Esercizio (19 gennaio 2021 e 14 giugno 2021)

Si considerino le funzioni di Hamilton

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\left[|p|^2|q|^2 - (p\cdot q)^2\right] + V(|q|)$$

$$K(p,q) = \frac{1}{2}\left(|p|^2 + |q|^2\right)$$

con $q \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ e $V : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2

i) Calcolare la parentesi di Lie

$$[X_H, X_K]$$

dei campi vettoriali hamiltoniani associati ad H e K

ii) Assumendo che

$$V(x) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

mostrare che il sistema hamiltoniano definito da

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = [X_H, X_K]$$

è integrabile con il metodo di Hamilton-Jacobi

Sol.

i)

$$[X_H, X_K] = X_{-\{H,K\}}$$

$$\{H,K\} = \frac{\partial H}{\partial q}\cdot\frac{\partial K}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\cdot\frac{\partial K}{\partial q}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = |p|^2 q - (p\cdot q)p + V' \frac{q}{|q|},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = |q|^2 p - (p\cdot q)q,$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = q, \qquad \frac{\partial K}{\partial p} = p$$

$$\{H,K\} = \cancel{|p|^2 (p\cdot q)} - \cancel{|p|^2 (p\cdot q)} + \frac{V'}{|q|}(p\cdot q) - \cancel{|q|^2 (p\cdot q)} + \cancel{|q|^2 (p\cdot q)}$$

$$= \frac{V'}{|q|}(p\cdot q)$$

$$X_{-\{H,K\}} = \left(\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{V'}{|q|}(p\cdot q)\right), -\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{V'}{|q|}(p\cdot q)\right)\right)^T$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{V'}{|q|}(p\cdot q)\right) = \frac{V''}{|q|^2}(p\cdot q)q + \frac{V'}{|q|}p - \frac{V'}{|q|^2}(p\cdot q)\frac{q}{|q|}$$

$$= \frac{(p\cdot q)}{|q|^2}\left(V'' - \frac{V'}{|q|}\right)q + \frac{V'}{|q|}p$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{V'}{|q|}(p\cdot q)\right) = \frac{V'}{|q|}q$$

$$\begin{cases} \dot{p} = \dfrac{(p\cdot q)}{|q|^2}\left(V'' - \dfrac{V'}{|q|}\right)q + \dfrac{V'}{|q|}p \\ \dot{q} = -\dfrac{V'}{|q|}q \end{cases}$$

ii)

Partiamo dalla funzione hamiltoniana

$$-\{H, K\} = -\frac{V'(|q|)}{|q|}(p\cdot q)$$

dove

$$V(|q|) = \frac{1}{2}\log(1+|q|^2)$$

$$V'(|q|) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+|q|^2} 2|q| = \frac{|q|}{1+|q|^2}$$

Allora

$$-\{H, K\} = -\frac{p \cdot q}{1+|q|^2}$$

L'equazione di Hamilton - Jacobi per la funzione caratteristica $W(q,\alpha)$ è

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q} \cdot q\right) \frac{1}{1+|q|^2} = \tilde{e}(\alpha) \qquad \left(\tilde{e}(\alpha) = -e(\alpha)\right)$$

Cercando $W(q,\alpha) = \sum_{j=1}^{n} W_j(q_j,\alpha)$ si ha

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W_j}{\partial q_j} q_j = \tilde{e}(\alpha)\left(1 + \sum_{j=1}^{n} q_j^2\right)$$

che si scompone nelle n equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{\partial W_j}{\partial q_j} q_j - \tilde{e}(\alpha) q_j^2 = \tilde{e}_j(\alpha) \qquad j = 1, \dots, n$$

con $\sum_{j=1}^{n} \tilde{e}_j(\alpha) = \tilde{e}(\alpha)$

Per concludere si deve mostrare che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q}(q,\alpha) \neq 0$$

per ogni $q \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^n$

Scegliendo $\tilde{e}_j(\alpha) = \alpha_j$ per $j = 1, \dots, n$, otteniamo

$$\frac{\partial W_j}{\partial q_j} = \tilde{e}(\alpha)\, q_j + \frac{\alpha_j}{q_j}$$

