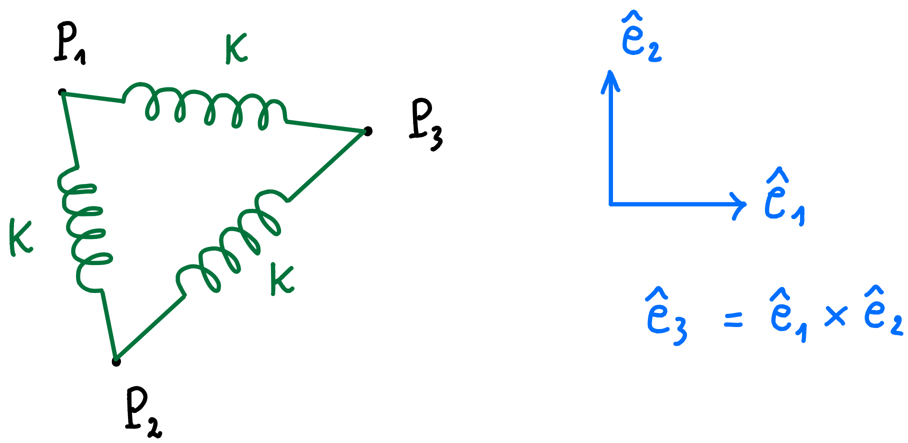
# Esempio sulle forze interne

Consideriamo tre punti materiali collegati a due a due da una molla di costante elastica $K$ e lunghezza a riposo nulla




l'energia potenziale delle forze interne è

$$V^{(I)}(\vec{x}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(\rho_{ij}(\vec{x}))$$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N}$, $\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$,

$\vec{x}_j$ è la posizione del punto $j$-esimo

possiamo anche scrivere

$$V^{(I)}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} V_{ij}(\rho_{ij}(\vec{x}))$$

Nel nostro caso $N = 3$

$$V^{(I)}(x) = V_{12}(\rho_{12}(\vec{x})) + V_{13}(\rho_{13}(\vec{x})) + V_{23}(\rho_{23}(\vec{x}))$$ $\longrightarrow$ se usiamo la formula ●

con $\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

oppure

$$V^{(I)}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left[ V_{12}(\rho_{12}(\vec{x})) + V_{13}(\rho_{13}(\vec{x})) + V_{21}(\rho_{23}(\vec{x})) + V_{23}(\rho_{23}(\vec{x})) + V_{31}(\rho_{12}(\vec{x})) + V_{32}(\rho_{13}(\vec{x})) \right]$$

$\downarrow$ se usiamo la formula ●

notando che $\rho_{12} = \rho_{21}$, $\rho_{13} = \rho_{31}$, $\rho_{23} = \rho_{32}$ si ha $V_{ij} = V_{ji}$ e questa formula diventa uguale alla precedente:

$$V^{(I)}(x) = \frac{1}{2}\left[ 2V_{12}(\rho_{12}(\vec{x})) + 2V_{13}(\rho_{13}(\vec{x})) + 2V_{23}(\rho_{23}(\vec{x}))\right]$$

$$= V_{12}(\rho_{12}(\vec{x})) + V_{13}(\rho_{13}(\vec{x})) + V_{23}(\rho_{23}(\vec{x}))$$

Calcoliamo ora la forza risultante delle forze interne che agisce su ciascun punto

$$\vec{F}_K^{(I)} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{F}_{Kj} \qquad K = 1, \dots, N$$

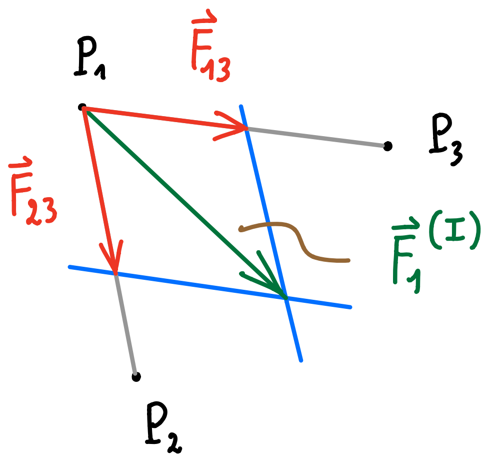
Sappiamo che vale la relazione

$$\vec{F}_K^{(I)} = -\nabla_{\vec{x}_K} V^{(I)} =$$

$$-\left(\frac{\partial V^{(I)}}{\partial x_K}, \frac{\partial V^{(I)}}{\partial y_K}, \frac{\partial V^{(I)}}{\partial z_K}\right)^T$$

