

# Compito parziale di Istituzioni di Fisica Matematica

## 14 Novembre 2023

### Esercizio 1

Si consideri l'equazione di Newton

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0, \\ \ddot{z} &= -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

di un punto materiale di massa unitaria che si muove sul piano  $(x, z)$  soggetto ad una forza di intensità costante.

1. Determinare la soluzione di tale equazione con condizioni iniziali

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

2. Mostrare che la funzione  $\bar{u}(x) = z(x)$  ottenuta dalla soluzione del punto precedente, è un estremale del funzionale

$$\mathcal{A}_L = \int_0^{x_1} L(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) dx,$$

definito dalla lagrangiana

$$L(u, u') = \sqrt{1-u} \sqrt{1+u'^2}$$

con  $u' = \frac{du}{dx}$ .

3. Mostrare che  $\bar{u}(x)$  è un minimo debole stretto del funzionale  $\mathcal{A}_L$  per ogni  $x_1 > 0$  nella classe di funzioni  $C^1([0, x_1], \mathbb{R})$ . *Suggerimento:* cercare la soluzione dell'equazione di Jacobi in una forma polinomiale.

### Esercizio 2

1. Si completi la relazione

$$Q = e^q$$

ad una trasformazione canonica univalente

$$\mathbb{R}^2 \ni (p, q) \xrightarrow{\Psi} (P, Q)$$

tramite il metodo della funzione generatrice.

2. Si consideri il sistema hamiltoniano ad un grado di libertà con funzione di Hamilton

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 e^{-2q} + p$$

e se ne calcoli la soluzione con condizioni iniziali al tempo  $t = 0$

$$p_0 = 1, \quad q_0 = 0$$

considerando il sistema hamiltoniano ottenuto tramite la trasformazione canonica  $\Psi$ .

3. Fissato un tempo  $\tau > 0$  si verifichi che si ha

$$K(\Phi^\tau(P, Q)) = K(P, Q),$$

dove  $K = H \circ \Psi^{-1}$  e  $\Phi^t(P, Q)$  è il flusso integrale del campo vettoriale hamiltoniano  $X_K$ .

# Soluzioni

## Esercizio 1

1. La soluzione è data da

$$\begin{aligned}x(t) &= t, \\z(t) &= -\frac{t^2}{4}.\end{aligned}$$

2. Otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial u} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+u'^2}{1-u}}, \\ \frac{\partial L}{\partial u'} &= u' \sqrt{\frac{1-u}{1+u'^2}}, \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} &= \frac{u''}{1+u'^2} \sqrt{\frac{1-u}{1+u'^2}} - \frac{u'^2}{2\sqrt{1-u}\sqrt{1+u'^2}}.\end{aligned}$$

L'equazione di Eulero-Lagrange per  $L$  diventa

$$\frac{u''}{1+u'^2} \sqrt{\frac{1-u}{1+u'^2}} - \frac{u'^2}{2\sqrt{1-u}\sqrt{1+u'^2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+u'^2}{1-u}}, \quad (1)$$

che può essere semplificata nella forma

$$u'' = -\frac{1}{2} \left( \frac{1+u'^2}{1-u} \right).$$

Si verifica che la funzione

$$\bar{u}(x) = -\frac{x^2}{4},$$

ottenuta dalla soluzione del punto precedente, soddisfa l'equazione (1). Infatti, notiamo che

$$1 + \bar{u}'^2 = 1 - \bar{u} = 1 + \frac{x^2}{4} \quad (2)$$

e

$$\bar{u}'' = -\frac{1}{2}.$$

Segue che  $\bar{u}(x)$  è un estremale del funzionale  $\mathcal{A}_L$ .