La matrice delle derivate seconde è

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_i \partial q_j} = \begin{cases} q_j + \dfrac{1}{q_j}, & \text{se } i = j \\ q_j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q} = \begin{pmatrix} q_1 + \frac{1}{q_1} & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 + \frac{1}{q_2} & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n & q_n & \cdots & q_n + \frac{1}{q_n} \end{pmatrix}$$

che possiamo anche riscrivere come

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \, \partial q} = \begin{pmatrix} \frac{1+q_1^2}{q_1} & \frac{q_1^2}{q_1} & \cdots & \frac{q_1^2}{q_1} \\ \frac{q_2^2}{q_2} & \frac{1+q_2^2}{q_2} & \cdots & \frac{q_2^2}{q_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{q_n^2}{q_n} & \frac{q_n^2}{q_n} & \cdots & \frac{1+q_n^2}{q_n} \end{pmatrix}$$

Si vede che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \, \partial q} = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} q_j} \det \begin{pmatrix} 1+q_1^2 & q_1^2 & \cdots & q_1^2 \\ q_2^2 & 1+q_2^2 & \cdots & q_2^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^2 & q_n^2 & \cdots & 1+q_n^2 \end{pmatrix}$$

sostituiamo alla colonna j-esima $(j = 1, \dots, n-1)$
la differenza tra la colonna j-esima e l'ultima colonna:

matrice identità $(n-1) \times (n-1)$

$$\begin{pmatrix} & & & & q_1^2 \\ & I_{n-1} & & & q_2^2 \\ & & & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1+q_n^2 \end{pmatrix}$$

quindi sostituiamo all'ultima riga la somma di tutte le righe

$$\begin{pmatrix} & & & & q_1^2 \\ & I_{n-1} & & & q_2^2 \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+|q|^2 \end{pmatrix}$$

e il determinante di questa matrice è $1+|q|^2$

Abbiamo trovato che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q} = \frac{1+|q|^2}{\prod_{j=1}^{n} q_j} \neq 0$$

$$q \neq 0$$

Esercizio (20 dicembre 2016)

Siano date le due hamiltoniane

$$H_1(p,q) = \frac{1}{2}\left(|p|^2 + |q|^2\right)$$

$$H_2(p,q) = \frac{1}{2}|p|^2 + q_2$$

con $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$

i) Si dimostri che X_{H_j}, $j = 1, 2$, sono integrabili, trovando una coppia di integrali primi F_j, G_j in involuzione e indipendenti su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

Sol.

$X_{H_1}(p,q)$

un integrale primo è l'hamiltoniana H_1

$$F_1(p,q) = H_1(p,q) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)$$

poi notiamo che H_1 è l'hamiltoniana di un sistema meccanico, cioè è l'energia meccanica

$$H_1(p,q) = T(p) + V(q)$$

si può dire di più: è l'hamiltoniana di un moto centrale dato che $V(q) = V(|q|)$; allora sappiamo che la componente del momento angolare perpendicolare al piano su cui si svolge il moto è un integrale primo:

$$G_1(p,q) = p_1 q_2 - q_1 p_2$$

Verifichiamo che F_1, G_1 sono in involuzione:

$$\{F_1, G_1\} = q_1 q_2 + q_2(-q_1) - p_1(-p_2) - p_2 p_1 = 0$$

e che sono in generale indipendenti:

$$\frac{\partial F_1}{\partial(p_1, p_2, q_1, q_2)} = (p_1, p_2, q_1, q_2)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial(p_1, p_2, q_1, q_2)} = (q_2, -q_1, -p_2, p_1)$$

(non sono indipendenti se a) $p_1 = q_2$, $p_2 = -q_1$
b) $p_1 = -q_2$, $p_2 = q_1$)

$X_{H_2}(p,q)$

un integrale primo è l'hamiltoniana H_2, dato che come H_1 non dipende dal tempo

$$F_2(p,q) = H_2(p,q)$$

poi notiamo che q_1 è una variabile ciclica, e quindi p_1 è un integrale primo, prendiamo

$$G_2(p,q) = p_1$$

Abbiamo che

$$\{F_2, G_2\} = \frac{\partial F_2}{\partial q_1} \frac{\partial G_2}{\partial p_1} = 0$$

inoltre F_2, G_2 sono genericamente indipendenti:

$$\frac{\partial F_2}{\partial (p_1, p_2, q_1, q_2)} = (p_1, p_2, 0, 1)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial (p_1, p_2, q_1, q_2)} = (1, 0, 0, 0)$$

