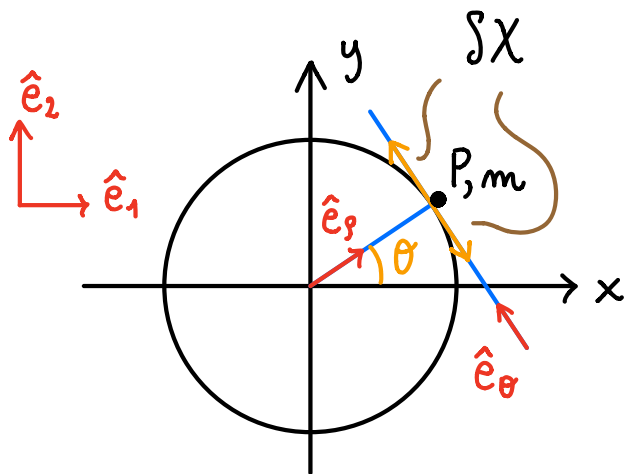


## SPOSTAMENTI VIRTUALI

→ definizione (vedere a pagina 150 delle note)

### Esempio



punto materiale  
che si sposta su una  
guida circolare di  
raggio  $R$

il numero di gradi di libertà è  $n = 1$

introduciamo  $q = \theta$

posizione del punto

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \rightarrow X(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta)^T$$

spostamento virtuale  $\delta X(\theta) = \frac{\partial X}{\partial \theta} \delta \theta$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} \delta \theta = (-R \sin \theta, R \cos \theta)^T \delta \theta$$

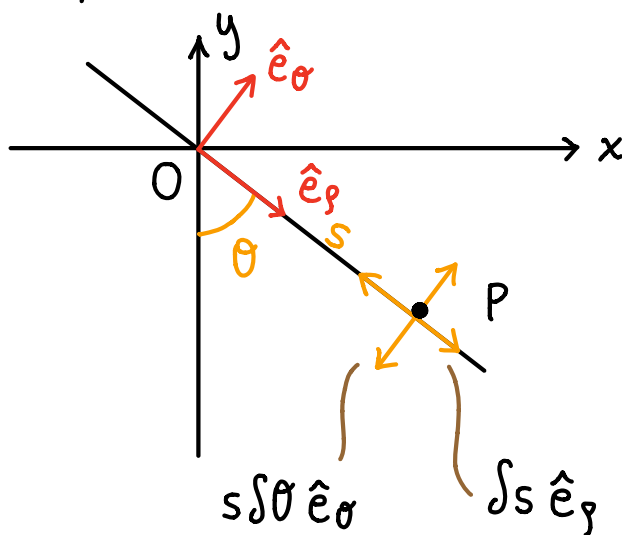
$$\delta X(\theta) = (-R \sin \theta, R \cos \theta)^T \delta \theta$$

introdotti  $e_\rho = (\cos \theta, \sin \theta)^T$

$$e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)^T$$

si ha  $\delta X(\theta) = R \delta \theta e_\theta$  (si veda la figura)

### Esempio



punto materiale che si sposta lungo una guida rotante sul piano attorno al suo punto fisso O

