

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Matematica
17 Novembre 2022

Esercizio 1

Si consideri l'equazione di Newton

$$m\ddot{X} = kX, \quad k > 0,$$

dove $X = (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$ sono le coordinate di un punto materiale di massa m che si muove su un piano.

- i) Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange nelle coordinate polari $(q, \theta) \in (\mathbb{R}^+, S^1)$ definite sul piano del moto.

Assumendo che $m = 1$,

- ii) determinare la componente $\bar{q}(t)$ della soluzione $\bar{\gamma}(t) = (\bar{q}(t), \bar{\theta}(t))$ di tali equazioni con condizioni iniziali

$$q(0) = 1, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{k}{3}}.$$

- iii) mostrare che per ogni tempo $\tau > 0$, $\bar{q}(t)$ è un minimo debole stretto del funzionale

$$\mathcal{A}_{\bar{L}} = \int_0^\tau \tilde{L}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t)) dt,$$

nella classe di funzioni $C^1([0, \tau], \mathbb{R})$, dove $\tilde{L}(q, \dot{q})$ è la lagrangiana ridotta che si ottiene "eliminando" la coordinata θ nelle equazioni.

Esercizio 2

1. Data una funzione di quattro variabili scalari $S(q_1, q_2, P_1, Q_2)$ tale che

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial(q_1, q_2) \partial(P_1, Q_2)} \neq 0$$

su tutto il dominio considerato, mostrare che le relazioni

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}, \quad Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1}, \quad P_2 = -\frac{\partial S}{\partial Q_2}$$

definiscono localmente una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2).$$

2. Completare le relazioni

$$P_1 = q_1 p_2 - q_2 p_1, \quad Q_2 = q_1 p_1 + q_2 p_2$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$(p_1, p_2, q_1, q_1) \xrightarrow{\Psi} (P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

definita su $p_1, p_2, q_1, q_2 > 0$, utilizzando una funzione generatrice S dello stesso tipo del punto precedente.¹

¹*Suggerimento:* si ricordi la relazione $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, valida per ogni $x > 0$.

3. (*facoltativo*) Trovare la soluzione delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{4} \log^2(q_1^2 + q_2^2) + q_1(p_1 + p_2) - q_2(p_1 - p_2)$$

e con condizioni iniziali

$$p_1(0) = p_2(0) = q_1(0) = q_2(0) = 1.$$

1^o compito IFM, a.a. 2022/2023, 17 novembre 2022

Soluzione esercizio 1

i) Energia cinetica

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Energia potenziale

$$V(x, y) = -\frac{1}{2} k (x^2 + y^2)$$

Lagrangiana

$$\begin{aligned} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) &= T(\dot{x}, \dot{y}) - V(x, y) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} k (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Scriviamo le relazioni

$$\begin{cases} x = q \cos \theta \\ y = q \sin \theta \end{cases}$$

$(q, \theta) \in (\mathbb{R}^+, S^1)$, dalle quali si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{q} \cos \theta - q \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = \dot{q} \sin \theta + q \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

Otteniamo

$$x^2 + y^2 = q^2$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{q}^2 + q^2 \dot{\theta}^2$$

$$L(q, \dot{q}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{q}^2 + q^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} k q^2$$

Le equazioni di Lagrange associate ad L sono

$$\begin{cases} m \ddot{q} = m q \dot{\theta}^2 + k q \\ \frac{d}{dt} (m q^2 \dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

dalla seconda equazione si vede che

$$m q^2 \dot{\theta} = c$$

con c costante

ii) Determiniamo $\bar{q}(t)$ dalla relazione

$$q = \sqrt{x^2 + y^2}$$

L'equazione di Newton porge ($m = 1$)

$$\begin{cases} \ddot{x} = k x \\ \ddot{y} = k y \end{cases}$$

$$x(t) = A e^{\sigma t} + B e^{-\sigma t} \quad (\sigma = \sqrt{k})$$

$$y(t) = C e^{\sigma t} + D e^{-\sigma t}$$

Calcoliamo le c.i. :

$$x(0) = 1 \cdot \cos 0 = 1$$

$$y(0) = 1 \cdot \sin 0 = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0 - 1 \cdot \sqrt{\frac{k}{3}} \sin 0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 + 1 \cdot \sqrt{\frac{k}{3}} \cos 0 = \sqrt{\frac{k}{3}}$$

Yi ha

$$1 = A + B$$

$$\{\dot{x}(t) = \sigma(A e^{\sigma t} - B e^{-\sigma t})\}$$

$$0 = A - B$$

$$\rightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} (e^{\sigma t} + e^{-\sigma t}) = \cosh(\sqrt{k}t)$$

e

$$0 = C + D$$

$$\{\dot{y}(t) = \sigma(C e^{\sigma t} - D e^{-\sigma t})\}$$

$$\sqrt{\frac{k}{3}} = \sqrt{k} (C - D)$$

$$\rightarrow C = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad D = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}} (e^{\sigma t} - e^{-\sigma t}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sinh(\sqrt{k}t)$$

Allora

$$\bar{q}(t) = \sqrt{\cosh^2(\sqrt{k}t) + \frac{1}{3} \sinh^2(\sqrt{k}t)}$$

iii)