(sono sempre indipendenti)

ii) Dimostrare che

$$X_3 = [X_2, X_1]$$

è un campo vettoriale hamiltoniano e integrabile, trovando una coppia di integrali primi F_3, G_3 in involuzione e indipendenti su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

Sol.

Poiché X_1, X_2 sono campi vettoriali hamiltoniani, dalla teoria sappiamo che $X_3 = [X_2, X_1]$ è un c. v. hamiltoniano, infatti

$$[X_{H_2}, X_{H_1}] = X_{\{H_1, H_2\}}$$

e l'hamiltoniana $\{H_1, H_2\}$ è

$$H_3 = \{H_1, H_2\} = q_1 p_1 + q_2 p_2 - p_1 \cdot 0 - p_2 \cdot 1$$

$$= q \cdot p - p_2$$

Notiamo che H_3 non è dipendente dal tempo e che

$$H_3(p,q) = H_3^{(1)}(p_1,q_1) + H_3^{(2)}(p_2,q_2)$$

con

$$H_3^{(1)}(p_1,q_1) = p_1 q_1, \quad H_3^{(2)}(p_2,q_2) = p_2 q_2 - p_2$$

quindi due integrali primi sono

$$F_3(p,q) = p_1 q_1, \quad G_3(p,q) = p_2 q_2 - p_2$$

breve digressione inerente a questo punto

Scriviamo l'equazione di H.-J. associata ad H_3

$$q_1 \frac{\partial W_1}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial W_2}{\partial q_2} - \frac{\partial W_2}{\partial q_2} = e(\alpha)$$

con $W_1(q_1,\alpha) + W_2(q_2,\alpha) = W(q_1,q_2,\alpha)$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Si ha

$$\begin{cases} q_1 \dfrac{\partial W_1}{\partial q_1} = \alpha_1 \\ (q_2 - 1) \dfrac{\partial W_2}{\partial q_2} = \cancel{\alpha_1} + \alpha_2 - \cancel{\alpha_1} \end{cases} \quad (e(\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$W(q_1,q_2,\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_1 \log|q_1| + \alpha_2 \log|q_2-1|$$

Allora si vede che due integrali sono

$$\alpha_1 = q_1 p_1$$

$$\alpha_2 = p_2(q_2-1)$$

Vediamo che

$$\{F_3, G_3\} = p_1 \cdot 0 + 0 - q_1 \cdot 0 - 0 = 0$$

inoltre

$$\frac{\partial F_3}{\partial(p_1,p_2,q_1,q_2)} = (q_1, 0, p_1, 0)$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial(p_1,p_2,q_1,q_2)} = (0, q_2-1, 0, p_2)$$

è un punto di equilibrio dell'eq. di Hamilton per H_3

(non sono indipendenti se $(p_1,p_2,q_1,q_2) = (0,0,0,1)$)

iii) Si consideri il flusso di X_3, $\Phi_3^t(p,q)$ e la proiezione naturale

$$\pi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\pi_2(p,q) = (p_2, q_2)$$

Si dimostri che $\forall (\bar{p}_1, \bar{q}_1) \in \mathbb{R}^2$ la mappa

$$\mathbb{R}^2 \ni (p_2,q_2) \longrightarrow \pi_2 \circ \Phi_3^t(\bar{p}_1, p_2, \bar{q}_1, q_2)$$

conserva l'area

Sol.

$$H_3(p,q) = p\cdot q - p_2 = p_1 q_1 + p_2 q_2 - p_2$$

Si vede facilmente che il sistema hamiltoniano definito da H_3 si disaccoppia nei due sistemi