3. Per scrivere l'equazione di Jacobi ci servono le seguenti derivate:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} &= -\frac{1}{4(1-u)} \sqrt{\frac{1+u^2}{1-u}}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u'} &= -\frac{u'}{2\sqrt{1-u}\sqrt{1+u^2}}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u'^2} &= \frac{1}{1+u^2} \sqrt{\frac{1-u}{1+u^2}}.\end{aligned}$$

Ricordando che vale (2), si ha

$$\begin{aligned}a(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial u'^2}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) = \frac{2}{4+x^2}, \\ b(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u'}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) = \frac{x}{2(4+x^2)}, \\ c(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) = -\frac{1}{2(4+x^2)}.\end{aligned}$$

L'equazione di Jacobi

$$-\frac{d}{dx}(a\eta') + (c-b)\eta = 0$$

diventa

$$-\frac{2}{4+x^2}\eta'' + \frac{4x}{(4+x^2)^2}\eta' - \frac{4}{(4+x^2)^2}\eta = 0,$$

che può essere semplificata nella forma

$$(4+x^2)\eta'' - 2x\eta' + 2\eta = 0.$$

La soluzione di questa equazione con condizioni iniziali  $\eta(0) = 0$ ,  $\dot{\eta}(0) = 1$  è data da

$$\eta(x) = x.$$

Notando che  $\eta(x) > 0$  per  $x > 0$  concludiamo che  $\bar{u}(x)$  è un minimo debole stretto del funzionale  $\mathcal{A}_L$  per ogni  $x_1 > 0$  nella classe di funzioni  $C^1([0, x_1], \mathbb{R})$ .

## Esercizio 2

1. Considero una funzione generatrice della forma  $S(q, P)$ . Le relazioni che definiscono implicitamente la trasformazione sono

$$p = S_q, \quad Q = S_P.$$

Dalla seconda si ottiene che

$$S_{Pq} = e^q \neq 0.$$

Possiamo quindi porre

$$S = Pe^q$$

e quindi

$$p = Pe^q,$$

da cui

$$(P, Q) = (pe^{-q}, e^q).$$

2. La funzione di Hamilton  $K$  nelle variabili  $(P, Q)$  è

$$K(P, Q) = H \circ \Psi^{-1}(P, Q) = \frac{1}{2}P^2 + PQ.$$

Il sistema hamiltoniano corrispondente è

$$\dot{P} = -K_Q = -P, \quad \dot{Q} = K_P = P + Q.$$

La prima equazione è indipendente e la sua soluzione generale è

$$P(t) = P_0 e^{-t}.$$

La seconda equazione diventa quindi

$$\dot{Q} - Q = P_0 e^{-t}, \tag{3}$$

che ha come soluzione particolare  $\bar{Q}(t) = -\frac{P_0}{2}e^{-t}$ . La soluzione generale della (3) è quindi

$$Q(t) = Ae^t - \frac{P_0}{2}e^{-t}. \tag{4}$$

Le condizioni iniziali corrispondenti a  $(p_0, q_0) = (1, 0)$  sono

$$(P_0, Q_0) = (1, 1),$$

per cui, sostituendo in (4), si trova che

$$A = Q_0 + \frac{P_0}{2} = \frac{3}{2}.$$

La soluzione del problema di Cauchy nelle nuove variabili è quindi

$$P(t) = e^{-t}, \quad Q(t) = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} = e^t + \sinh(t)$$

per cui, la soluzione richiesta nelle vecchie variabili è

$$p(t) = P(t)Q(t) = 1 + e^{-t} \sinh(t), \quad q(t) = \log(Q(t)) = \log(e^t + \sinh(t)).$$

3. Dai conti fatti al punto 2. si vede che il flusso integrale del campo vettoriale hamiltoniano  $X_K$  è

$$\Phi^t(P, Q) = (Pe^{-t}, Qe^t + P \sinh(t)).$$

Sa  $\tau > 0$  è un tempo fissato si ha

$$\begin{aligned} K(\Phi^\tau(P, Q)) &= \frac{1}{2}P^2e^{-2\tau} + Pe^{-\tau}(Qe^\tau + P \sinh(\tau)) \\ &= \frac{1}{2}P^2e^{-2\tau} + Pe^{-\tau} \left( Qe^\tau + \frac{P}{2}(e^\tau - e^{-\tau}) \right) \\ &= \frac{1}{2}P^2e^{-2\tau} + PQ + \frac{1}{2}P^2(1 - e^{-2\tau}) = K(P, Q). \end{aligned}$$