introduciamo

$$e_\rho = (\sin \theta, -\cos \theta)^T$$

$$e_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)^T$$

il numero di gradi di libertà è  $n = 2$

usiamo le coordinate lagrangiane  $q = (s, \theta)^T$

$s$  è l'ascissa del punto materiale lungo l'asta

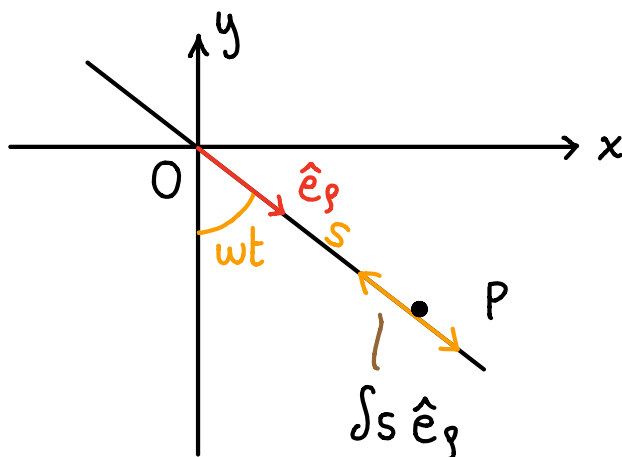
$$X(s, \theta) = (s \sin \theta, -s \cos \theta)^T$$

$$\begin{aligned} \delta X(s, \theta) &= \frac{\partial X}{\partial (s, \theta)} \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta & s \cos \theta \\ -\cos \theta & s \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta X(s, \theta) &= (\delta s \sin \theta + s \delta \theta \cos \theta, \\ &\quad -\delta s \cos \theta + s \delta \theta \sin \theta)^T \\ &= \delta s e_\rho + s \delta \theta e_\theta \quad (\text{si veda il disegno}) \end{aligned}$$

### Esempio

Nei due esempi precedenti  $X$  non dipende esplicitamente dal tempo; vediamo un caso in cui dipende dal tempo



consideriamo l'esempio precedente in cui  $\theta = \omega t$ , con  $\omega$  costante

allora  $x_P = s \sin(\omega t)$ ,  $y_P = -s \cos(\omega t)$

in questo caso  $m = 1$  e  $q = 5$

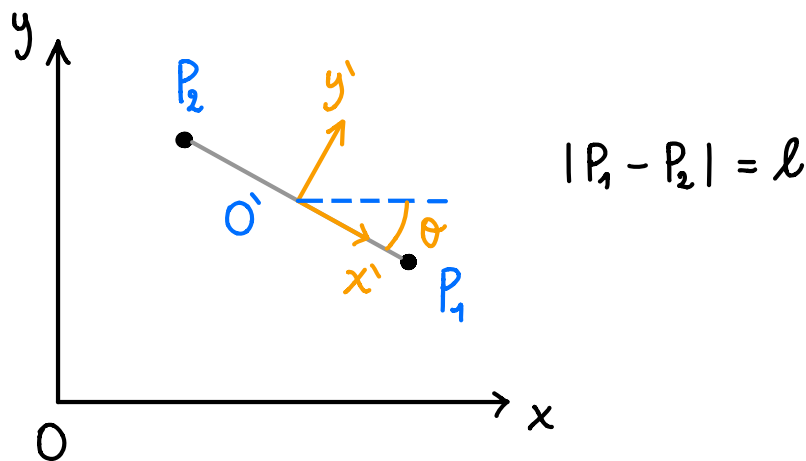
$$X(s) = (s \sin(\omega t), -s \cos(\omega t))^T$$

$$\int X(s) = (\int s \sin(\omega t), -\int s \cos(\omega t))^T$$

### caso del corpo rigido

(vedere alle pagine 150 - 152 delle note)

Esempio (caso in cui un corpo sia soggetto al solo vincolo di rigidità, formula 7.24)



il corpo rigido è costituito da due punti materiali vincolati a rimanere alla stessa distanza  $l$

prendiamo un punto  $O'$  solidale al corpo:  $O'$  è il punto medio di  $P_1 P_2$

introduciamo il riferimento solidale al corpo  $O'x'y'$

questo corpo ha  $m = 3$  gradi di libertà, e le sue possibili configurazioni sono individuate da

$$q = (x_0, y_0, \theta)^T$$

per  $P_1$  si ha

$$X_{P_1}(x_0, y_0, \theta) = (x_0, y_0)^T + R(\theta) \begin{pmatrix} l/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