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -p_1 \\ \dot{q}_1 = q_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{p}_2 = -p_2 \\ \dot{q}_2 = q_2 - 1 \end{cases}$$

e che questi sono sistemi hamiltoniani con hamiltoniana

$$H_3^{(1)}(p_1,q_1) = p_1 q_1 \qquad H_3^{(2)}(p_2,q_2) = p_2(q_2-1)$$

i flussi corrispondenti sono

$q_2(t) = 1 + \alpha e^t$
$q_2(0) = 1 + \alpha$
$\alpha = q_2(0) - 1$

$$\Phi_1^t(p_1,q_1) = (e^{-t}p_1, e^t q_1)$$

$$\Phi_2^t(p_2,q_2) = (e^{-t}p_2, 1 + (q_2-1)e^t)$$

Allora la mappa

$$\pi_2 \circ \Phi_3^t(\bar{p}_1, p_2, \bar{q}_1, q_2) =$$

$$\Phi_2^t(p_2,q_2) = (e^{-t}p_2, 1+(q_2-1)e^t)$$

conserva l'area perchè è il flusso di un campo vett. ham. di hamiltoniana $H_3^{(2)}(p_2,q_2) = p_2(q_2-1)$

Esercizio (18 dicembre 2015)

Consideriamo le due funzioni hamiltoniane

$$H_1(p,q) = \frac{1}{2}(|p|^2 + |q|^2)$$

$$H_2(p,q) = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{|q|}$$

definite in

$$D_1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad D_2 = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$$

Siano Φ_1^t, Φ_2^t i flussi di X_{H_1}, X_{H_2}

i) Scrivere le espressioni di X_{H_1}, X_{H_2} e mostrare che i flussi non commutano

Sol.

I campi vettoriali sono

$$\begin{cases} \dot{p} = -q \\ \dot{q} = p \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{q}{|q|^3} \\ \dot{q} = p \end{cases}$$

$$X_{H_1}(p,q) = (-q, p)^T \qquad X_{H_2}(p,q) = \left(-\frac{q}{|q|^3}, p\right)^T$$

Per mostrare che i flussi non commutano, mostriamo che i campi non commutano e a tal fine calcoliamo

$$[X_{H_1}, X_{H_2}] = X_{\{H_2, H_1\}}$$

$$\{H_2, H_1\} = \frac{q}{|q|^3} \cdot p - p \cdot q =$$

$$p \cdot q \left(\frac{1}{|q|^3} - 1 \right)$$

si vede che poichè i campi in generale non commutano neppure i rispettivi flussi commutano

ii) Trovare un sottoinsieme I di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ invariante per X_{H_1}, X_{H_2} t.c. Φ_1^t, Φ_2^t ristretti ad I commutino

Sol.

Partiamo dall'equazione

$$\{H_2, H_1\} = p \cdot q \left(\frac{1}{|q|^3} - 1 \right)$$

se $p \cdot q = 0$ e $p \cdot q$ è un integrale primo per X_{H_1}, X_{H_2} allora avremmo che i flussi commutano in un certo sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ invariante

Calcoliamo le seguenti derivate di Lie

$$\mathcal{L}_{H_1} p \cdot q = (-q) \cdot q + p \cdot p = |p|^2 - |q|^2$$

$$\mathcal{L}_{H_2}\, p\cdot q = -\frac{q}{|q|^3}\cdot q + p\cdot p = |p|^2 - \frac{|q|^2}{|q|^3}$$

$$= |p|^2 - \frac{1}{|q|}$$

se $|p|^2 = |q|^2 = 1$ allora $p\cdot q$ è un integrale primo per X_{H_1}, X_{H_2}; ora calcoliamo

$$\mathcal{L}_{H_1} |p|^2 = 2p\cdot(-q) = -2p\cdot q$$

$$\mathcal{L}_{H_2} |p|^2 = 2p\cdot\left(-\frac{q}{|q|^3}\right) = -\frac{2p\cdot q}{|q|^3}$$

e

$$\mathcal{L}_{H_1} |q|^2 = 2p\cdot q$$

$$\mathcal{L}_{H_2} |q|^2 = 2p\cdot q$$

allora si vede che $|p|^2, |q|^2$ sono integrali primi sia per X_{H_1} che per X_{H_2} se $p\cdot q = 0$

