\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}}, \qquad \vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{V}^3$$

e, con questa, la distanza tra i punti di $\mathbb{E}^3$:

$$d(P, Q) = |P - Q|, \qquad P, Q \in \mathbb{E}^3.$$

Introduciamo anche lo spazio prodotto $\mathbb{G} = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$, che chiamiamo **spazio–tempo di Galileo**. Gli elementi di $\mathbb{G}$ si chiamano eventi. Si può pensare $\mathbb{G}$ come composto da fibre della forma $\mathbb{E}^3 \times \{t\}$, al variare di $t \in \mathbb{R}$. A queste fibre, che chiamiamo spazi degli eventi simultanei, possiamo attribuire la stessa struttura euclidea di $\mathbb{E}^3$. Possiamo quindi misurare la distanza $\tilde{d}$ tra eventi simultanei tramite la formula

$$\tilde{d}((P, t), (Q, t)) = d(P, Q), \qquad (P, t), (Q, t) \in \mathbb{G}.$$

[1]scelti comunque due punti $P, Q \in \mathbb{E}^3$ la loro differenza $P - Q$ è un vettore di $\mathbb{V}^3$. Inoltre, scelti comunque un punto $Q \in \mathbb{E}^3$ e un vettore $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{V}^3$ la loro somma $Q + \vec{\boldsymbol{v}}$ è un punto $P \in \mathbb{E}^3$ e si ha $P - Q = \vec{\boldsymbol{v}}$. In questo contesto la somma $P + Q$ di due punti di $\mathbb{E}^3$ non ha senso.

Prodotto vettoriale

Chiamiamo prodotto vettoriale (o prodotto vettore) su $\mathbb{V}^3$ un'applicazione $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ bilineare, antisimmetrica, che denotiamo con $\times$, tale che

i) se $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = 0$ allora $|\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}| = |\vec{\boldsymbol{u}}||\vec{\boldsymbol{v}}|$,

ii) $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$,

per ogni $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{V}^3$.

Osservazione 1. *Dalla proprietà antisimmetrica segue che*

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \qquad \forall \vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{V}^3. \tag{1.1}$$

Proposizione 1. *Sullo spazio $\mathbb{V}^3$, dotato del prodotto scalare $\cdot$, esistono solamente due prodotti vettoriali $\times', \times''$, il cui risultato differisce solo per il segno e, scelta una base ortonormale $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$, risulta*

$$\begin{array}{lll} \hat{\boldsymbol{e}}_1 \times' \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_3, & \hat{\boldsymbol{e}}_2 \times' \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_1, & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \times' \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_2, \\ \hat{\boldsymbol{e}}_1 \times'' \hat{\boldsymbol{e}}_2 = -\hat{\boldsymbol{e}}_3, & \hat{\boldsymbol{e}}_2 \times'' \hat{\boldsymbol{e}}_3 = -\hat{\boldsymbol{e}}_1, & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \times'' \hat{\boldsymbol{e}}_1 = -\hat{\boldsymbol{e}}_2. \end{array} \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Utilizziamo il seguente risultato:

Lemma 1. *Le relazioni(1.2) definiscono due applicazioni bilineari e antisimmetriche $\times', \times''$ che soddisfano le proprietà i), ii).*

Dimostrazione. Verifichiamo la i) mostrando che vale la relazione

$$|\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}|^2 = |\vec{\boldsymbol{u}}|^2 |\vec{\boldsymbol{v}}|^2 - (\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})^2, \qquad \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{V}^3. \tag{1.3}$$

Assumiamo che, fissata una base ortonormale $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$, valga la prima delle (1.2). Dati $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{V}^3$ scriviamo

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{3} u_i \hat{\boldsymbol{e}}_i, \qquad \vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{j=1}^{3} v_j \hat{\boldsymbol{e}}_j,$$

per certi $u_i, v_j \in \mathbb{R}$, per cui

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{u}} \times' \vec{\boldsymbol{v}} &= \sum_{i,j=1}^{3} u_i v_j \hat{\boldsymbol{e}}_i \times' \hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_{1 \le i < j \le 3} (u_i v_j - u_j v_i) \hat{\boldsymbol{e}}_i \times' \hat{\boldsymbol{e}}_j \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{\boldsymbol{e}}_3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \hat{\boldsymbol{e}}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \hat{\boldsymbol{e}}_2, \end{aligned}$$

quindi

$$|\vec{\boldsymbol{u}} \times' \vec{\boldsymbol{v}}|^2 = (u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2.$$

Facendo alcune cancellazioni si ottiene

$$\begin{aligned}|\vec{\boldsymbol{u}} \times' \vec{\boldsymbol{v}}|^2 - |\vec{\boldsymbol{u}}|^2|\vec{\boldsymbol{v}}|^2 &= -2(u_1u_2v_1v_2 + u_1u_3v_1v_3 + u_2u_3v_2v_3) - u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2 - u_3^2v_3^2 \\ &= -(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2.\end{aligned}$$

Inoltre, poiché la base $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$ è ortonormale, si ha

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}},$$

che dimostra (1.3).

Visto che le applicazioni $\times'$ e $\cdot$ sono bilineari, per verificare la ii) basta notare che essa vale sugli elementi della base ortonormale.[2] Infatti, in tal caso per ogni $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{V}^3$ si ha

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{u}} \times' \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} &= \Big(\sum_{i=1}^3 u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \times' \sum_{j=1}^3 v_j\hat{\boldsymbol{e}}_j\Big) \cdot \sum_{h=1}^3 w_h\hat{\boldsymbol{e}}_h = \sum_{i,j,h=1}^3 u_iv_jw_h\hat{\boldsymbol{e}}_i \times' \hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_h \\ &= \sum_{i,j,h=1}^3 u_iv_jw_h\hat{\boldsymbol{e}}_j \times' \hat{\boldsymbol{e}}_h \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_i = \Big(\sum_{j=1}^3 v_j\hat{\boldsymbol{e}}_j \times' \sum_{h=1}^3 w_h\hat{\boldsymbol{e}}_h\Big) \cdot \sum_{i=1}^3 u_i\hat{\boldsymbol{e}}_i = \vec{\boldsymbol{v}} \times' \vec{\boldsymbol{w}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}.\end{aligned}$$

Se vale la seconda delle (1.2) si procede in modo analogo.

□

Concludiamo adesso la dimostrazione della Proposizione 1. Consideriamo un'applicazione $\mathbb{V}^3 \times \mathbb{V}^3 \to \mathbb{V}^3$ bilineare e antisimmetrica con le proprietà i), ii) del prodotto vettore elencate sopra. Per ogni $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{V}^3$, dalla ii) e da (1.1) si ha

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} \in \vec{\boldsymbol{v}}^\perp, \qquad \forall \vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{V}^3, \tag{1.4}$$

dove

$$\vec{\boldsymbol{v}}^\perp = \{\vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{V}^3 : \vec{\boldsymbol{w}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = 0\}.$$

Data una base ortornormale $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$ di $\mathbb{V}^3$, da i) segue che $|\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2| = 1$ e da (1.4) si ha

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 \in \hat{\boldsymbol{e}}_1^\perp \cap \hat{\boldsymbol{e}}_2^\perp = \mathrm{span}(\hat{\boldsymbol{e}}_3),$$

quindi

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \pm\hat{\boldsymbol{e}}_3.$$

[2]si usa la proprietà antisimmetrica per dire che $\hat{\boldsymbol{e}}_j \times \hat{\boldsymbol{e}}_j = \vec{\boldsymbol{0}}$, $j = 1, 2, 3$.

Inoltre, se $\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 = +\hat{\boldsymbol{e}}_3$, si ha anche

$$\hat{\boldsymbol{e}}_2 \times \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_1, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_3 \times \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_2. \tag{1.5}$$

Infatti, ragionando come prima si ottiene $\hat{\boldsymbol{e}}_2 \times \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \pm\hat{\boldsymbol{e}}_1$ e, se valesse $\hat{\boldsymbol{e}}_2 \times \hat{\boldsymbol{e}}_3 = -\hat{\boldsymbol{e}}_1$, usando ii) avremmo la seguente contraddizione:

$$-1 = \hat{\boldsymbol{e}}_2 \times \hat{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_3 = 1.$$

La seconda relazione in (1.5) si dimostra in modo simile. Procedendo in modo analogo si ottiene che se invece vale $\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 = -\hat{\boldsymbol{e}}_3$ si ha

$$\hat{\boldsymbol{e}}_2 \times \hat{\boldsymbol{e}}_3 = -\hat{\boldsymbol{e}}_1, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_3 \times \hat{\boldsymbol{e}}_1 = -\hat{\boldsymbol{e}}_2.$$

□

Nel seguito considereremo solo terne ortonormali **levogire**, cioè terne che soddisfano la cosiddetta **regola della mano destra**: se distendiamo il pollice, l'indice e il medio della mano destra in modo che queste dita descrivano tre direzioni ortogonali seguendo la conformazione naturale della mano, esse indicano rispettivamente l'orientazione dei vettori $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3$ di una terna levogira.