matrice di rotazione da  $O'x'y'$  a  $Oxy$

$$X_{P_1} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{l}{2} \cos \theta \\ y_0 - \frac{l}{2} \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\delta X_{P_1} = \frac{\partial X_{P_1}}{\partial (x_0, y_0, \theta)} \delta q$$

$$\delta X_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{l}{2} \sin \theta \\ 0 & 1 & -\frac{l}{2} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta \theta \end{pmatrix}$$

$$\delta X_{P_1} = \begin{pmatrix} \delta x_0 - \frac{l}{2} (\sin \theta) \delta \theta \\ \delta y_0 - \frac{l}{2} (\cos \theta) \delta \theta \end{pmatrix}$$

oppure possiamo usare la formula 7.24

$$\delta X_{P_1} = \delta x_{O'} + \omega dt \times (X_{P_1} - x_{O'})$$

$$\text{con } x_{O'} = (x_{O'}, y_{O'}, 0)^T$$

$$\omega dt = (0, 0, -\dot{\theta})^T dt = (0, 0, -d\theta)^T$$

$$X_{P_1} - x_{O'} = R(\theta) x'_{P_1}$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x'_{P_1} = \begin{pmatrix} l/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega dt \times (X_{P_1} - x_{O'}) = -\left(\frac{l}{2} \sin \theta, \frac{l}{2} \cos \theta, 0\right)^T d\theta$$

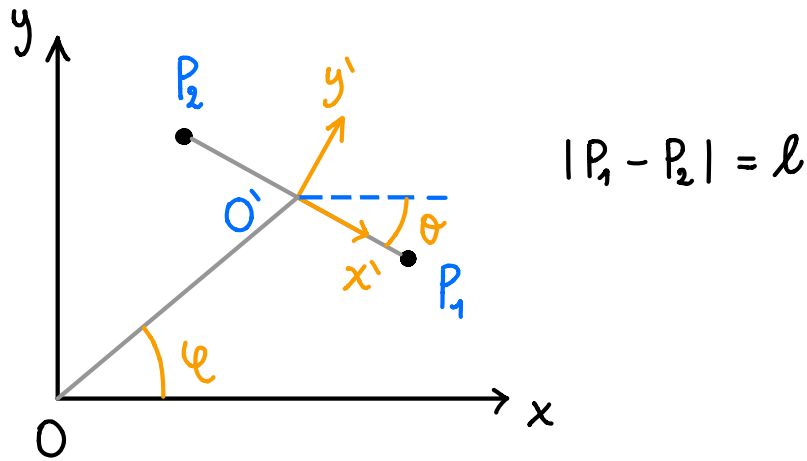
$$\delta X_{P_1} = \begin{pmatrix} \delta x_{O'} - \frac{l}{2} (\sin \theta) \delta \theta \\ \delta y_{O'} - \frac{l}{2} (\cos \theta) \delta \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove abbiamo sostituito  $d\theta, \delta x_{O'}, \delta y_{O'}$  con  $\delta \theta, \delta x_{O'}, \delta y_{O'}$   
(dato che i vincoli sono fissi)

Exempio (caso in cui il corpo è soggetto al vincolo di rigidità e ad altri vincoli, formula 7.25)

Consideriamo l'esempio precedente e imponiamo che

la distanza di  $O'$  da  $O$  rimanga costante



$$|O' - O| = R$$

in questo caso il numero di gradi di libertà è  $n = 2$ ,  
e introdotto l'angolo  $\varphi$  come in figura, poniamo

$$q = (\varphi, \theta)^T$$

poiché vogliamo usare la formula 7.25 per trovare

$\delta X_{P_1}$ , nella quale compare  $w = (0, 0, -\dot{\theta})^T$ , scriviamo

dei vettori in  $\mathbb{R}^3$

si ha

$$X_{O'}(\varphi) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)^T$$

$$\delta X_{O'} = \frac{\partial X_{O'}}{\partial (\varphi, \theta)} \delta q = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi & 0 \\ R \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \varphi \\ \delta \theta \end{pmatrix} =$$