Da quanto trovato segue che l'insieme invariante cercato è il fibrato tangente unitario di S^1

$$T_1 S^1 = \{(p,q)\in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,\ |p| = |q| = 1,\ p\cdot q = 0\}$$

Oppure si poteva seguire il suggerimento dato nel testo: si consideri l'hamiltoniana

$$K(p,q) = \frac{1}{2}\left[|p|^2|q|^2 - (p\cdot q)^2\right]$$

e si dimostri che le funzioni

$$|p|^2, \; |q|^2, \; p\cdot q$$

sono costanti lungo le soluzioni del sistema hamiltoniano definito da K, e si scelgano valori particolari di queste costanti

$$\{|p|^2, K\} = -2p\cdot\left(|p|^2 q - (p\cdot q)p\right)$$

$$= -2\, p\cdot q\, |p|^2 + 2\, p\cdot q\, |p|^2 = 0$$

$$\{|q|^2, K\} = 2q\cdot\left(p|q|^2 - (p\cdot q)q\right)$$

$$= 2\, p\cdot q\, |q|^2 - 2\, p\cdot q\, |q|^2 = 0$$

$$\{p\cdot q, K\} = p\cdot\left(p|q|^2 - (p\cdot q)q\right) -$$

$$q\cdot\left(|p|^2 q - (p\cdot q)p\right) =$$

$$|p|^2|q|^2 - (p\cdot q)^2 - |p|^2|q|^2 + (p\cdot q)^2 = 0$$

segue che $|p|^2, |q|^2, p\cdot q$ sono integrali primi per X_K

Scriviamo il campo vettoriale X_K

$$\begin{cases} \dot{p} = (p\cdot q)p - |p|^2 q \\ \dot{q} = p|q|^2 - (p\cdot q)q \end{cases}$$

Scegliendo c. i. tali che

$$p \cdot q = 0, \quad |p|^2 = |q|^2 = 1$$

il sistema precedente diventa

$$\begin{cases} \dot{p} = -q \\ \dot{q} = p \end{cases}$$

Notiamo infine che i sistemi hamiltoniani che si ottengono a partire da K, H_1, H_2 restringendoci a $T_1 S^1$ sono equivalenti, e la dinamica descritta è quella di un oscillatore armonico

(in effetti si noti che

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{q}{|q|^3} \\ \dot{q} = p \end{cases} \quad \text{diventa } (|q| = 1) \quad \begin{cases} \dot{p} = -q \\ \dot{q} = p \end{cases}$$)

iii) Trovare una funzione $f(p,q)$ t. c. valga la relazione ($\lambda \in \mathbb{R}$ costante)

$$\{\{H_1, H_2\}, f\} = 0, \quad f \neq \{H_1, H_2\}\lambda$$

Sol.

Se f è un integrale primo di X_{H_3}, $H_3 = \{H_1, H_2\}$,

f soddisfa la relazione sopra

Potremmo cercare questo integrale, tuttavia procediamo seguendo un'altra strada; partiamo dall'identità di Jacobi

$$\{f, \cancel{\{H_1, H_2\}}\} + \{H_2, \{f, H_1\}\} + \{H_1, \{H_2, f\}\} = 0$$

$$\{H_2, \{f, H_1\}\} + \{H_1, \{H_2, f\}\} = 0$$

questa ultima equazione ci suggerisce che possiamo cercare f in modo che sia un integrale primo per X_{H_1}, X_{H_2}; si avrebbe così

$$\{f, H_1\} = 0 = \{H_2, f\}$$

Notiamo che H_1, H_2 sono le hamiltoniane di un moto centrale (armonico e di Keplero), allora la componente del momento angolare perpendicolare al piano in cui si svolge il moto è un integrale primo

$$f = p_1 q_2 - q_1 p_2$$

$$\{f, H_1\} = (-p_2, p_1) \cdot (p_1, p_2) - (q_2, -q_1) \cdot (q_1, q_2) = 0$$

$$\{f, H_2\} = (-p_2, p_1) \cdot (p_1, p_2) - (q_2, -q_1) \cdot (q_1, q_2) / |q|^3$$
$$= 0$$