Data una terna levogira, conveniamo di scegliere il prodotto vettoriale $\times'$ su $\mathbb{V}^3$, che indicheremo con $\times$ per semplicità. Varranno quindi le formule

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_3, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_2 \times \hat{\boldsymbol{e}}_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_1, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_3 \times \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_2. \tag{1.6}$$

Esercizio 1. *Mostrare che vale la seguente proprietà (formula del prodotto triplo):*

$$(\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) \times \vec{\boldsymbol{w}} = (\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}})\,\vec{\boldsymbol{v}} - (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}})\,\vec{\boldsymbol{u}}, \qquad \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{V}^3. \tag{1.7}$$

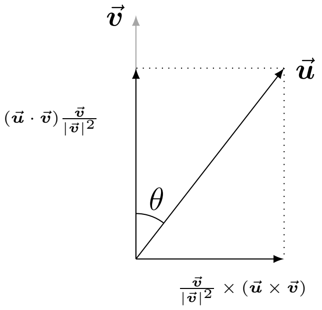
Suggerimento: basta verificarlo sugli elementi di una base ortonormale e usare la bilinearità del prodotto vettore e del prodotto scalare.

Notiamo che il prodotto vettoriale non è associativo, infatti dalla formula del prodotto triplo e dalla proprietà antisimmetrica otteniamo

$$(\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) \times \vec{\boldsymbol{w}} - \vec{\boldsymbol{u}} \times (\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}) = (\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\,\vec{\boldsymbol{w}} - (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}})\,\vec{\boldsymbol{u}}$$

che in generale è non nullo.

Dato $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{V}^3$, ogni vettore $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{V}^3$ si può scomporre in modo unico come combinazione lineare di due vettori ortogonali, uno dei quali è parallelo a $\vec{\boldsymbol{v}}$:



$$\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{v}}|^2}[(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times (\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}})], \qquad (1.8)$$

infatti

$$\vec{\boldsymbol{v}} \times (\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) = |\vec{\boldsymbol{v}}|^2 \vec{\boldsymbol{u}} - (\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})\vec{\boldsymbol{v}}.$$

Il termine $(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})/|\vec{\boldsymbol{v}}|$ è la proiezione ortogonale di $\vec{\boldsymbol{u}}$ lungo $\vec{\boldsymbol{v}}$ e l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ tra $\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ è definito da

$$\cos\theta = \frac{\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}{|\vec{\boldsymbol{u}}||\vec{\boldsymbol{v}}|}. \qquad (1.9)$$

Dalle relazioni (1.3), (1.9) si ottiene

$$|\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}| = |\vec{\boldsymbol{u}}||\vec{\boldsymbol{v}}|\sqrt{1 - \cos^2\theta} = |\vec{\boldsymbol{u}}||\vec{\boldsymbol{v}}|\sin\theta.$$

Dati

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

vettori di $\mathbb{R}^3$, introduciamo il prodotto scalare

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{h=1}^{3} x_h y_h,$$

e il prodotto vettoriale

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\boldsymbol{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\boldsymbol{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\boldsymbol{e}_3,$$

dove

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Osserviamo che valgono le formule

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2.$$

Sistemi di riferimento

La descrizione del moto di un sistema di punti materiali richiede l'introduzione di un sistema di riferimento, che permetta di individuare la posizione dei punti nello spazio ambiente in cui avviene il moto.

Un sistema di riferimento (o più brevemente un riferimento) in $\mathbb{E}^3$ è una mappa continua

$$t \mapsto \Sigma(t) = \big(O(t), \hat{\boldsymbol{e}}_1(t), \hat{\boldsymbol{e}}_2(t), \hat{\boldsymbol{e}}_3(t)\big) \in \mathbb{E}^3 \times (\mathbb{V}^3)^3$$

definita su $\mathbb{R}$ o su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, in cui $O = O(t) \in \mathbb{E}^3$ si chiama origine del riferimento, ed i vettori $\hat{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\boldsymbol{e}}_j(t) \in \mathbb{V}^3$, che indicano le direzioni degli assi, sono tali che

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i(t) \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j(t) = \delta_{ij} \qquad \forall i, j, \ \forall t,$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker, che vale 1 per $i = j$, 0 per $i \neq j$.

Per indicare gli elementi di un sistema di riferimento Σ useremo la notazione più semplice $O\,\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3$, oppure $Oxyz$. Nel caso del moto in un piano scriveremo anche $O\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2$, oppure Oxy, per indicare gli elementi del riferimento in tale piano, intendendo che il vettore $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ è ortogonale al piano e la terna $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$ soddisfa le relazioni (1.6).

Rappresentazione in coordinate

Dato un punto $P \in \mathbb{E}^3$ e un riferimento $\Sigma = O\,\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3$, possiamo associare in modo unico a tale punto un vettore di coordinate in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{E}^3 \ni P \longleftrightarrow \vec{\boldsymbol{x}}_P = P - O = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \in \mathbb{V}^3 \longleftrightarrow \boldsymbol{x}_P = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3, \quad (1.10)$$

dove il simbolo 'T' indica l'operazione di trasposizione, cioè $\boldsymbol{x}_P$ è un vettore colonna. In seguito, nella scrittura delle formule, utilizzeremo sia la notazione in $\mathbb{V}^3$ (indicando i vettori con un simbolo in grassetto con la freccetta sopra, o come differenza tra punti) che quella in coordinate in $\mathbb{R}^3$ (simbolo in grassetto senza freccetta).

1.2 Descrizione del moto

Il moto di un punto $P \in \mathbb{E}^3$ è una mappa

$$t \mapsto P(t) \in \mathbb{E}^3 \qquad (1.11)$$

definita su $\mathbb{R}$ o su un suo intervallo.
Dato il moto $P(t)$ e un riferimento $\Sigma = O\,\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3$, possiamo definire ad ogni istante t la posizione di P relativa a Σ come

$$\vec{\boldsymbol{x}}_P = P - O = \sum_{i=1}^{3} x_i\, \hat{\boldsymbol{e}}_i,$$

dove $x_i = x_i(t)$ sono le coordinate di P al tempo t in Σ. Il moto di P è anche dato dalla mappa $t \mapsto \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ delle sue coordinate al variare del tempo. Se esistono le derivate prima e seconda di $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, possiamo definire la velocità e l'accelerazione di P relativa a Σ rispettivamente come

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{v}}_P = \frac{d}{dt}(P - O)\Big|_\Sigma &= \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i\, \hat{\boldsymbol{e}}_i, \\ \vec{\boldsymbol{a}}_P = \frac{d^2}{dt^2}(P - O)\Big|_\Sigma &= \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i\, \hat{\boldsymbol{e}}_i. \end{aligned}$$

Tramite la (1.10) possiamo identificare queste quantità con i rispettivi vettori delle loro coordinate in $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{x}_P = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad \boldsymbol{v}_P = \dot{\mathbf{x}}_P = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T, \quad \boldsymbol{a}_P = \ddot{\mathbf{x}}_P = (\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)^T.$$

Nel seguito eviteremo di scrivere l'indice P quando sarà chiaro il punto a cui ci riferiamo, quindi ad esempio scriveremo $\vec{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}$ al posto di $\vec{\boldsymbol{x}}_P, \boldsymbol{x}_P$.

L'operazione di derivata temporale di una mappa vettoriale $t \mapsto \vec{\boldsymbol{u}}(t) \in \mathbb{V}^3$ dipende dalla base in cui si scrivono le componenti e quindi dalla scelta del riferimento. Utilizzeremo la notazione $\frac{d\vec{\boldsymbol{u}}}{dt}\big|_\Sigma$ per indicare esplicitamente tale dipendenza.

1.3 Le equazioni del moto

Le forze

Dato un sistema di N punti materiali e fissato un riferimento $\Sigma = O\,\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3$ assumiamo che la forza agente sul punto P_i sia esprimibile da una funzione

$$\vec{\boldsymbol{F}}_i : (\mathbb{V}^3)^N \times (\mathbb{V}^3)^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{V}^3$$

che dipende solo dalle posizioni $\vec{\boldsymbol{x}}_i = P_i - O$ e dalle velocità $\vec{\boldsymbol{v}}_i = \frac{d}{dt}(P_i - O)\big|_\Sigma$ dei punti del sistema e dal tempo t, quindi

$$\vec{\boldsymbol{F}}_i = \vec{\boldsymbol{F}}_i(\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_N, \vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_N, t).$$

In coordinate nel riferimento Σ questa si scrive come una funzione

$$\boldsymbol{F}_i : (\mathbb{R}^3)^N \times (\mathbb{R}^3)^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

delle variabili $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N, t$.

Nel Capitolo 4 mostreremo come cambiano le forze agenti sui punti P_i al variare del sistema di riferimento scelto.

Le equazioni di Newton

Il principio del **determinismo meccanicistico** ci dice che la conoscenza dello stato cinetico (posizione e velocità) di un sistema di N punti materiali ad un certo istante permette di determinare tutta la sua evoluzione temporale.