$$(-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0)^T \delta \varphi$$

$$\omega dt \times (X_{P_1} - X_{O'}) = -\left(\frac{l}{2} \sin \theta, \frac{l}{2} \cos \theta, 0\right)^T d\theta$$

$$\delta X_{P_1} = \delta X_{O'} + \omega dt \times (X_{P_1} - X_{O'})$$

$$= \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \delta \varphi - \frac{l}{2} \sin \theta \delta \theta \\ R \cos \varphi \delta \varphi - \frac{l}{2} \cos \theta \delta \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

### caso del puro rotolamento

(vedere a pagina 152 delle note)

### caso delle coppie cinematiche

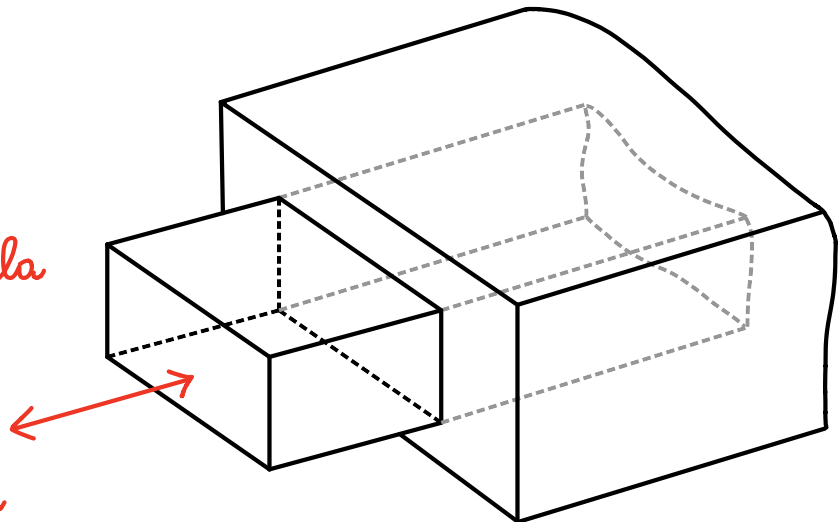
(vedere alle pagine 138 - 139 e 152 delle note)

non ho fatto la coppia elicoidale

qui mi limito a disegnare le coppie

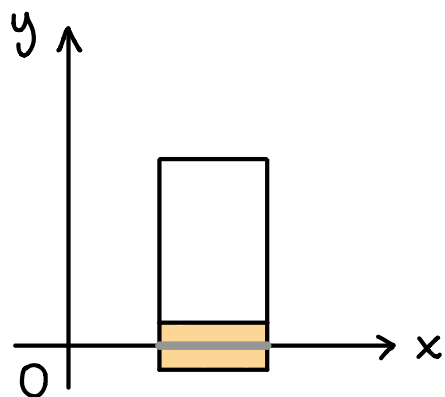
#### a) coppia prismatica

direzione di  
traslazione, è parallela  
alle generatrici  
della superficie  
cilindrica di contatto



