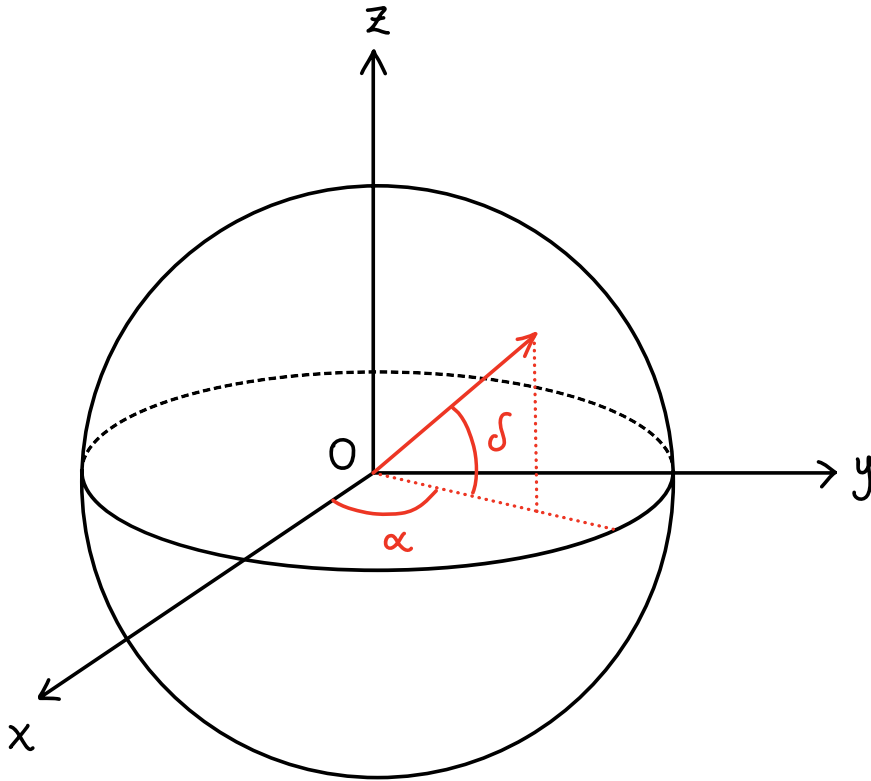


Esempio: varietà e spazio tangente

Sfera S^2 in \mathbb{R}^3



La sfera è data dall'insieme di punti

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 : \psi(x) = 0\}$$

con $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\psi(x) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$e \quad x = (x, y, z)^T$$

Verifichiamo che

$$\text{rango } \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in C$$

Si ha

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} = (2x, 2y, 2z)^T$$

il rango è 0 solo per $(x, y, z) = (0, 0, 0)$
che non è un punto della sfera.

Definiamo ora lo spazio tangente alla
sfera in un suo punto \mathbf{x} :

è l'insieme di tutti i vettori tangenti alla
sfera in \mathbf{x} .

Introduciamo le coordinate sferiche (α, δ)
con $0 \leq \alpha < 2\pi$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$.