Lagrangiana ridotta \tilde{L}

$$\begin{aligned}\tilde{L}(q, \dot{q}) &= (L(q, \dot{q}, \dot{\theta}) - \dot{\theta} c) \Big|_{\dot{\theta} = c/q^2} \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{c^2}{2q^2} + \frac{1}{2} \kappa q^2\end{aligned}$$

dall'equazione ● si ha

$$q^2 \dot{\theta} = c \quad (\text{costante})$$

$$\text{dove } c = (q(0))^2 \dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{\kappa}{3}}$$

$$\tilde{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{\kappa}{6q^2} + \frac{1}{2} \kappa q^2$$

$$\tilde{L}_{\dot{q}\dot{q}} = 1, \quad \tilde{L}_{q\dot{q}} = 0$$

$$\tilde{L}_q = \frac{\kappa}{3q^3} + \kappa q, \quad \tilde{L}_{qq} = \kappa - \frac{\kappa}{q^4}$$

$$a(t) = \frac{1}{2} > 0, \quad b(t) = 0$$

$$c(t) = \frac{\kappa}{2} \left(1 - \frac{1}{(\bar{q}(t))^4} \right)$$

Equazione di Jacobi

$$-\frac{1}{2} \ddot{\eta} + \frac{\kappa}{2} \left(1 - \frac{1}{(\bar{q}(t))^4} \right) \eta = 0$$

- $$\dot{m} = \kappa \left(1 - \frac{1}{(\bar{q}(t))^4} \right) m$$

$$\dot{m}(0) = 1, \quad m(0) = 0$$

Assumiamo che esista

$$t_1 = \min \{ t > 0 : m(t) = 0 \}$$

allora deve esistere $0 < t_2 < t_1$ tale che

$$\dot{m}(t_2) = 0$$

integrando ● si ottiene

$$\dot{m}(t_2) - 1 = \int_0^{t_2} \Gamma(t) m(t) dt = -1$$

$$\text{dove } \Gamma(t) = \kappa \left(1 - \frac{1}{(\bar{q}(t))^4} \right)$$

notiamo che $\bar{q}(t) \geq 1$, perciò $\Gamma(t) \geq 0$,

dunque deve esistere $0 < t_3 < t_2$ tale che

$$m(t_3) = 0$$

ma ciò contraddice l'ipotesi ●

Concludiamo che $\bar{q}(t)$ è un minimo debole

stretto di A_τ per ogni $\tau > 0$

Soluzione esercizio 2

i) Usiamo la condizione di Lie e consideriamo

$$P \cdot dQ - p \cdot dq$$

Si può scrivere

$$P \cdot dQ - p \cdot dq =$$

$$d(P_1 Q_1) - Q_1 dP_1 + P_2 dQ_2 - P_1 dq_1 - P_2 dq_2 =$$

$$d(P_1 Q_1 - S)$$

ii) Verifichiamo

$$P_1 = q_1 P_2 - q_2 P_1, \quad Q_2 = q_1 P_1 + q_2 P_2$$

nella forma

$$\begin{pmatrix} -q_2 & q_1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} \begin{pmatrix} -q_2 & q_1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \frac{q_1 Q_2 - q_2 P_1}{q_1^2 + q_2^2} = \frac{\partial S}{\partial q_1}$$

$$P_2 = \frac{q_1 P_1 + q_2 Q_2}{q_1^2 + q_2^2} = \frac{\partial S}{\partial q_2}$$

$$S(q_1, q_2, P_1, Q_2) = \frac{Q_2}{2} \log(q_1^2 + q_2^2) - P_1 \arctan\left(\frac{q_1}{q_2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial(P_1, Q_2) \partial(q_1, q_2)} = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} \begin{pmatrix} -q_2 & q_1 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

che ha determinante uguale a $-1/(q_1^2 + q_2^2)$

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = -\arctan \frac{q_1}{q_2}$$

$$P_2 = -\frac{\partial S}{\partial Q_2} = -\frac{1}{2} \log(q_1^2 + q_2^2)$$

Abbiamo dunque

$$(P_1, P_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\psi} \left(q_1 P_2 - q_2 P_1, -\frac{1}{2} \log(q_1^2 + q_2^2), -\arctan \frac{q_1}{q_2}, q_1 P_1 + q_2 P_2 \right)$$

iii)

Per rispondere calcoliamo $K = H \circ \psi^{-1}$

$$K = P_2^2 + P_1 + Q_2$$

$$X_K = (0, -1, 1, 2P_2)^T$$

Le c.i. per le nuove variabili sono

$$P_1(0) = 0, \quad P_2(0) = -\frac{1}{2} \log 2,$$

$$Q_1(0) = -\frac{\pi}{4}, \quad Q_2(0) = 2$$

La soluzione delle equaz. di Hamilton con hamiltoniana K e c.i. appena trovate è

$$P_1(t) = 0, \quad P_2(t) = -\frac{1}{2} \log 2 - t,$$

$$Q_1(t) = t - \frac{\pi}{4}, \quad Q_2(t) = 2 - t \log 2 - t^2$$

Scriviamo ora $\psi^{-1}(P_1, P_2, Q_1, Q_2)$:

$$q_1^2 + q_2^2 = e^{-2P_2}, \quad \frac{q_1}{q_2} = -\tan Q_1$$

$$\rightarrow q_1 = -e^{-P_2} \sin Q_1$$

$$q_2 = e^{-P_2} \cos Q_1$$

inoltre da

$$P_1 = \frac{q_1 Q_2 - q_2 P_1}{q_1^2 + q_2^2}, \quad P_2 = \frac{q_1 P_1 + q_2 Q_2}{q_1^2 + q_2^2}$$

si ha

$$P_1 = -e^{P_2} (Q_2 \sin Q_1 + P_1 \cos Q_1)$$

$$P_2 = e^{P_2} (Q_2 \cos Q_1 - P_1 \sin Q_1)$$

La soluzione cercata è

$$q_1(t) = -\sqrt{2} e^t \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$q_2(t) = \sqrt{2} e^t \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$p_1(t) = -\left(2 - t \log 2 - t^2\right) \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$p_2(t) = \left(2 - t \log 2 - t^2\right) \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$