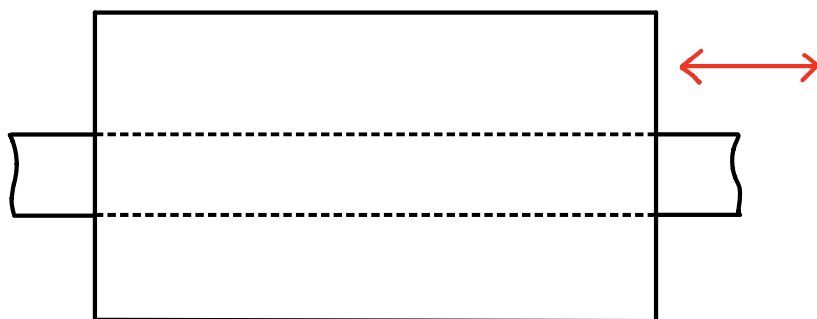


incontreremo spesso queste coppie  
negli esercizi, ad esempio



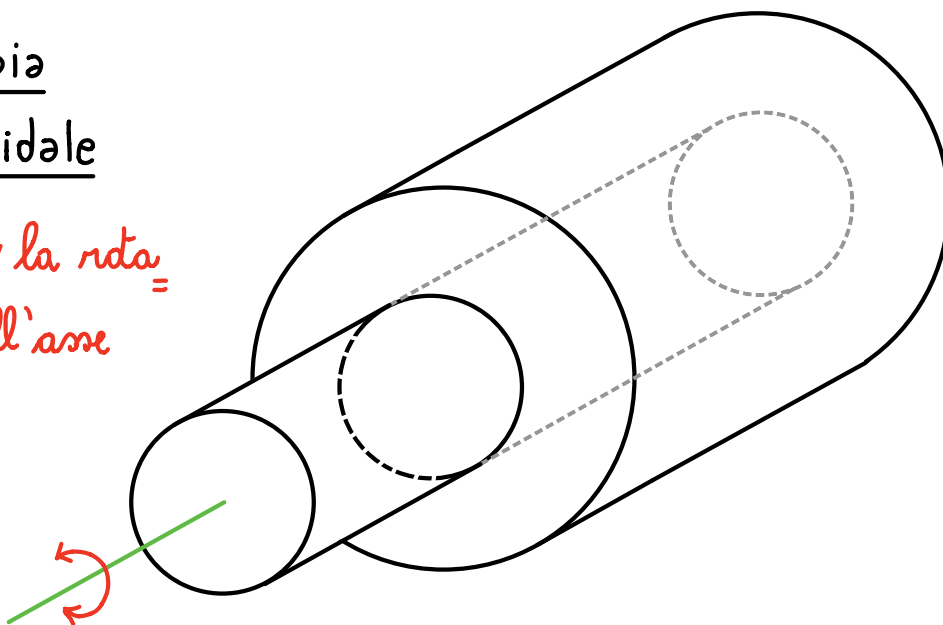
in arancione è indicata la  
coppia prismatica che  
consente al corpo di  
traslare lungo l'asse  $Ox$

il segmento grigio schematizza la superficie di contatto,  
ecco un ingrandimento



b) coppia  
rotoidale

è permessa solo la rota-  
zione attorno all'asse  
della superficie  
cilindrica di  
contatto

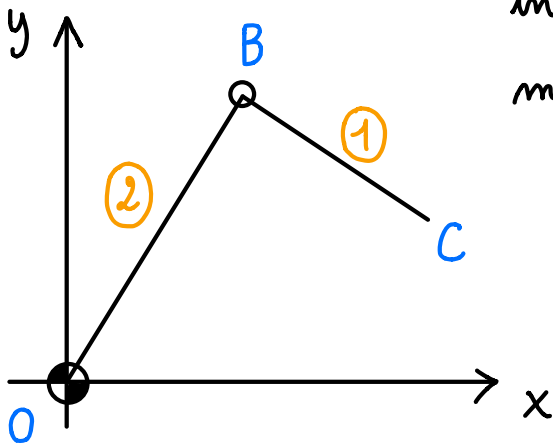


anche questo è un vincolo che si incontrerà molto spesso negli esercizi, e comparirà in due forme