Poniamo

$$\mathbf{q} = (\alpha, \delta)$$

e scriviamo \mathbf{x} come funzione di α, δ attra-
verso la mappa

$$\mathbf{q} \longrightarrow X(\mathbf{q})$$

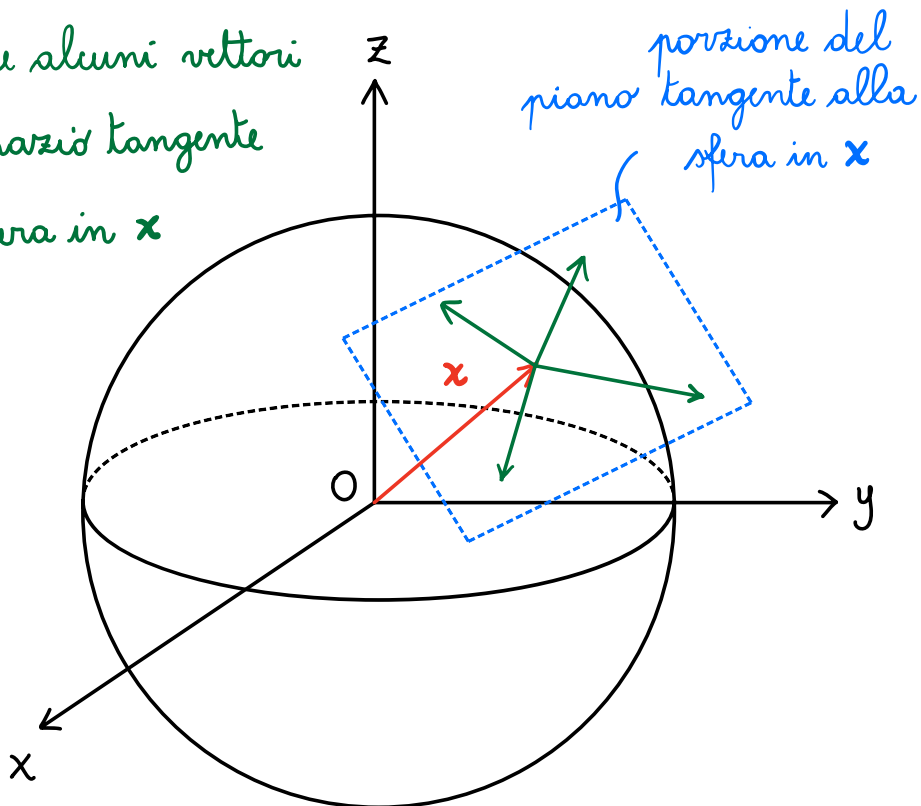
dove

$$X(\alpha, \delta) = \begin{pmatrix} R \cos \delta \cos \alpha, \\ R \cos \delta \sin \alpha, \\ R \sin \delta \end{pmatrix}^T$$

Allora, un generico vettore dello spazio tangente a C in x si scrive come segue:

$$v(\alpha, \delta, \dot{\alpha}, \dot{\delta}) = \frac{\partial X}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial X}{\partial \delta} \dot{\delta}$$

in verde alcuni vettori
dello spazio tangente
alla sfera in x



Tutti i vettori v giacciono sul piano tangente alla sfera in x .

Otteniamo

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = (-R \cos \delta \sin \alpha, R \cos \delta \cos \alpha, 0)^T$$

$$\frac{\partial X}{\partial \delta} = (-R \sin \delta \cos \alpha, -R \sin \delta \sin \alpha, R \cos \delta)^T$$

Si verifica subito che

$$x \cdot \frac{\partial X}{\partial \alpha} = 0, \quad x \cdot \frac{\partial X}{\partial \delta} = 0,$$

cioè le direzioni di $\frac{\partial X}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial X}{\partial \delta}$ sono \perp a