$$\vec{x}_K = (x_K, y_K, z_K)$$

Prendiamo $P_1$




1 $$\vec{F}_1^{(I)} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

inoltre

2 $$\vec{F}_1^{(I)} = -\nabla_{\vec{x}_1} V^{(I)}$$

Voglio verificare che 1 e 2 ci danno lo stesso risultato

$$V^{(I)}(\vec{x}) = V_{12}(\rho_{12}(\vec{x})) + V_{13}(\rho_{13}(\vec{x})) + V_{23}(\rho_{23}(\vec{x}))$$

$$V^{(I)}(\vec{x}) = \frac{1}{2} k \rho_{12}^2(\vec{x}) + \frac{1}{2} k \rho_{13}^2(\vec{x}) + \frac{1}{2} k \rho_{23}^2(\vec{x})$$

$$V^{(I)}(\vec{x}) = \frac{1}{2} k \left[ \overbrace{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2}^{= \rho_{12}^2} + \overbrace{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|^2}^{= \rho_{13}^2} + \underbrace{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|^2}_{= \rho_{23}^2} \right]$$

! verificate questo passaggio

$$\nabla_{\vec{x}_1} V^{(I)}(\vec{x}) = \frac{1}{\cancel{2}} k \left[ \cancel{2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + \cancel{2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_3) \right]$$

$$= k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + k(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)$$

quindi $\vec{F}_1^{(I)} = -k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - k(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)$

Ora usiamo invece la formula

$$\vec{F}_1^{(I)} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

dove le forze elastiche esercitate su $P_1$ prendono la forma

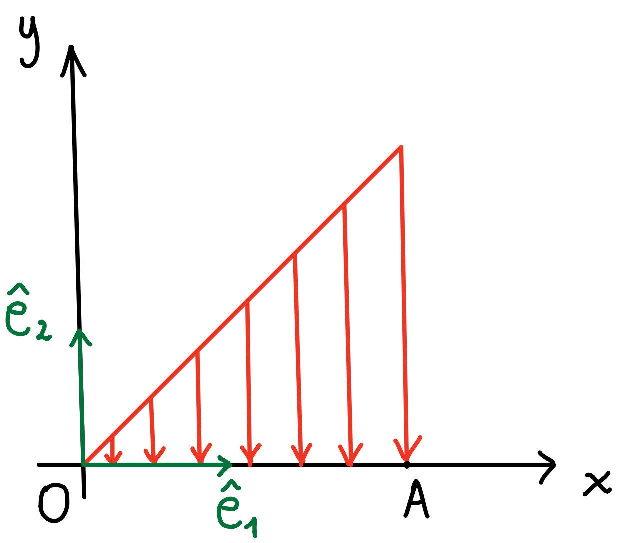
$$\vec{F}_{12} = k(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), \quad \vec{F}_{13} = k(\vec{x}_3 - \vec{x}_1)$$

Si è visto allora che

$$\nabla_{\vec{x}_1} V^{(I)} = -\vec{F}_{12} - \vec{F}_{13} = -\vec{F}_1^{(I)}$$

---

## Calcolo del centro dei vettori paralleli per una distribuzione continua di forze




$$\vec{f}(x) = -f_0 \frac{x}{\ell} \hat{e}_2$$

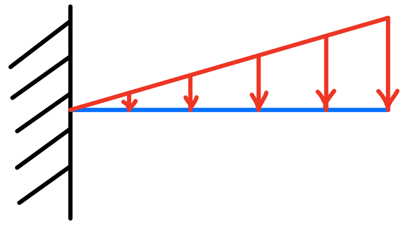
$$(f_0 > 0)$$

$f_0$ è una forza per unità di lunghezza

$|O - A| = \ell$

notiamo che $\vec{f}(0) = \vec{0}$ e $\vec{f}(\ell) = -f_0 \hat{e}_2$

Avrete spesso a che fare con carichi distribuiti e uno dei primi esempi che incontrerete è la trave incastrata e sottoposta ad un carico distribuito



Vogliamo trovare un sistema di forze equivalente a quello dato.

Poiché il trinomio invariante è nullo dato che il sistema è piano, un sistema equivalente è

$$\{(\vec{R}, C)\}$$

con $\vec{R}$ la risultante delle forze e $C$ il centro dei vettori paralleli

Calcoliamo $\vec{R}$

$$\vec{R} = \int_0^\ell -f_0 \frac{x}{\ell} \hat{e}_2 \, dx =$$

$$-\frac{f_0}{\ell}\left(\int_0^\ell x \, dx\right)\hat{e}_2 = -\frac{f_0}{\ell}\frac{1}{2}\ell^2 \hat{e}_2$$

$$= -\frac{f_0 \ell}{2}\hat{e}_2 = \vec{R}$$

Calcoliamo la posizione del centro dei vettori paralleli. Ricordiamo prima la formula per il caso discreto

$$C - O = \frac{1}{\underbrace{\sum_{j=1}^{N} v_j}_{= \vec{R} \cdot \hat{e}}} \sum_{j=1}^{N} (P_j - O)\, v_j$$

$$\vec{v}_j = v_j \hat{e}$$

infatti $\vec{R} = \sum_{j=1}^{N} \vec{v}_j = \sum_{j=1}^{N} v_j \hat{e} = \left( \sum_{j=1}^{N} v_j \right) \hat{e}$