Dato un sistema formato dai punti $P_i, i = 1, \ldots, N$, di masse m_i, soggetti alle forze $\vec{\boldsymbol{F}}_i$ nel sistema di riferimento Σ, assumiamo che valgano le equazioni di Newton (*secondo principio della Dinamica*). Più precisamente, siano

$$\vec{\boldsymbol{x}} = (\vec{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_N), \qquad \vec{\boldsymbol{v}} = (\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_N)$$

i vettori delle posizioni e velocità degli N punti. Se

$$\vec{\boldsymbol{F}}_i = \vec{\boldsymbol{F}}_i(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{v}}, t)$$

è la forza agente sul punto P_i, $i = 1, \ldots, N$, allora si assume che il moto $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ sia soluzione del sistema di equazioni differenziali del secondo ordine

$$m_i \vec{\boldsymbol{a}}_i = \vec{\boldsymbol{F}}_i(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{v}}, t) \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{1.12}$$

oppure, in coordinate in Σ,

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.13}$$

Le equazioni precedenti si possono scrivere come sistema del primo ordine introducendo le incognite $\boldsymbol{v}_i$:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{v}_i \\ \dot{\boldsymbol{v}}_i = \frac{1}{m_i} \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1.14}$$

Il sistema (1.14) insieme alle posizioni e velocità dei punti a un certo istante iniziale definiscono un problema di Cauchy. L'esistenza e l'unicità di una soluzione di questo problema in un intorno del tempo iniziale è assicurata dalla teoria delle equazioni differenziali se le funzioni $\boldsymbol{F}_i$ sono, ad esempio, di classe C^1.

Esercizio 2. *Trasformare in un sistema del primo ordine le equazioni di Newton*

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -y\dot{x}, \\ m\ddot{y} = x^2 + x\dot{y}. \end{cases}$$

1.4 I riferimenti inerziali

Trattiamo adesso i sistemi di riferimento inerziali, nei quali '*ogni corpo persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme fino a quando non sia costretto a mutare il suo stato dall'azione di una forza.*'[3] Questa è la formulazione che Newton dà al suo primo principio della Dinamica, o principio di inerzia.

[3] I. Newton, da *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687). 'Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.'

Trasformazioni di Galileo

Consideriamo l'insieme $\mathcal{G}$ delle trasformazioni affini dello spazio-tempo di Galileo $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}$ che conservano gli intervalli di tempo tra due eventi, con la loro orientazione, e la distanza tra eventi simultanei. Fissato un sistema di riferimento, possiamo identificare lo spazio-tempo di Galileo con lo spazio delle sue coordinate $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ e considerare $\mathcal{G}$ agente su quest'ultimo.

Sia $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine $n \in \mathbb{N}$ a coefficienti reali. Introduciamo l'insieme

$$O(3) = \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3) : AA^T = A^T A = I\}$$

delle matrici ortogonali di ordine 3, dove I è la matrice identità. Osserviamo che, per $A \in O(3)$, si ha $1 = \det(AA^T) = (\det A)^2$, per cui $\det A = \pm 1$. Denotiamo con $SO(3)$ l'insieme delle matrici di $O(3)$ che hanno determinante uguale a 1.

Proposizione 2. (**Eulero**) *Gli elementi di $SO(3)$ diversi dall'identità sono matrici di rotazione attorno ad un asse passante per l'origine.*

Dimostrazione. Mostriamo che ogni matrice $R \in SO(3)$ ha l'autovalore 1. Per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, da $R\boldsymbol{x} \cdot R\boldsymbol{x} = R^T R\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$ segue che $|R\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$, cioè R è una **isometria**. Dunque se λ è un autovalore di R si ha $|\lambda| = 1$. Vale inoltre la relazione seguente:

$$\det(R - I) = \det R^T \det(R - I) = \det(R^T(R - I)) = \det(I - R^T) = \det(I - R),$$

dove abbiamo usato il fatto che $\det(R^T) = \det(R) = 1$ e il teorema di Binet.[4] Se A è una matrice di ordine 3, per le proprietà dei determinanti si ha

$$\det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det A.$$

Concludo che

$$\det(R - I) = 0,$$

quindi R ha l'autovalore $\lambda_1 = 1$. Gli altri autovalori λ_2, λ_3 devono soddisfare le condizioni

$$\lambda_2 \lambda_3 = 1, \qquad |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1,$$

quindi si hanno 3 casi:[5] i) $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, ii) $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, iii) $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_2 = \mu + i\nu, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\nu \neq 0$.

Nel caso i) si ha $R = I$, cioè R rappresenta la rotazione che lascia invariato ogni elemento di $\mathbb{R}^3$.

[4] per ogni coppia di matrici quadrate A, B dello stesso ordine si ha $\det(AB) = \det A \det B$.

[5] $\overline{z}$ indica il numero complesso coniugato a $z \in \mathbb{C}$.

Se $R \neq I$ l'autospazio V_1 relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ ha dimensione uno perché, se avessimo $\dim V_1 = 2$, potremmo completare l'insieme $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ composto da due autovettori ortonormali di V_1 ad una base ortonormale $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e, in questa base, la matrice associata alla trasformazione lineare definita da R sarebbe diagonale. Infatti i suoi coefficienti sono dati da $\boldsymbol{x}_i \cdot R\boldsymbol{x}_j$ e si ha

$$\boldsymbol{x}_i \cdot R\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = 0,$$

se $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$ con $i \neq j$. Dato che $\det R = 1$ si avrebbe quindi che $R = I$, contro l'ipotesi fatta. Quindi ogni matrice $R \in SO(3)$ diversa dall'identità ha esattamente un asse di punti fissi (*asse di rotazione*).

Nel caso ii) l'autospazio V_{-1} di $\lambda_2 = -1$ ha dimensione 2. Infatti, due autovettori unitari $\boldsymbol{x}_1 \in V_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in V_{-1}$ relativi a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ sono ortogonali poiché

$$\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 = R^T R\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 = R\boldsymbol{x}_2 \cdot R\boldsymbol{x}_1 = -\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1.$$

Come prima, possiamo completare $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ e, in questa base, la matrice associata alla trasformazione definita da R è diagonale e necessariamente della forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quindi R rappresenta la rotazione di π attorno all'asse corrispondente alla direzione di $\boldsymbol{x}_1$.

Nel caso iii) gli autovettori relativi a $\lambda_2 = \mu + i\nu$, $\lambda_3 = \mu - i\nu$ sono complessi coniugati:

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{a} - i\boldsymbol{b},$$

con $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ entrambi ortogonali ad $\boldsymbol{x}_1$. Infatti, passando ai coniugati, la relazione $R\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ diventa $R\boldsymbol{x}_3 = \lambda_3\boldsymbol{x}_3$. Inoltre, da

$$\lambda_2\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 = R\boldsymbol{x}_2 \cdot R\boldsymbol{x}_1 = R^T R\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1$$

si ricava

$$(\mu(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_1) - \nu(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}_1)) + i(\nu(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_1) + \mu(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}_1)) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_1) + i(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}_1),$$

cioè, uguagliando parte reale e immaginaria,

$$\begin{cases} (\mu - 1)(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_1) - \nu(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}_1) = 0, \\ \nu(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_1) - (\mu - 1)(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}_1) = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ha solo la soluzione nulla $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}_1 = 0$, infatti

$$(\mu - 1)^2 + \nu^2 > 0$$

perché $\nu \neq 0$. Nella base $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\}$ la matrice associata alla trasformazione definita da R si scrive nella forma canonica reale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

dove

$$\cos\theta = \mu, \qquad \sin\theta = \nu.$$

Quindi R rappresenta la rotazione di θ attorno all'asse corrispondente alla direzione di $\boldsymbol{x}_1$. □

Vale il seguente risultato:

Proposizione 3. *Ogni elemento $g \in \mathcal{G}$ si scrive in modo unico come prodotto di trasformazioni del tipo seguente:*

i) $g_1(\boldsymbol{x}, t) = (\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{u}, t)$ *(moto uniforme con velocità $\boldsymbol{u}$)*

ii) $g_2(\boldsymbol{x}, t) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t + s)$ *(traslazione dell'origine)*

iii) $g_3(\boldsymbol{x}, t) = (G\boldsymbol{x}, t)$ *(isometria spaziale)*

con $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3, t, s \in \mathbb{R}, G \in O(3)$.