Esercizio

Consideriamo i campi hamiltoniani associati alle funzioni hamiltoniane

$$H(p,q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

$$K(p,q) = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$$

$p, q \in \mathbb{R}$

i) Calcolare $[X_H, X_K]$ e i flussi Φ_H^t, Φ_K^t

Sol.

$$\begin{cases} \dot{p} = -q \\ \dot{q} = p \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{p} = q \\ \dot{q} = p \end{cases}$$

$$X_H(p,q) = (-q, p)^T \qquad X_K(p,q) = (q, p)^T$$

Calcoliamo

$$[X_H, X_K] = X_{\{K,H\}}$$

$$\{K,H\} = (-q)p - pq = -2qp$$

$$X_{\{K,H\}} = (2p, -2q)^T$$

$$\begin{cases} \dot{p} = 2p \\ \dot{q} = -2q \end{cases}$$

flusso Φ_H^t

$$\ddot{q} = -q \quad (\text{oscillatore armonico})$$

$$q(t) = \alpha \cos t + \beta \operatorname{sen} t, \quad q(0) = \alpha$$

$$\dot{q}(t) = p(0) = -\alpha \operatorname{sen} t + \beta \cos t, \quad p(0) = \beta$$

$$\begin{cases} q(t) = q(0)\cos t + p(0) \operatorname{sen} t \\ p(t) = -q(0) \operatorname{sen} t + p(0) \cos t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = R_t \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}, \quad R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\Phi_H^t(p,q) = R_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

flusso Φ_K^t

$$\ddot{q} = q \quad (\text{repulsore armonico})$$

$$q(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}, \quad q(0) = \alpha + \beta$$

$$\dot{q}(t) = p(t) = \alpha e^t - \beta e^{-t}, \quad p(0) = \alpha - \beta$$

$$\alpha = q(0) - \beta$$

$$p(0) = q(0) - 2\beta \longrightarrow \beta = \frac{q(0) - p(0)}{2}$$

$$\alpha = \frac{q(0) + p(0)}{2}$$

$$q(t) = \left(\frac{q(0)+p(0)}{2}\right) e^{t} + \left(\frac{q(0)-p(0)}{2}\right) e^{-t}$$

$$= q(0) \cosh t + p(0) \operatorname{senh} t$$

$$p(t) = \left(\frac{q(0)+p(0)}{2}\right) e^{t} - \left(\frac{q(0)-p(0)}{2}\right) e^{-t}$$

$$= q(0) \operatorname{senh} t + p(0) \cosh t$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = S_t \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}, \quad S_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \operatorname{senh} t \\ \operatorname{senh} t & \cosh t \end{pmatrix}$$

$$\Phi_K^t(p,q) = S_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Quindi, i due flussi sono

$$\Phi_H^t(p,q) = R_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \Phi_K^t(p,q) = S_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \qquad S_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \operatorname{senh} t \\ \operatorname{senh} t & \cosh t \end{pmatrix}$$

ii) Verificare che vale la seguente formula, che misura la mancata commutazione dei flussi:

$$f \circ \Phi_K^t \circ \Phi_H^s - f \circ \Phi_H^s \circ \Phi_K^t =$$

$$st\, L_{[X_H, X_K]} f + O_3(s,t)$$

nel caso particolare di $f = p$

Sol.

Calcoliamo prima $L_{[X_H, X_K]} f$, cioè la derivata di Lie di f rispetto all'hamiltoniana $\{K, H\}$; abbiamo già visto che

$$\{K, H\} = -2qp, \quad X_{\{K,H\}} = (2p, -2q)^T,$$

allora

$$L_{[X_H, X_K]} f = -\frac{\partial \{K, H\}}{\partial q} = 2p$$

$$= \{f, \{K, H\}\}$$

Dunque

$$st\, L_{[X_H, X_K]} f = 2pst$$

Passiamo ora a calcolare $f \circ \Phi_K^t \circ \Phi_H^s$, si ha

$$f \circ \Phi_K^t \circ \Phi_H^s = f\left(S_t R_s \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right)$$

$$R_s \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \cos s - q \operatorname{sen} s \\ p \operatorname{sen} s + q \cos s \end{pmatrix}$$