Nel caso di una distribuzione continua la formula diventa

$$C - O = \frac{1}{\vec{R} \cdot \hat{e}_2} \int_0^{\ell} (x\, \hat{e}_1) \underbrace{\left( - f_0 \frac{x}{\ell} \right)}_{= \vec{f} \cdot \hat{e}_2} dx$$

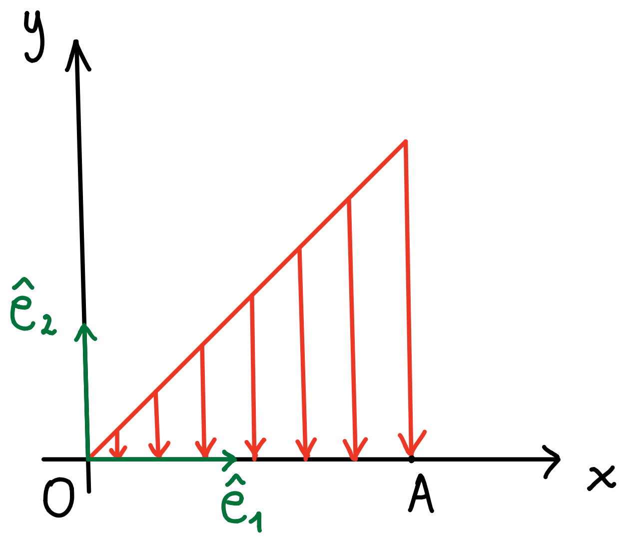
$$\vec{R} \cdot \hat{e}_2 = \left( - \frac{f_0 \ell}{2} \right) \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = - \frac{f_0 \ell}{2}$$

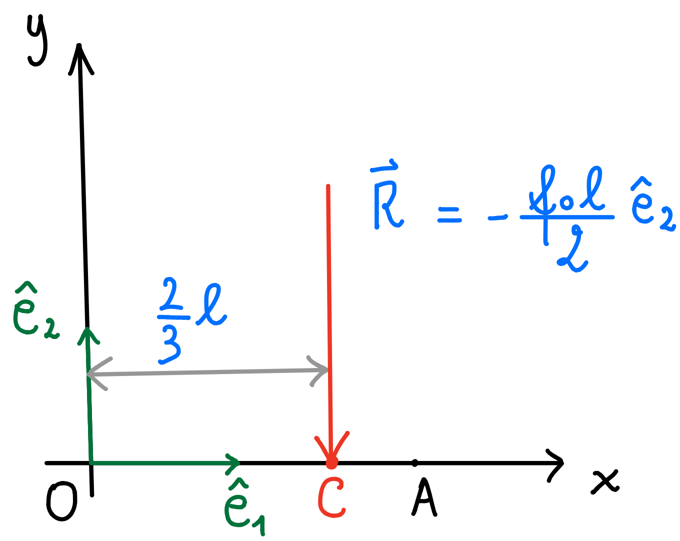
risolviamo separatamente l'integrale

$$\int_0^{\ell} (x\,\hat{e}_1)\left(-f_0\frac{x}{\ell}\right)dx = -\frac{f_0}{\ell}\left(\int_0^{\ell} x^2\,dx\right)\hat{e}_1$$