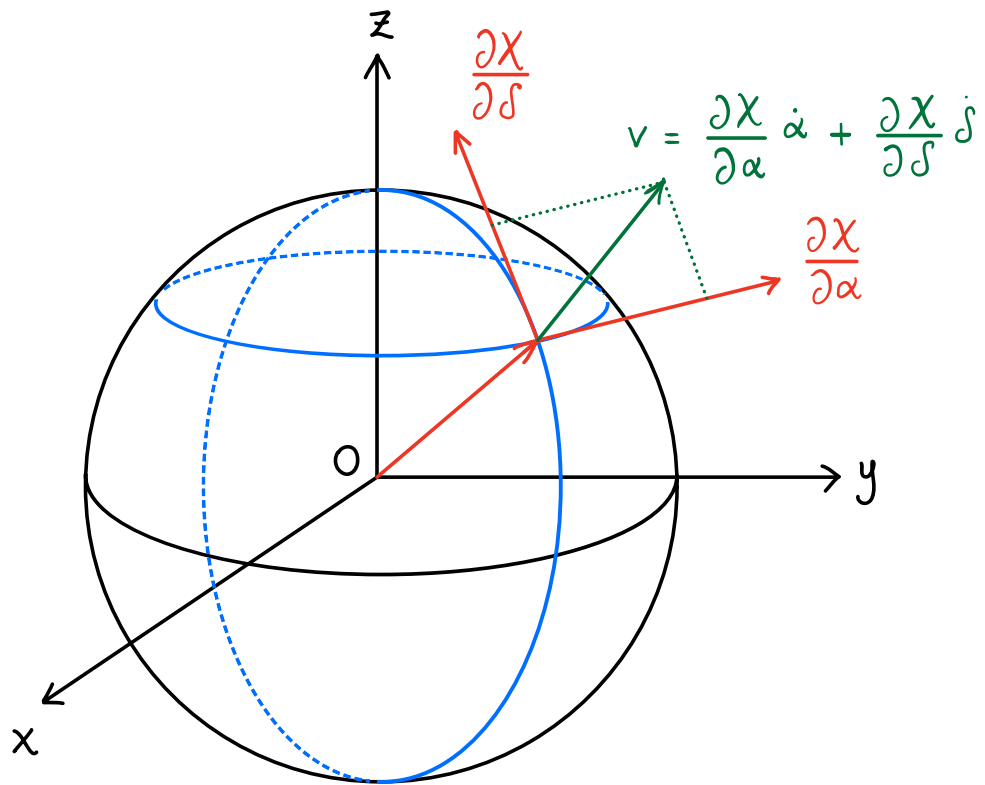
quella di x ; inoltre queste due direzioni sono indipendenti* e si vede che

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \delta} = 0$$

Allora i vettori $\frac{\partial X}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial X}{\partial \delta}$ costituiscono una

* in corrispondenza dei poli, dato che $\frac{\partial X}{\partial \alpha} = (0, 0, 0)^T$, non riusciamo a descrivere lo spazio tangente usando i parametri α, δ .

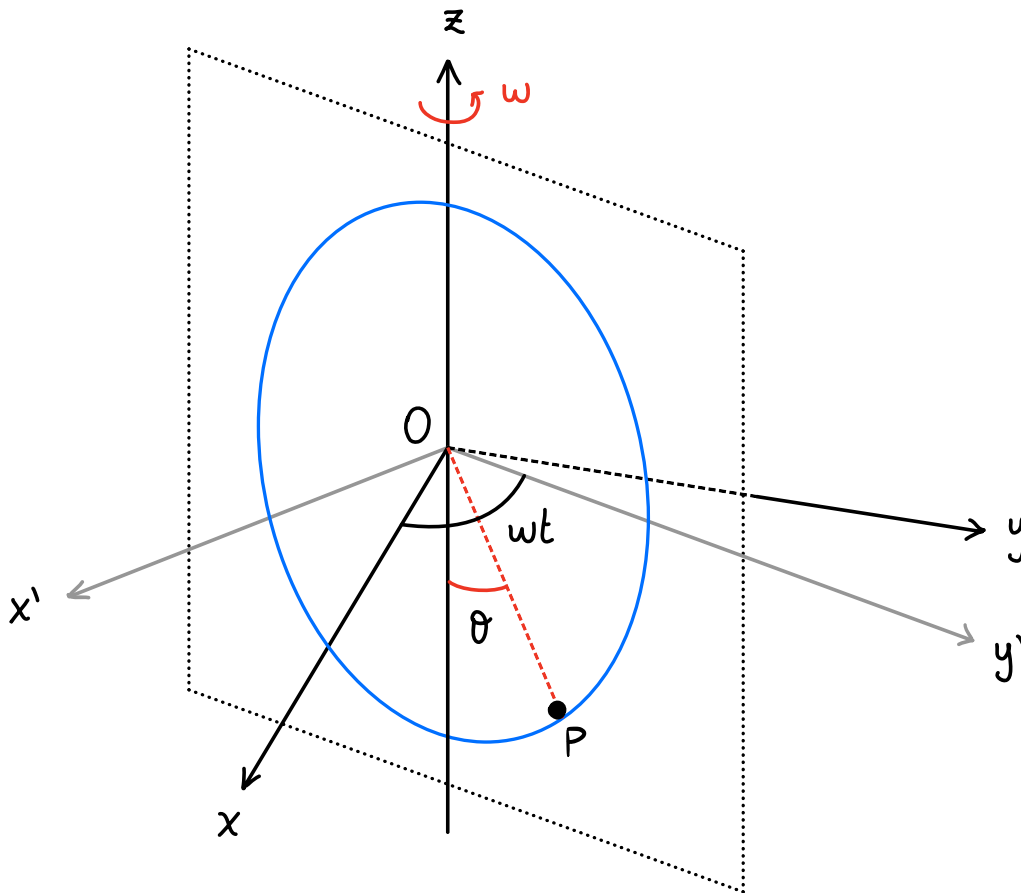
base dello spazio tangente con cui possiamo generare tutti i vettori v al variare di α, δ .