$$S_t R_s \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \operatorname{senh} t \\ \operatorname{senh} t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \cos s - q \operatorname{sen} s \\ p \operatorname{sen} s + q \cos s \end{pmatrix} =$$

$$(p \cosh t \cos s - q \cosh t \operatorname{sen} s + p \operatorname{senh} t \operatorname{sen} s + q \operatorname{senh} t \cos s , \; p \operatorname{senh} t \cos s - q \operatorname{senh} t \operatorname{sen} s + p \cosh t \operatorname{sen} s + q \cosh t \cos s)^T =$$

$$(p (\cosh t \cos s + \operatorname{senh} t \operatorname{sen} s) + q (-\cosh t \operatorname{sen} s + \operatorname{senh} t \cos s), \; p (\operatorname{senh} t \cos s + \cosh t \operatorname{sen} s), \; q (-\operatorname{senh} t \operatorname{sen} s + \cosh t \cos s))^T$$

$$f \circ \Phi_K^t \circ \Phi_H^s = p (\cosh t \cos s + \operatorname{senh} t \operatorname{sen} s) + q (-\cosh t \operatorname{sen} s + \operatorname{senh} t \cos s)$$

infine calcoliamo $f \circ \Phi_H^s \circ \Phi_K^t$

$$f \circ \Phi_H^s \circ \Phi_K^t = f \left(R_s S_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right)$$

$$S_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \cosh t + q \operatorname{senh} t \\ p \operatorname{senh} t + q \cosh t \end{pmatrix}$$

$$R_s S_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\operatorname{sen} s \\ \operatorname{sen} s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \cosh t + q \operatorname{senh} t \\ p \operatorname{senh} t + q \cosh t \end{pmatrix} =$$

$$(p \cos s \cosh t + q \cos s \operatorname{senh} t - p \operatorname{sen} s \operatorname{senh} t$$
$$- q \operatorname{sen} s \cosh t ,\ p \operatorname{sen} s \cosh t + q \operatorname{sen} s \operatorname{senh} t$$
$$+ p \cos s \operatorname{senh} t + q \cos s \cosh t)^T =$$

$$(p (\cos s \cosh t - \operatorname{sen} s \operatorname{senh} t) +$$
$$q (\cos s \operatorname{senh} t - \operatorname{sen} s \cosh t),$$
$$p (\operatorname{sen} s \cosh t + \cos s \operatorname{senh} t) +$$
$$q (\operatorname{sen} s \operatorname{senh} t + \cos s \cosh t))^T$$

$$f \circ \Phi_H^s \circ \Phi_K^t = p (\cos s \cosh t - \operatorname{sen} s \operatorname{senh} t) + q (\cos s \operatorname{senh} t - \operatorname{sen} s \cosh t)$$

Possiamo finalmente calcolare

$$f \left(S_t R_s \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) - f \left(R_s S_t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) =$$

$$p (\cancel{\cosh t \cos s} + \operatorname{senh} t \operatorname{sen} s) + q (- \cancel{\cosh t \operatorname{sen} s} + \cancel{\operatorname{senh} t \cos s})$$
$$- p (\cancel{\cos s \cosh t} - \operatorname{sen} s \operatorname{senh} t) - q (\cancel{\cos s \operatorname{senh} t} - \cancel{\operatorname{sen} s \cosh t}) =$$

$2p \,\text{senh}\, t \,\text{sen}\, s$

Verifichiamo che

$$2p \,\text{senh}\, t \,\text{sen}\, s = 2pst + \mathcal{O}_3(s,t)$$

scriviamo

$$\text{sen}\, s = s + \mathcal{O}(s^3)$$

$$\text{senh}\, t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1 + t - (1-t) + \mathcal{O}(t^2)}{2}$$

$$= t + \mathcal{O}(t^2)$$

dunque si ha

$$2p \,\text{senh}\, t \,\text{sen}\, s = 2pst + \mathcal{O}_3(s,t)$$

<u>Esercizio</u>

Consideriamo i due campi vettoriali

$$X = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$$

con $p, q \in \mathbb{R}^n$

i) Mostrare che X, Y sono c. v. hamiltoniani e trovare per ciascuno di essi una funzione di Hamilton

Sol.