Dimostrazione. Osserviamo che le trasformazioni della forma g_1, g_2, g_3 stanno in $\mathcal{G}$. Consideriamo adesso una generica trasformazione affine $\boldsymbol{\Phi}$ di $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ in sé:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ t \end{pmatrix} \stackrel{\boldsymbol{\Phi}}{\mapsto} A \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ t \end{pmatrix} + \boldsymbol{b}, \tag{1.15}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} G & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{w}^T & a \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ s \end{pmatrix}, \qquad G \in \mathcal{M}(3,3), \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3, \quad a, s \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo che se $\boldsymbol{\Phi}$ è una trasformazione dell'insieme $\mathcal{G}$ si ha $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$, $a = 1$, $G \in O(3)$. Da questo seguirà la tesi. Con la notazione introdotta, l'immagine della trasformazione $\boldsymbol{\Phi}$ in (1.15) si scrive

$$\begin{pmatrix} G\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} + at + s \end{pmatrix}.$$

L'invarianza degli intervalli di tempo tra due eventi qualunque $(\boldsymbol{x}_1, t_1), (\boldsymbol{x}_2, t_2)$ ci dice che

$$|\boldsymbol{w}^T(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) + a(t_1 - t_2)| = |t_1 - t_2|$$

per ogni $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^3, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Da questo segue che $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$, $|a| = 1$. Per conservare anche il verso del tempo si deve scegliere $a = 1$. L'invarianza della distanza tra eventi simultanei $(\boldsymbol{x}_1, t)$, $(\boldsymbol{x}_2, t)$ ci dà

$$|G(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)| = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$$

per ogni $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, da cui segue che $G \in O(3)$. Infatti, da $|G\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ segue $\boldsymbol{x} \cdot G^T G\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$. La matrice $S = G^T G$ è simmetrica e con essa possiamo definire la forma quadratica $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot S\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|^2$. Si ha

$$\boldsymbol{x} \cdot S\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\big(q(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{x}) - q(\boldsymbol{y})\big) = \frac{1}{2}\big(|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 - |\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2\big) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y},$$

per ogni $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$, da cui segue che $G^T G = S = I$. □

Si verifica facilmente che l'insieme $\mathcal{G}$, col prodotto di composizione, è un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni affini di $\mathbb{E}^4$, che chiameremo gruppo di Galileo.[6] Siccome vogliamo conservare anche l'orientazione dello spazio, data dalla scelta del sistema di riferimento, ci restringeremo alle trasformazioni con $G \in SO(3)$, cioè alle trasformazioni ortogonali con determinante uguale a 1.

Principio di relatività di Galileo

Dato un sistema di punti materiali $P_1, \dots, P_N$, possiamo estendere in modo naturale l'azione del gruppo di Galileo alle mappe $t \mapsto \boldsymbol{x}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, che rappresentano il moto dei punti. Precisamente si ha:

$$\begin{aligned} g_1\boldsymbol{x}_i(t) &= \boldsymbol{x}_i(t) + t\boldsymbol{u}, \\ g_2\boldsymbol{x}_i(t) &= \boldsymbol{x}_i(t + s) + \boldsymbol{y}, \\ g_3\boldsymbol{x}_i(t) &= G\boldsymbol{x}_i(t). \end{aligned}$$

Definizione 1. *Diciamo che un sistema di riferimento è inerziale se le equazioni di Newton (1.13) per ogni sistema di punti materiali isolato scritte in questo riferimento sono invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo di Galileo $\mathcal{G}$.*

L'invarianza delle equazioni di Newton significa che, data una qualunque soluzione $t \to \boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{x}_1(t), \dots, \boldsymbol{x}_N(t))$ di queste equazioni, ogni elemento $g \in \mathcal{G}$ la trasforma in un'altra soluzione delle stesse equazioni.

[6] Un insieme G ha la struttura di gruppo se in esso è definito un prodotto associativo, indicato con $*$, tale che esista in G un elemento neutro e (per cui $g * e = e * g = g, \forall g \in G$) ed ogni elemento g abbia un inverso g^{-1} (per cui $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$). Un sottogruppo H di un gruppo G è un sottoinsieme di G che ha anch'esso una struttura di gruppo con lo stesso prodotto di G.

Il principio di relatività di Galileo afferma che esistono dei riferimenti inerziali.

Questo principio porta il nome di Galileo Galilei poiché in un passo di un suo libro egli scrive che, facendo alcuni semplici esperimenti all'interno di una barca che si muove di moto rettilineo uniforme, partendo da una posizione qualunque e andando in una qualunque direzione, si osservano gli stessi effetti che si avrebbero sulla terraferma. Quindi, in particolare, non si può distinguere se la barca sia in movimento oppure no sulla base di questi esperimenti.[7]

---

[7] G. Galilei, dal *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632). 'Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la sussequente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate; e se abbruciando alcuna lagrima d'incenso si farà un poco di fumo, vedrassi ascender in alto ed a guisa di nugoletta trattenervisi, e indifferentemente muoversi non più verso questa che quella parte. E di tutta questa corrispondenza d'effetti ne è cagione l'esser il moto della nave comune a tutte le cose contenute in essa ed all'aria ancora, che per ciò dissi io che si stesse sotto coverta; ché quando si stesse di sopra e nell'aria aperta e non seguace del corso della nave, differenze più e men notabili si vedrebbero in alcuni de gli effetti nominati: e non è dubbio che il fumo resterebbe in dietro, quanto l'aria stessa; le mosche parimente e le farfalle, impedite dall'aria, non potrebber seguir il moto della nave, quando da essa per spazio assai notabile si separassero; ma trattenendovisi vicine, perché la nave stessa, come di fabbrica anfrattuosa, porta seco parte dell'aria sua prossima, senza intoppo o fatica seguirebbon la nave, e per simil cagione veggiamo tal volta, nel correr la posta, le mosche importune e i tafani seguir i cavalli, volandogli ora in questa ed ora in quella parte del corpo; ma nelle gocciole cadenti pochissima sarebbe la differenza, e ne i salti e ne i proietti gravi, del tutto impercettibile.'

La proprietà di invarianza rispetto al gruppo di Galileo impone delle restrizioni sulla forma delle forze:

a) invarianza per traslazioni del tempo: se $\boldsymbol{x}(t)$ è soluzione di (1.13) anche $\boldsymbol{x}(t+s)$ lo è, cioè

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i(t+s) = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}(t+s), \dot{\boldsymbol{x}}(t+s), t), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.16}$$

per ogni $t, s \in \mathbb{R}$ per cui la relazione di sopra è definita. Ne segue che le forze $\boldsymbol{F}_i$ non dipendono da t:

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}), \tag{1.17}$$

cioè '*le leggi della natura restano le stesse al passare del tempo*' [2]. Infatti, dati t, s, possiamo scegliere $t_1, s_1 \in \mathbb{R}$ in modo che $t_1 + s_1 = t + s = \tau$ e scrivere

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}_i(t_1+s_1) = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}(t_1+s_1), \dot{\boldsymbol{x}}(t_1+s_1), t_1), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.18}$$

Dal confronto tra le equazioni (1.16) e (1.18) si ottiene

$$\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau), t) = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau), t_1),$$

per ogni τ, t, t_1 per cui tale relazione è definita, per cui

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial t}(\boldsymbol{x}(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau), t) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau), t+h) - \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau), t)}{h} = \boldsymbol{0},$$

cioè le forze $\boldsymbol{F}_i$ non dipendono dal tempo.

Grazie all'arbitrarietà di $\boldsymbol{x}(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau)$, che possono essere scelte come condizioni iniziali che definiscono la soluzione $\boldsymbol{x}(t)$, possiamo concludere che vale (1.17).

b) invarianza per traslazioni uniformi nello spazio $\mathbb{E}^3$: se $\boldsymbol{x}(t)$ è soluzione anche $\boldsymbol{x}(t) + t\tilde{\boldsymbol{u}} + \tilde{\boldsymbol{y}}$, con $\tilde{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}), \tilde{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{y})$, lo è per ogni $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ (lo spazio è omogeneo). Ne segue che[8]

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_k), \tag{1.19}$$

cioè le forze dipendono solo dalle posizioni e dalle velocità relative.

Per dimostrarlo fissiamo un tempo arbitrario τ e usiamo l'invarianza per trasformazioni della forma g_2 con $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}_1(\tau)$, $s = 0$, cioè $g_2\boldsymbol{x}_i(t) = \boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{x}_1(\tau)$. Poiché

$$\frac{d^2}{dt^2}\big(g_2\boldsymbol{x}_i(t)\big) = \ddot{\boldsymbol{x}}_i(t),$$

[8] con questa notazione si intende che gli argomenti di $\boldsymbol{F}_i$ possono essere tutte le combinazioni $\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_k$, con $2 \le j < k \le N$.

per $t = \tau$ si ottiene

$$\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau)) = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_2(\tau) - \boldsymbol{x}_1(\tau), \ldots, \boldsymbol{x}_N(\tau) - \boldsymbol{x}_1(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau)). \tag{1.20}$$

Usiamo adesso l'invarianza per trasformazioni della forma g_1 con $\boldsymbol{u} = -\dot{\boldsymbol{x}}_1(\tau)$, cioè $g_1\boldsymbol{x}_i(t) = \boldsymbol{x}_i(t) - t\dot{\boldsymbol{x}}_1(\tau)$. Poiché

$$\frac{d^2}{dt^2}\big(g_1\boldsymbol{x}_i(t)\big) = \ddot{\boldsymbol{x}}_i(t),$$

per $t = \tau$ si ottiene

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau)) = \boldsymbol{F}_i(&\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_2(\tau) - \boldsymbol{x}_1(\tau), \ldots, \boldsymbol{x}_N(\tau) - \boldsymbol{x}_1(\tau), \\ &\boldsymbol{0}, \dot{\boldsymbol{x}}_2(\tau) - \dot{\boldsymbol{x}}_1(\tau), \ldots, \dot{\boldsymbol{x}}_N(\tau) - \dot{\boldsymbol{x}}_1(\tau)).\end{aligned} \tag{1.21}$$

Grazie all'arbitrarietà delle condizioni iniziali $\boldsymbol{x}(\tau), \dot{\boldsymbol{x}}(\tau)$ possiamo concludere che[9]

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_1), \tag{1.22}$$

cioè le forze $\boldsymbol{F}_i$ dipendono solo dalle posizioni e velocità relative a P_1 dei punti $P_2, \ldots, P_N$.