$\frac{\partial X}{\partial \delta}$ è tangente in x al meridiano passante per x

$\frac{\partial X}{\partial \alpha}$ è tangente in x al parallelo passante per x

Esempio sui vincoli mobili



Un punto materiale P si muove lungo una guida circolare che è messa in rotazione con velocità angolare costante ω attorno ad un asse che passa per due suoi punti e per il centro O . Introduciamo

$$\Sigma' = O x' y' z$$

con gli assi Ox' , Oz sul piano della guida e

$$\Sigma = Ox'y'z'$$

referimento fisso.

Gia Oz l'asse di rotazione della guida.

Determiniamo la varietà delle configurazioni

$$C_t = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \psi(x, y, z, t) = 0 \}$$

Il sistema ha un grado di libertà

$$n = 1$$

Quindi

$$k = 3N - n = 3 - 1 = 2$$

$$(\text{infatti } n = 3N - k)$$

e

$$\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $(x, y, z) \qquad t$

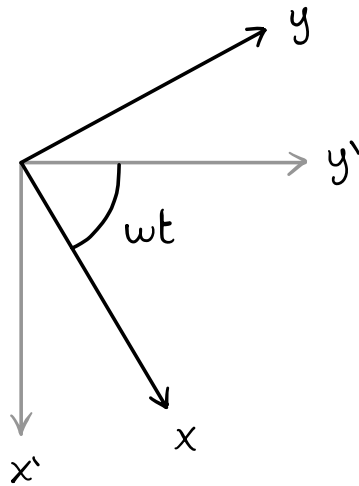
Un primo vincolo è dato da $|P - O| = l$,
cioè

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

Inoltre

$$x' = (\sin \omega t) x - (\cos \omega t) y$$

$$y' = (\cos \omega t) x + (\sin \omega t) y$$



Poiché P giace sul piano $y'-z$, il secondo vincolo è

$$x' = 0$$

Allora

$$\psi(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \\ (\sin \omega t) x - (\cos \omega t) y \end{pmatrix}$$

Mostriamo ora che

$$C_t = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \psi(x, y, z, t) = 0 \}$$

è una varietà di \mathbb{R}^3 di dimensione 1:

$$\frac{\partial \psi}{\partial (x, y, z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \end{pmatrix}$$

il rango di questa matrice è massimo (2)

$\forall (x, y, z) \in C_t$, cioè $\forall (x, y, z)$ t.c. $\psi(x, y, z, t) = 0$.

Infatti il rango è 1 se

→ $x = y = z = 0$, ma $(0, 0, 0) \notin C_t$

→ $z = 0$ e

$$(x, y) \parallel (\sin \omega t, -\cos \omega t)$$

ma $(x, y) \perp (\sin \omega t, -\cos \omega t)$, in

quanto $x' = 0$

Troviamo ora le velocità possibili e le velocità virtuali

Introduciamo la coordinata lagrangiana

$$q = \theta$$

e cerchiamo di scrivere

$$X(\theta, t) = (x(\theta, t), y(\theta, t), z(\theta, t))$$

Da

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = l \sin \theta \\ z' = -l \cos \theta \end{cases}$$

e da

$$x = (\sin \omega t) x' + (\cos \omega t) y'$$

$$y = -(\cos \omega t) x' + (\sin \omega t) y'$$

si ha

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \cos \omega t \\ y = l \sin \theta \sin \omega t \\ z = -l \cos \theta \end{cases}$$

$$X(\theta, t) = (l \sin \theta \cos \omega t, l \sin \theta \sin \omega t, -l \cos \theta)^T$$