$X = (-q, p)$

$$\begin{cases} \dot{p} = -q \\ \dot{q} = p \end{cases} \qquad \frac{\partial X}{\partial(p,q)} = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix} = J$$

con O_n matrice nulla $n \times n$

I_n matrice identità $n \times n$

J matrice simplettica

notiamo che $J \dfrac{\partial X}{\partial(p,q)} = J J = -I_{2n}$ è

una matrice simmetrica e poiché X è definito su un

semplicemente connesso si ha che X è hamiltoniano

La funzione hamiltoniana $F(p,q)$ soddisfa

$$-\frac{\partial F}{\partial q} = -q \,, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = p$$

Si ottiene $F(p,q) = \frac{1}{2}\left(|p|^2 + |q|^2\right)$

$Y = (0, p)$

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = p \end{cases} \qquad \frac{\partial Y}{\partial(p,q)} = \begin{pmatrix} O_n & O_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$$

notiamo che $J \dfrac{\partial Y}{\partial(p,q)} = \begin{pmatrix} -I_n & O_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix}$ è una matrice simmetrica e poiché Y è definito su un semplicemente connesso si ha che Y è hamiltoniano

La funzione hamiltoniana $G(p,q)$ soddisfa

$$-\frac{\partial G}{\partial q} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial p} = p$$

Si ottiene $G(p) = \frac{1}{2}|p|^2$

ii) Calcolare $[X, Y]$

Sol.

Chiamiamo X_F e X_G rispettivamente X, Y

$$[X_F, X_G] = X_{\{G,F\}}$$

$$\{G, F\} = 0 - p \cdot q = -p \cdot q$$

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\partial(-p \cdot q)}{\partial q} = p \\ \dot{q} = \dfrac{\partial(-p \cdot q)}{\partial p} = -q \end{cases}$$

$$X_{\{G,F\}} = (p, -q)^T$$

iii) Trovare la mappa a tempo fissato $\tau \in \mathbb{R}$ del flusso di $[X, Y]$ e verificare che definisce una trasformazione canonica ψ

Sol.

$$\begin{cases} \dot{p} = p \\ \dot{q} = -q \end{cases}$$

$$\Phi^{\tau}(p,q) = (e^{\tau}p, e^{-\tau}q)$$

$$(p,q) \xrightarrow{\psi} (P,Q) = (e^{\tau}p, e^{-\tau}q)$$

per verificare che ψ è una trasformazione canonica usiamo la condizione di Lie

$$P \cdot dQ - p \cdot dq = (e^{\tau}p) \cdot e^{-\tau}dq - p \cdot dq =$$

$$p \cdot dq - p \cdot dq = 0$$

iv) Scrivere i campi vettoriali X, Y nelle coordinate canoniche definite da ψ

Sol.

$$(P,Q) \xrightarrow{\psi^{-1}} (p,q) = (e^{-\tau}P, e^{\tau}Q)$$

$$\psi_* X_F = \left(\frac{\partial \psi}{\partial(p,q)} X_F\right) \circ \psi^{-1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial(p,q)} = \begin{pmatrix} e^{\tau} I_n & O_n \\ O_n & e^{-\tau} I_n \end{pmatrix}, \quad X_F = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial (p,q)} X_F = \begin{pmatrix} -e^{\tau} q \\ e^{-\tau} p \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial (p,q)} X_F\right) \circ \psi^{-1} = \begin{pmatrix} -e^{\tau} e^{\tau} Q \\ e^{-\tau} e^{-\tau} P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2\tau} Q \\ e^{-2\tau} P \end{pmatrix}$$

$$\psi_* X_F = \begin{pmatrix} -e^{2\tau} Q \\ e^{-2\tau} P \end{pmatrix}$$

Poi

$$\psi_* X_G = \left(\frac{\partial \psi}{\partial (p,q)} X_G\right) \circ \psi^{-1}, \quad X_G = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial (p,q)} X_G = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\tau} p \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial (p,q)} X_G\right) \circ \psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\tau} e^{-\tau} P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2\tau} P \end{pmatrix}$$

$$\psi_* X_G = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2\tau} P \end{pmatrix}$$