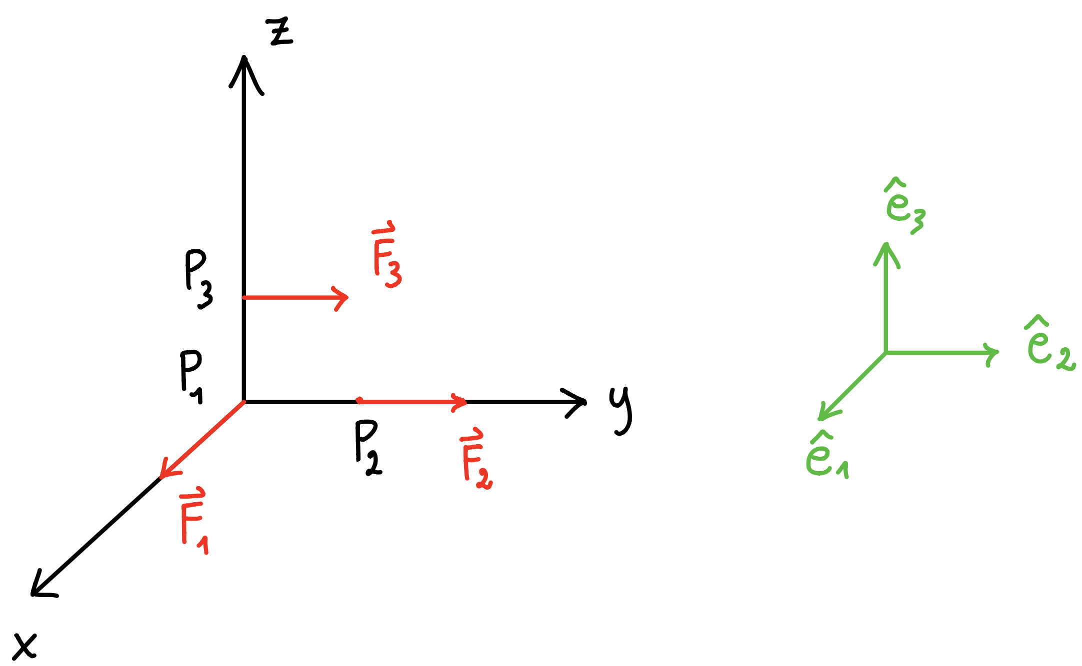
$$= -\frac{f_0}{\ell}\,\frac{1}{3}\,\ell^3\,\hat{e}_1 = -\frac{f_0\ell^2}{3}\,\hat{e}_1$$

$$C - O = \frac{1}{-\frac{f_0\ell}{2}}\left(-\frac{f_0\ell^2}{3}\right)\hat{e}_1 = \frac{2}{3}\ell\,\hat{e}_1$$



## Esercizio




$P_1 - O = \vec{0}$ $\qquad \vec{F}_1 = a\,\hat{e}_1$

$P_2 - O = \hat{e}_2$ $\qquad \vec{F}_2 = a\,\hat{e}_2$

$P_3 - O = \hat{e}_3$ $\qquad \vec{F}_3 = a\,\hat{e}_2$

$a > 0$

trovare l'asse centrale

## Sol.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = a\,\hat{e}_1 + 2a\,\hat{e}_2$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{5}\,a$$

Introduciamo un punto A generico

$$A - O = x\,\hat{e}_1 + y\,\hat{e}_2 + z\,\hat{e}_3$$

e imponiamo la condizione che appartenga all'asse centrale, cioè

$$\vec{M}_A \times \vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A = (P_1 - A) \times \vec{F}_1 + (P_2 - A) \times \vec{F}_2 + (P_3 - A) \times \vec{F}_3$$

$$\vec{M}_A = (-x\,\hat{e}_1 - y\,\hat{e}_2 - z\,\hat{e}_3) \times a\,\hat{e}_1 +$$

$$(-x\,\hat{e}_1 + (1-y)\,\hat{e}_2 - z\,\hat{e}_3) \times a\,\hat{e}_2 +$$

$$(-x\,\hat{e}_1 - y\,\hat{e}_2 + (1-z)\,\hat{e}_3) \times a\,\hat{e}_2$$

$$= y a\,\hat{e}_3 - z a\,\hat{e}_2 - x a\,\hat{e}_3 + z a\,\hat{e}_1$$

$$- x a\,\hat{e}_3 - (1-z) a\,\hat{e}_1$$

$$= a(2z-1)\,\hat{e}_1 - z a\,\hat{e}_2 + a(y-2x)\,\hat{e}_3$$

ricordiamo che

$$\vec{R} = a\,\hat{e}_1 + 2a\,\hat{e}_2$$

$$\vec{M}_A \times \vec{R} = \left[a(2z-1)\,\hat{e}_1 - z a\,\hat{e}_2 + a(y-2x)\,\hat{e}_3\right] \times$$

$$(a\,\hat{e}_1 + 2a\,\hat{e}_2) =$$

$$2a^2(2z-1)\,\hat{e}_3 + a^2 z\,\hat{e}_3 + a^2(y-2x)\,\hat{e}_2$$

$$-2a^2(y-2x)\,\hat{e}_1 = \vec{0}$$

proiettiamo lungo $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$

$\hat{e}_1: \quad -2a^2(y-2x) = 0$

$\hat{e}_2: \quad a^2(y-2x) = 0$

$\hat{e}_3: \quad 5a^2 z - 2a^2 = 0$

$$\begin{cases} y = 2x \\ 5z = 2 \longrightarrow z = 2/5 \end{cases}$$

l'intersezione di questi due piani ci dà l'asse centrale