Le velocità possibili sono

$$v(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{\partial X}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial X}{\partial t}$$

$$v(\theta, \dot{\theta}, t) =$$

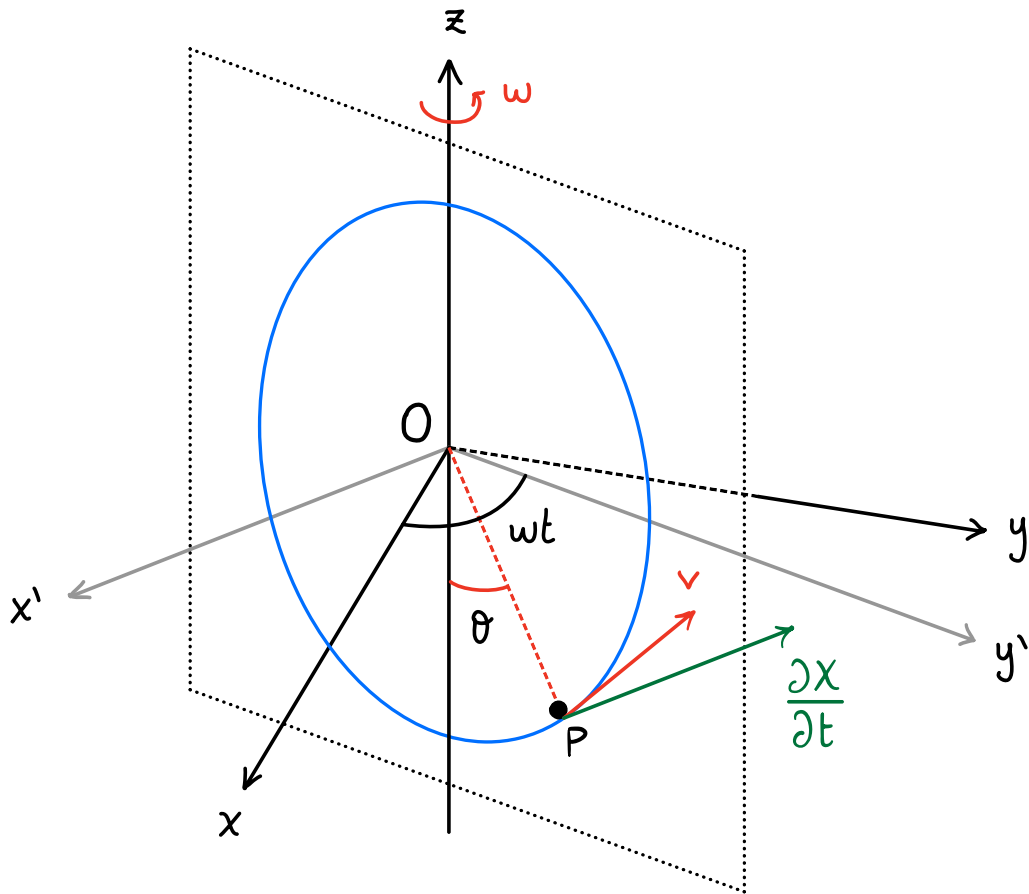
$$\dot{\theta} (l \cos \theta \cos \omega t, l \cos \theta \sin \omega t, l \sin \theta)^T +$$

$$(-l \omega \sin \theta \sin \omega t, l \omega \sin \theta \cos \omega t, 0)^T$$

Le velocità virtuali sono

$$v(\theta, \dot{\theta}, t) =$$

$$\dot{\theta} (l \cos \theta \cos \omega t, l \cos \theta \sin \omega t, l \sin \theta)^T$$



Si vede che

$$v = v + \frac{\partial X}{\partial t}$$

vettore \perp alla guida

vettore tangente

alla guida in P: la velocità virtuale è la velocità di P considerando la guida fissa