Osserviamo anche che (1.22) è equivalente a (1.19), cioè possiamo scrivere le $\boldsymbol{F}_i$ nella forma (1.22) se e solo se le possiamo scrivere nella forma (1.19), infatti

$$\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_k = (\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_1) - (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_1), \quad \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_k = (\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_1) - (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_1).$$

c) invarianza per rotazioni nello spazio $\mathbb{E}^3$: se $\boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, \boldsymbol{x}_N(t))$ è soluzione anche $(G\boldsymbol{x}_1(t), \ldots, G\boldsymbol{x}_N(t))$ lo è, per ogni $G \in SO(3)$ (lo spazio è isotropo). Ne segue che

$$\boldsymbol{F}_i(G(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_k), G(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_k)) = G\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_k). \tag{1.23}$$

La (1.23) segue applicando G ai due membri dell'equazione di Newton:

$$Gm_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i = G\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_k, \dot{\boldsymbol{x}}_j - \dot{\boldsymbol{x}}_k),$$

e osservando che l'invarianza per trasformazioni della forma g_3 ci dà

$$m_iG\ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{F}_i(G(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_k), G(\dot{\boldsymbol{x}}_j - \dot{\boldsymbol{x}}_k)).$$

Osservazione 2. *In particolare, se il sistema consiste di un solo punto, in ogni sistema di riferimento inerziale la forza che agisce sul punto è nulla e quindi il suo moto è rettilineo uniforme. Infatti per* a), b) *la forza non dipende da* $t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$, *quindi è costante; inoltre per* c) *essa è invariante per rotazioni, quindi è nulla.*

[9] in modo analogo a prima, anche qui intendiamo che gli argomenti di $\boldsymbol{F}_i$ possono essere tutte le combinazioni $\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_1$, con $j = 1, \ldots, N$.

1.5 Sistemi meccanici

Definizione 2. *Consideriamo un insieme di N punti materiali, $P_i, i = 1, \dots, N$, di masse m_i, su cui agiscono delle forze $\vec{\boldsymbol{F}}_i$ assegnate a priori in un sistema di riferimento Σ. Diciamo che questo è un* **sistema meccanico classico** *(discreto, non vincolato) se il moto dei punti soddisfa le equazioni di Newton (1.13). Se nel riferimento scelto le equazioni di Newton sono invarianti per l'azione del gruppo $\mathcal{G}$ (cioè il riferimento considerato è inerziale), si parla di* **sistema meccanico galileiano**.

La dimensione dello spazio vettoriale in cui si possono muovere i punti del sistema, che nel caso di N punti è $3N$, si chiama **numero di gradi di libertà** del sistema.

Per i sistemi meccanici che studieremo le equazioni del moto potranno non essere invarianti per le trasformazioni di Galileo. L'esempio più semplice è quello della caduta di un grave, cioè il moto di un punto materiale di massa m soggetto alla forza di gravità $-mg\hat{\boldsymbol{e}}_3$ in un riferimento $\Sigma = O\,\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3$. È evidente la mancanza di invarianza per rotazione dell'equazione del moto, che si scrive:

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -mg\boldsymbol{e}_3.$$

In questo caso la direzione della gravità è privilegiata. Osserviamo che il sistema meccanico considerato non è isolato in quanto risente della forza di gravità, esterna al sistema.

1.6 Esercizi

Esercizio 3. *Siano $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{V}^3$ con $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$. Dato $\vec{\boldsymbol{a}} \in span(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}})$, trovare i coefficienti $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \lambda\vec{\boldsymbol{u}} + \mu\vec{\boldsymbol{v}}.$$

Trovare inoltre i vettori $\lambda\vec{\boldsymbol{u}}$ e $\mu\vec{\boldsymbol{v}}$ col metodo grafico.

Esercizio 4. *Siano $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{V}^3$ con $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$. Dato $\vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{V}^3$, trovare i coefficienti $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \lambda\vec{\boldsymbol{u}} + \mu\vec{\boldsymbol{v}} + \nu\vec{\boldsymbol{w}}.$$

Trovare inoltre i vettori $\lambda\vec{\boldsymbol{u}}$, $\mu\vec{\boldsymbol{v}}$ e $\nu\vec{\boldsymbol{w}}$ col metodo grafico.

Esercizio 5. *Mostrare che per ogni scelta di $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{d}} \in \mathbb{V}^3$ vale la relazione*

$$(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} \times \vec{\boldsymbol{d}})\,\vec{\boldsymbol{b}} + (\vec{\boldsymbol{c}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}})\,\vec{\boldsymbol{d}} = (\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}} \times \vec{\boldsymbol{d}})\,\vec{\boldsymbol{a}} + (\vec{\boldsymbol{d}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}})\,\vec{\boldsymbol{c}}.$$

Capitolo 2

Dinamica di un punto materiale libero

Studiamo il moto di un punto materiale libero. Introduciamo inoltre i problemi integrabili secondo Liouville e, tra essi, i moti unidimensionali.

2.1 Quantità dinamiche per un punto materiale

Consideriamo un punto materiale P di massa m sul quale agisce una forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ nel sistema di riferimento $\Sigma = O\,\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{e}}_3$. Siano $\vec{\boldsymbol{x}}_P, \vec{\boldsymbol{v}}_P, \vec{\boldsymbol{a}}_P$ la posizione, la velocità e l'accelerazione di P relative a Σ. Denoteremo con $\boldsymbol{x}_P, \boldsymbol{v}_P, \boldsymbol{a}_P$ i vettori delle coordinate in Σ di queste quantità.

Introduciamo le seguenti definizioni:

Quantità di moto (o momento lineare)

$$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}},$$

Momento Angolare rispetto a un polo $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_Q = (P - Q) \times m\vec{\boldsymbol{v}},$$

Energia cinetica[1]

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{\boldsymbol{v}}|^2,$$

Momento della forza $\vec{\boldsymbol{F}}$ rispetto a un polo $Q \in \mathbb{E}^3$

$$\vec{\boldsymbol{N}}_Q = (P - Q) \times \vec{\boldsymbol{F}},$$

[1] la quantità $m|\vec{\boldsymbol{v}}|^2$ è stata introdotta da Leibniz con il nome di *vis viva*.

Potenza della forza $\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\Pi = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v},$$

Lavoro elementare[2] all'istante t della forza $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{v}}, t)$

$$\delta\mathcal{L} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x}.$$

Osserviamo che il valore della potenza e del lavoro elementare è lo stesso in qualunque base ortonormale si rappresentino $\vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{v}}, d\vec{\boldsymbol{x}}$.

Energia potenziale

Si dice che un campo di forze posizionale $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ è **conservativo** se ammette un potenziale, cioè se esiste una funzione scalare $U(\boldsymbol{x})$ tale che[3]

$$\nabla U = \boldsymbol{F}.$$

In tal caso la funzione $V = -U$ si chiama **energia potenziale** del campo di forze e si ha[4]

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V \qquad \delta\mathcal{L} = -\nabla V \cdot d\boldsymbol{x} = -dV,$$

Energia totale

Se la forza $\boldsymbol{F}$ è conservativa, con energia potenziale V, possiamo definire l'**energia totale** del sistema come

$$E = T + V.$$

Esempi

Forze conservative:

1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -mg\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ (forza peso)

$$V(\boldsymbol{x}) = mg\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_3, \qquad \nabla V(\boldsymbol{x}) = mg\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

2) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -k\boldsymbol{x}$, $k > 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ (forza elastica centrale)

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}k|\boldsymbol{x}|^2, \qquad \nabla V(\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

[2] dette (x_1, x_2, x_3) e (F_1, F_2, F_3) le coordinate di $\vec{\boldsymbol{x}}$ e $\vec{\boldsymbol{F}}$, il lavoro elementare ha un'espressione del tipo $F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3$, che si chiama *forma differenziale* su $\mathbb{R}^3$.

[3] data una funzione $f(\boldsymbol{x})$, con il simbolo ∇f indicheremo il vettore colonna delle derivate parziali di f rispetto ad $\boldsymbol{x}$, cioè $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}})^T$.

[4] in questo caso si dice che la forma differenziale $\delta\mathcal{L}$ è *esatta*, cioè rappresenta il differenziale di una funzione.

3) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho}$, $\rho = |\boldsymbol{x}|$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ (forza centrale a simmetria sferica)

$$V(\boldsymbol{x}) = \mathcal{V}(\rho(\boldsymbol{x})), \qquad \mathcal{V}(\rho) = -\int f(\rho)\,d\rho,$$
$$\nabla V(\boldsymbol{x}) = -f(\rho)\nabla\rho = -f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

Forza non conservativa:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (x^2 + y^2, xy, 0).$$

Ragioniamo per assurdo. Se esistesse una funzione $V(\boldsymbol{x})$ tale che $-\nabla V = \boldsymbol{F}$, si avrebbe in particolare

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = x^2 + y^2, \qquad -\frac{\partial V}{\partial y} = xy.$$

Poiché le funzioni $x^2 + y^2$ e xy sono polinomiali, quindi sicuramente di classe C^1, possiamo applicare il teorema di Schwartz e notare che nelle derivate seconde miste di $V(\boldsymbol{x})$ l'ordine di derivazione non conta. Quindi si avrebbe

$$y = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = 2y,$$

che è una contraddizione.

2.2 Equazioni di bilancio e leggi di conservazione

Consideriamo un punto materiale P di massa m con coordinate $\boldsymbol{x}$, su cui agisca una forza $\boldsymbol{F}$.

Proposizione 4. *Sia $\boldsymbol{x}(t)$ una qualunque soluzione dell'equazione di Newton $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$. Allora, lungo questa soluzione*[5] *valgono le relazioni*

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}, \tag{2.1}$$

e, per ogni punto $Q \in \mathbb{E}^3$,

$$\dot{\boldsymbol{M}}_Q = \boldsymbol{N}_Q - m\boldsymbol{v}_Q \times \boldsymbol{v}. \tag{2.2}$$

[5] dire che queste relazioni valgono lungo una soluzione $\boldsymbol{x}(t)$ dell'equazione di Newton significa che tali relazioni sono soddisfatte sostituendo le funzioni $\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t), \ddot{\boldsymbol{x}}(t)$ al posto di $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}$.

Dimostrazione. Basta calcolare la derivata totale di $\boldsymbol{p}$ e di $\boldsymbol{M}_Q$, cioè la derivata temporale lungo una qualunque soluzione dell'equazione di Newton.

□

Proposizione 5. *(teorema dell'energia cinetica) Sia $\boldsymbol{x}(t)$ una qualunque soluzione dell'equazione di Newton $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$. Allora, lungo questa soluzione vale la relazione*

$$\dot{T} = \Pi.$$

Dimostrazione.

$$\Pi = \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = m\ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}) = \dot{T}.$$

□

Definizione 3. *Si dice che una funzione $I(\boldsymbol{x}, t)$ è un* **integrale primo** *di un'equazione differenziale $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$, con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k, k > 0$, se il suo valore è costante lungo una qualunque soluzione $\boldsymbol{x}(t)$ di questa equazione.*

Questo significa che, se $I(\boldsymbol{x}, t)$ è un integrale primo e $\boldsymbol{x}(t)$ è una qualunque soluzione di $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$, si ha

$$\frac{d}{dt}I(\boldsymbol{x}(t), t) = 0$$

e quindi, integrando a partire dal tempo iniziale t_0, si ottiene la legge di conservazione

$$I(\boldsymbol{x}(t), t) = I(\boldsymbol{x}(t_0), t_0).$$

I valori dell'integrale primo I saranno in generale diversi in corrispondenza di soluzioni $\boldsymbol{x}(t)$ diverse.

Esercizio 6. *Trovare un integrale primo dell'equazione differenziale*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Proposizione 6. *Valgono le seguenti proprietà:*

1) se la componente di $\boldsymbol{F}$ nella direzione $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^3$ è nulla allora $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}$ è un integrale primo;

2) se il momento della forza $\boldsymbol{F}$ rispetto ad un polo Q in quiete (nel riferimento in cui si studia il moto) ha componente nulla nella direzione $\boldsymbol{e}$ allora $\boldsymbol{M}_Q \cdot \boldsymbol{e}$ è un integrale primo.

Dimostrazione. Basta moltiplicare scalarmente per $\boldsymbol{e}$ le relazioni (2.1), (2.2), tenendo conto che in quest'ultima si ha $\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{0}$.

$\square$

Ad esempio, per un punto materiale soggetto alla forza peso $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_3$ si conservano $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{M}_Q \cdot \boldsymbol{e}_3$ rispetto ad ogni polo fisso Q.

Dato un versore $\hat{\boldsymbol{e}} \in \mathbb{V}^3$, la quantità $\vec{\boldsymbol{M}}_Q \cdot \hat{\boldsymbol{e}}$ si chiama **momento angolare assiale** relativo alla retta $Q\hat{\boldsymbol{e}} = \{Q + \lambda\hat{\boldsymbol{e}}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, passante per Q e avente la direzione di $\hat{\boldsymbol{e}}$. Il suo valore non cambia scegliendo come polo un punto qualunque su tale retta, infatti, se $Q' \in Q\hat{\boldsymbol{e}}$, dalla relazione

$$\vec{\boldsymbol{M}}_Q = \vec{\boldsymbol{M}}_{Q'} + (Q - Q') \times m\vec{\boldsymbol{v}}_P$$

segue che

$$\vec{\boldsymbol{M}}_Q \cdot \hat{\boldsymbol{e}} = \vec{\boldsymbol{M}}_{Q'} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}$$

poiché $(Q - Q') \times m\vec{\boldsymbol{v}}_P \cdot \hat{\boldsymbol{e}} = 0$.

Proposizione 7. (conservazione dell'energia) *Se il campo di forze $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ è conservativo, con energia potenziale $V(\boldsymbol{x})$, allora l'energia totale $E = T + V$ è un integrale primo.*

Dimostrazione.

$$\dot{T} = \Pi = \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = -\nabla V \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = -\dot{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(T + V) = 0.$$

$\square$

2.3 Problemi integrabili

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

dove $\mathbf{f} : U \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale di classe C^1 definito su un aperto $U \in \mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$, e $\boldsymbol{x}_0 \in U$ è la condizione iniziale al tempo $t = 0$.
Per il teorema di Cauchy-Lipschitz una soluzione locale $\boldsymbol{x}(t)$ di (2.3) esiste ed è unica, però in generale non abbiamo nessuna informazione sulla sua espressione. In alcuni casi, molto particolari, la soluzione $\boldsymbol{x}(t)$ di (2.3) si riesce a trovare esplicitamente. Ad esempio, se $n = 1$ ed

$$f(x) = ax,$$

con $a \neq 0$ costante, la soluzione è data da

$$x(t) = e^{at} x_0,$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$ è la condizione iniziale.

Ci interessa adesso studiare una situazione intermedia, in cui la soluzione $\boldsymbol{x}(t)$ si può scrivere in forma implicita e precisamente *a meno di inversioni e quadrature*[6]. In questo caso diciamo che il problema (2.3) è **integrabile** secondo Liouville, o semplicemente che è integrabile. Un esempio di problema integrabile è descritto di seguito.

Equazioni differenziali a variabili separabili

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

dove $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 definita su un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ è la condizione iniziale. I valori di x_0 tali che $f(x_0) = 0$ danno luogo a soluzioni stazionarie $x(t) = x_0$. Se la condizione iniziale x_0 non annulla f allora, per l'unicità della soluzione $x(t)$ di (2.4), si avrà $f(x(t)) \neq 0$ in tutto l'intervallo massimale di definizione di tale soluzione. Per risolvere il problema posso dividere l'equazione differenziale per $f(x(t))$ e integrare nella variabile temporale tra 0 e t. Usando il cambiamento di variabili nell'integrazione ottengo

$$t = \int_0^t \frac{\dot{x}(t')}{f(x(t'))} dt' = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(x')} dx' =: G(x). \tag{2.5}$$

Osserviamo che la funzione $\frac{1}{f(x)}$ è di classe C^1, quindi la sua primitiva $G(x)$ esiste, anche se non è detto che si riesca a calcolare in termini di funzioni elementari, come ad esempio nel caso $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Inoltre, siccome f non può cambiare segno nell'intervallo considerato, la funzione $G(x)$ è strettamente monotona e quindi invertibile, anche se non è detto che si riesca a calcolarne esplicitamente l'inversa, come ad esempio nel caso $G(x) = xe^x$. Possiamo quindi concludere che il problema (2.4) è integrabile secondo Liouville.

Osservazione 3. *Può succedere che il moto diventi illimitato in tempo finito. Se f non è lipschitziana,*[7] *può anche succedere che la soluzione non sia unica.*

[6] cioè a meno di invertire esplicitamente delle funzioni e a meno di calcolare delle primitive in termini di funzioni elementari. Si richiede comunque l'esistenza di tali funzioni inverse e di tali primitive.

[7] $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice lipschitziana su un aperto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ se esiste una $L > 0$ tale che $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ per ogni $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega$.

Esercizio 7. *Studiare le soluzioni dei problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$.