1) coppia rotoidale fissa, indicata con 

2) coppia rotoidale mobile, indicata con 

ad esempio



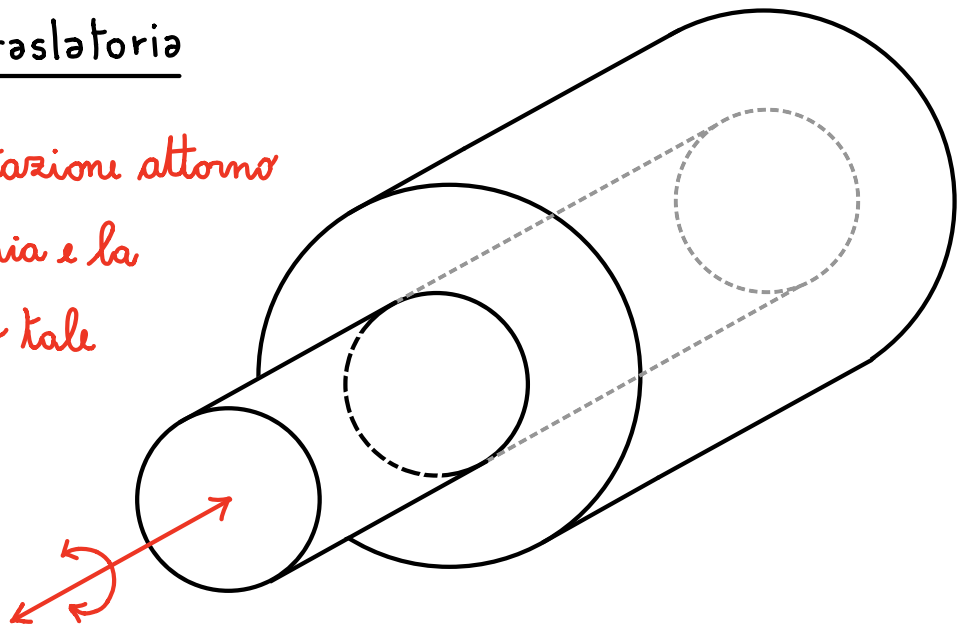
in B c'è una coppia rotoidale mobile, e in O una coppia rotoidale fissa

in entrambi i casi l'asse della coppia è perpendicolare al piano

la coppia in B permette le rotazioni (indipendenti tra loro) di ① e ②, la coppia in O permette la rotazione dell'asta ②

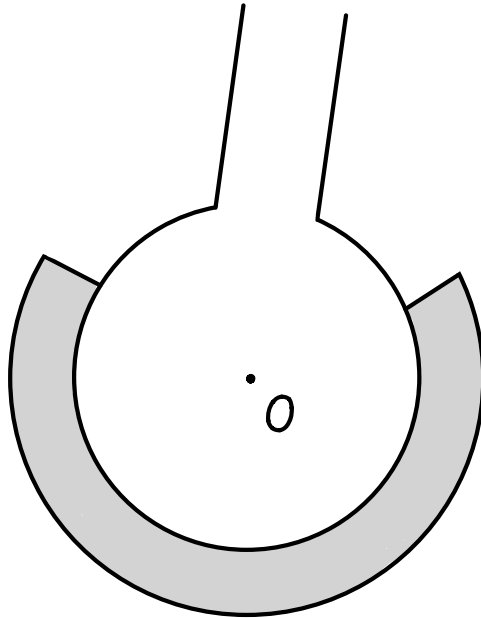
### c) coppia rototraslatoria

è permessa la rotazione attorno all'asse della coppia e la traslazione lungo tale asse



d) coppia sferica

è permessa la rotazione  
di un corpo rispetto  
all'altro intorno ad un  
qualsiasi asse passante  
per il centro della  
coppia (O)



ora mi riferisco a quanto scritto a pagina  
152 delle note

Per le coppie cinematiche, detti  $P_1$  e  $P_2$  due punti in contatto  
con  $P_1$  solidale ad un corpo della coppia e  $P_2$  solidale all'altro  
corpo della coppia, gli spostamenti virtuali di questi due punti  
sono legati dalla relazione

$$\delta X_1 = \delta X_2 + \delta \pi$$

dove  $\delta \pi$  è uno spostamento  
infinitesimo sul piano  $\pi$   
tangente alla superficie  
di contatto in  $P_1$  (e  $P_2$ )