2.4 Moti unidimensionali

In questa sezione consideriamo il problema di Cauchy unidimensionale

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \\ x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

dove $n = 1$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Nel seguito ci riferiremo al sistema (2.6) parlando di **moto unidimensionale**.

Nel caso di un moto unidimensionale, se la forza F è continua e puramente posizionale allora è conservativa e possiamo determinare un'energia potenziale, cioè una funzione $V(x)$ con $-V'(x) = F(x)$. In questo caso il problema di Cauchy (2.6) si scrive

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -V'(x), \\ x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Assumiamo che F sia C^1, cosicché la soluzione di (2.7) è unica.

Osservazione 4. *Le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$m\ddot{x} = -V'(x) \tag{2.8}$$

sono invarianti per traslazioni e riflessioni temporali, cioè se $x(t)$ *è una soluzione di* (2.8)*, allora anche* $y(t) = x(t - \tau)$ *con* $\tau \in \mathbb{R}$ *e* $z(t) = x(-t)$ *risolvono la stessa equazione differenziale.*

Proposizione 8. *Il problema (2.7) è integrabile secondo Liouville.*

Dimostrazione. L'energia totale

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x)$$

è un integrale primo di (2.8). Posto $E_0 = E(x_0, v_0)$ scriviamo la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) + V(x(t)) = E_0 \tag{2.9}$$

lungo la soluzioni $x(t)$ di (2.7). Dalla (2.9) si vede che i valori ammissibili di $x(t)$ soddisfano necessariamente la condizione

$$E_0 - V(x) \geq 0.$$

I valori di x tali che

$$E_0 - V(x) = 0, \qquad V'(x) \neq 0 \tag{2.10}$$

si chiamano **punti di inversione** del moto. I valori di x tali che

$$E_0 - V(x) = 0, \qquad V'(x) = 0 \tag{2.11}$$

si chiamano **configurazioni di equilibrio**, o più semplicemente **equilibri**. Supponiamo che ci sia un numero finito (diverso da zero) di punti di inversione. Possiamo trovare un numero finito di intervalli disgiunti di valori di x in cui si può svolgere il moto. Questi intervalli possono essere sia limitati che illimitati.

Dalla (2.9) ricaviamo che la soluzione di (2.7) soddisfa

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2(E_0 - V(x))}{m}}. \tag{2.12}$$

Distinguiamo 3 casi in base alle condizioni iniziali di (2.7):

$$\text{i) } v_0 > 0, \qquad \text{ii) } v_0 < 0, \qquad \text{iii) } v_0 = 0.$$

Nel caso i) scegliamo il segno positivo in (2.12) e consideriamo il problema di Cauchy

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2(E_0 - V(x))}{m}}, \qquad x(0) = x_0. \tag{2.13}$$

Nel caso ii) scegliamo il segno negativo e consideriamo

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2(E_0 - V(x))}{m}}, \qquad x(0) = x_0. \tag{2.14}$$

Infine, nel caso iii) x_0 è un punto di inversione oppure un equilibrio. Se x_0 è un punto di inversione si ha $V'(x_0) \neq 0$ e scegliamo in (2.12) il segno della forza $F(x_0) = -V'(x_0)$. Infatti, se $F(x_0) > 0$ allora $\ddot{x}(0) > 0$, quindi $\dot{x}$ deve essere crescente, almeno inizialmente. Analogamente, se $F(x_0) < 0$ allora $\dot{x}$ deve essere inizialmente decrescente. Se x_0 è un equilibrio si ha $F(x_0) = -V'(x_0) = 0$ e $\dot{x}_0 = 0$, e la funzione costante $x(t) = x_0$ è la soluzione di (2.7).

□

Diciamo che un valore E_0 dell'energia E è **critico** se nell'insieme $\{(x, v) : E(x, v) = E_0\}$ c'è un punto critico di E, cioè un punto $(x, v) = (x_c, 0)$ tale che $V'(x_c) = 0$. In caso contrario diciamo che E_0 è un valore **regolare**.

Osservazione 5. *Nel caso iii) della dimostrazione della Proposizione 8 x_0 è un punto di inversione oppure un equilibrio. Se E_0 è un valore regolare di E il caso dell'equilibrio è escluso, e la funzione $\sqrt{E_0 - V(x)}$ non è lipschitziana in nessun intorno (destro o sinistro) di x_0 dove $E_0 - V(x) \geq 0$, cioè dove è possibile il moto.*[8] *In questo caso si perde l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy* (2.13), (2.14), *che hanno anche la soluzione costante $x(t) = x_0$. Quest'ultima corrisponde all'unica soluzione di* (2.7) *se e solo se E_0 è un valore critico, cioè se $V'(x_0) = 0$.*

Moti per valori regolari di E

Consideriamo due punti di inversione consecutivi $x_{\min}$, $x_{\max}$, con $x_{\min} < x_{\max}$, che corrispondono a un valore regolare E_0 dell'energia e sono tali che il moto si possa svolgere all'interno dell'intervallo $[x_{\min}, x_{\max}]$, cioè

$$\begin{gathered} E_0 - V(x_{\min}) = E_0 - V(x_{\max}) = 0, \\ E_0 - V(x) > 0 \text{ se } x \in (x_{\min}, x_{\max}), \\ V'(x_{\min}) < 0 < V'(x_{\max}). \end{gathered} \tag{2.15}$$

Definizione 4. *Diciamo che una soluzione $x(t)$ di* (2.7) *è un* **moto periodico** *di periodo $T > 0$ se*

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e per nessun T', con $0 < T' < T$, si ha $x(t + T') = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Proposizione 9. *Se valgono le relazioni* (2.15), *con $E_0 = E(x_0, v_0)$, la soluzione $x(t)$ di* (2.7) *dà luogo a un moto periodico con periodo*

$$T = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x'))}} dx'. \tag{2.16}$$

Dimostrazione. Consideriamo la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy (2.7) con $x_0 = x_{\min}$ e $v_0 = 0$ (perché $x_{\min}$ è un punto di inversione). Osserviamo che $x(t)$ soddisfa l'equazione (2.12) con la scelta positiva del segno poiché $-V'(x_{\min}) > 0$. Mostriamo che $x(t)$ è definita su $[0, T/2]$, dove T è dato dalla relazione (2.16) e corrisponde al doppio del tempo necessario per andare da $x_{\min}$ a $x_{\max}$. Per

[8] Questa affermazione si giustifica scrivendo lo sviluppo di Taylor di $E_0 - V(x)$ in $x = x_0$:

$$E_0 - V(x) = \underbrace{E_0 - V(x_0)}_{=0} - V'(x_0)(x - x_0) + O(|x - x_0|^2).$$

farlo dobbiamo dimostrare che questo tempo è finito. Consideriamo lo sviluppo di Taylor di $E_0 - V(x)$ centrato in $x_{\min}$ per $x \in [x_{\min}, \bar{x})$, con $x_{\min} \leq \bar{x} < x_{\max}$:

$$E_0 - V(x) = -V'(x_{\min})(x - x_{\min}) - \frac{1}{2}V''(x_{\min})(x - x_{\min})^2 + o(|x - x_{\min}|^2).$$

Il tempo impiegato dal punto P per arrivare a $\bar{x}$ partendo da $x_{\min}$ è dato dall'integrale

$$\int_{x_{\min}}^{\bar{x}} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x'))}} dx',$$

che è finito perché

$$\int_{x_{\min}}^{\bar{x}} \frac{1}{\sqrt{|x - x_{\min}|}} dx < +\infty.$$

In modo analogo si dimostra che il tempo impiegato da P per andare da $\bar{x}$ a $x_{\max}$ è finito.

Osserviamo che la funzione

$$y(t) = x(T - t),$$

definita per $t \in [T/2, T]$, è ancora soluzione di (2.8) e si ha

$$y(T/2) = x(T/2) = x_{\max}, \qquad \dot{y}(T/2) = -\dot{x}(T/2) = 0. \tag{2.17}$$

Da questo e dall'unicità della soluzione del problema di Cauchy per (2.8), con condizioni iniziali date da (2.17) al tempo $t = T/2$, segue che

$$y(t) = x(t) \tag{2.18}$$

nell'intervallo in cui queste soluzioni sono definite, e in particolare $x(t)$ risulta definita sull'intervallo $[0, T]$. Osserviamo che anche la funzione

$$z(t) = x(t + T), \tag{2.19}$$

definita per $t \in [-T, 0]$, è soluzione di (2.8). Dalle relazioni (2.19), (2.18) segue che

$$z(0) = x(T) = x(0) = x_{\min}, \qquad \dot{z}(0) = \dot{x}(T) = 0 = \dot{x}(0). \tag{2.20}$$

Quindi, usando l'unicità della soluzione del problema di Cauchy per (2.8) con condizioni finali date da (2.20) al tempo $t = 0$ otteniamo che

$$z(t) = x(t)$$

nell'intervallo in cui queste soluzioni sono definite, e in particolare $x(t)$ risulta definita sull'intervallo $[-T, T]$. Procedendo in modo simile, otteniamo che

$$x(t + T) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

cioè il moto è periodico di periodo T.

$\square$

Moti per valori critici di E

Assumiamo adesso che E_0 sia un valore critico dell'energia, corrispondente a un punto critico x_c di $V(x)$, e che il moto sia possibile in un intervallo sinistro $[x_0, x_c]$ di x_c, dove x_0 è un punto di inversione. Poiché $V'(x_c) = 0$, lo sviluppo di Taylor di $E_0 - V(x)$ centrato in x_c è

$$E_0 - V(x) = -\frac{1}{2}V''(x_c)(x - x_c)^2 + o(|x - x_c|^2).$$

Il tempo impiegato dal punto P per arrivare a x_c partendo da x_0 è dato dall'integrale

$$\int_{x_0}^{x_c} \sqrt{\frac{m}{2(E_0 - V(x'))}}dx',$$

che è infinito perché

$$\int_{x_0}^{x_c} \frac{1}{|x - x_c|}dx = +\infty.$$

Osserviamo anche che il problema di Cauchy (2.7) con $x_0 = x_c, v_0 = 0$ ammette la soluzione di equilibrio $x(t) = x_c$.
Il caso in cui il moto sia possibile in un intervallo destro $[x_c, x_0]$ di x_c si tratta in modo analogo.

Ritratto di fase

La funzione $t \mapsto x(t)$ è soluzione di (2.7) se e solo se la curva piana $t \mapsto (x(t), v(t))$ è soluzione del sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{1}{m}V'(x) \end{cases} \tag{2.21}$$

con le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \qquad v(0) = v_0. \tag{2.22}$$

Il **ritratto di fase** di un moto unidimensionale conservativo è un disegno nel piano della fasi, con coordinate x, v, delle traiettorie delle soluzioni di (2.21). Per questo sistema abbiamo l'integrale primo dell'energia

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

per cui le traiettorie delle sue soluzioni giacciono sulle curve di livello

$$\mathcal{C}_E = \{(x, v) : E(x, v) = E_0\}$$

al variare di E_0 in $\mathbb{R}$. Nel disegnare il ritratto di fase si scelgono dei valori dei livelli E_0 che corrispondono a curve qualitativamente diverse.

Le traiettorie delle soluzioni di (2.22) non si possono intersecare nel piano con coordinate (x, v), infatti vale il seguente risultato:

Proposizione 10. *Siano $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t)$ due soluzioni di*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, n \geq 1, \tag{2.23}$$

con $\boldsymbol{f}$ di classe C^1 su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, tali che le loro traiettorie si intersecano in un punto, cioè esistono t_1, t_2 tali che $\boldsymbol{x}_1(t_1) = \boldsymbol{x}_2(t_2)$. Allora queste traiettorie coincidono.

Dimostrazione. Definisco $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}_2(t - t_1 + t_2)$. La curva $t \mapsto \boldsymbol{y}(t)$ è ancora una soluzione di (2.23) e la sua traiettoria coincide con quella di $\boldsymbol{x}_2$. Inoltre si ha

$$\boldsymbol{y}(t_1) = \boldsymbol{x}_2(t_2) = \boldsymbol{x}_1(t_1),$$

quindi le soluzioni $\boldsymbol{y}(t)$ e $\boldsymbol{x}_1(t)$ coincidono, e in particolare coincidono le loro traiettorie.

□

Corollario 1. *In un moto per un valore critico di E, partendo da un punto $(x, \dot{x})$ diverso da un equilibro $(x_0, 0)$, non si può mai raggiungere tale equilibrio se non asintoticamente per $t \to \pm\infty$.*

I cambiamenti qualitativi nella topologia delle curve di livello possono avvenire solo attraversando i livelli critici di E, per cui $E(x, v) = E(x_0, 0)$ con $V'(x_0) = 0$. Quindi nel ritratto di fase dovremo tracciare sicuramente le curve che corrispondono a tali livelli.

Esempio 1. Tracciamo il ritratto di fase del moto unidimensionale con energia potenziale

$$V(x) = -x^3 + 2x - 4. \tag{2.24}$$

I punti critici di V sono $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Indichiamo con $h_1 = V(x_1) \approx -2.9113$, $h_2 = V(x_2) \approx -5.0887$ i corrispondenti valori critici dell'energia

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x).$$

Nella Figura 2.1 disegnamo il grafico dell'energia potenziale V (sopra) e alcune curve di livello di E (sotto). Oltre ai livelli critici, abbiamo scelto dei livelli intermedi dell'energia. I valori considerati sono

$$(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5) = (-6, h_2, -4, h_1, -2.5).$$

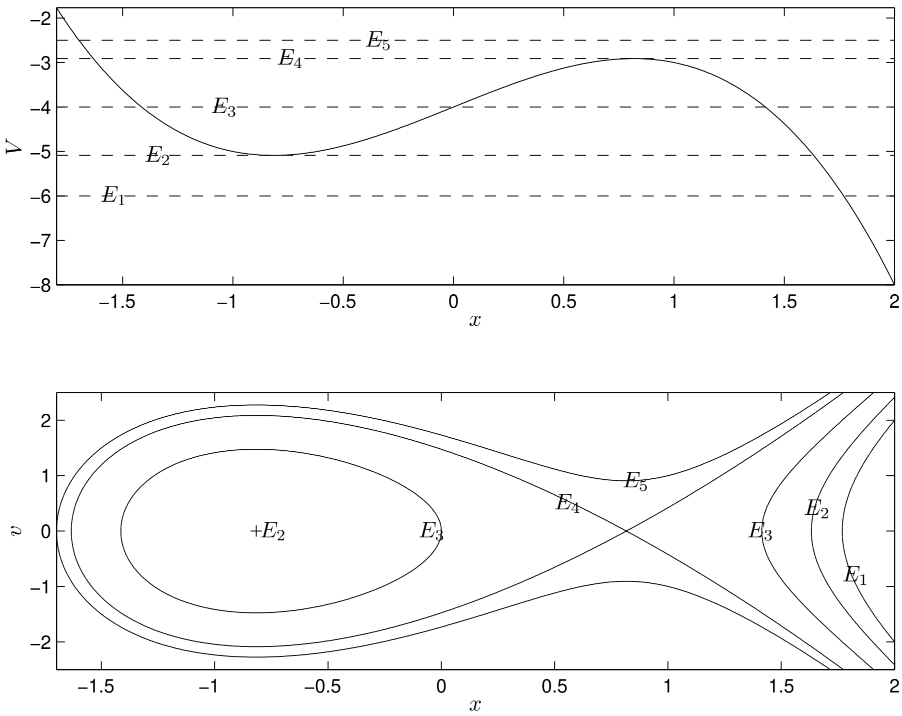


Figura 2.1: Sopra: grafico dell'energia potenziale in (2.24). Sotto: curve di livello dell'energia totale $E(x, v)$.

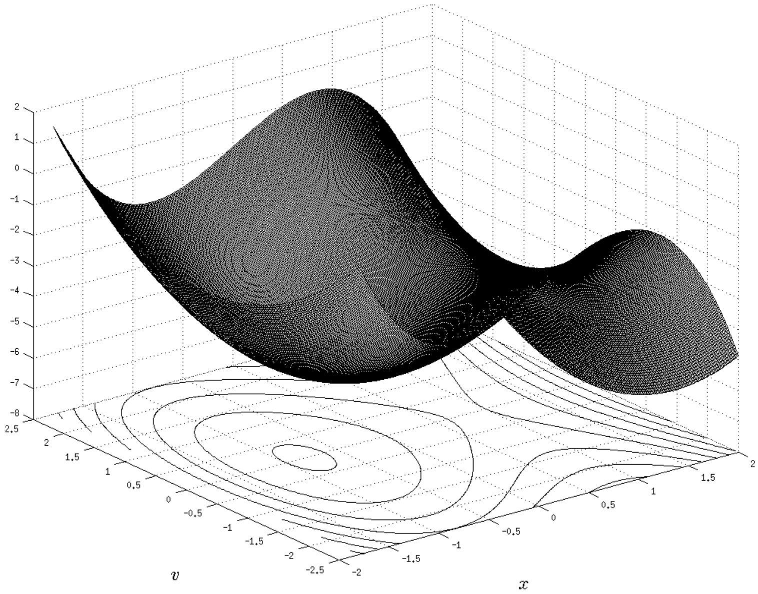


Figura 2.2: Grafico dall'energia $E(x, v)$ insieme ad alcune curve di livello.

Ai minimi locali di $V(x)$ corrispondono minimi locali di $E(x, v)$ e ai massimi locali di $V(x)$ corrispondono punti di sella di $E(x, v)$.

Nella Figura 2.2 tracciamo il grafico della superficie definita dall'energia $E(x, v)$ insieme ad alcune sue curve di livello nel piano (x, v).

Osservazione 6. *Vedremo che alcuni problemi della Meccanica saranno riconducibili allo studio di moti unidimensionali in seguito a un procedimento di riduzione del numero di gradi di libertà.*