

Esercizio 1

Si consideri la hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \frac{t}{2} |\mathbf{p}|^2 + \frac{1}{2t} (|\mathbf{q}|^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$$

con $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

i) Completare le relazioni

$$Q_1 = \frac{q_1^2}{2t}, \quad Q_2 = \frac{q_2^2}{2t}$$

ad una trasformazione canonica dipendente dal tempo

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \xrightarrow{\Psi} (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t),$$

con $\mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2$, e scrivere la hamiltoniana K coniugata ad H tramite la trasformazione Ψ .

- ii) Trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi associata alla hamiltoniana K .
- iii) Determinare due integrali primi indipendenti per il campo vettoriale X_H .

Esercizio 1

i) Cerco una funzione generatrice $S(q, P, t)$.

Da

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{q_1^2}{2t} \quad Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = \frac{q_2^2}{2t}$$

trovo

$$S(q, P, t) = \frac{q_1^2 P_1}{2t} + \phi_1(q, P_2, t)$$

$$S(q, P, t) = \frac{q_2^2 P_2}{2t} + \phi_2(q, P_1, t)$$

Rongo

$$S(q, P, t) = \frac{1}{2t} (q_1^2 P_1 + q_2^2 P_2)$$

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P} = \frac{q_1 q_2}{t^2} \neq 0$$

$$P_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{q_1 P_1}{t} \quad P_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{q_2 P_2}{t}$$

$$\text{da cui si ha } P_1 = t \frac{P_1}{q_1}, \quad P_2 = t \frac{P_2}{q_2}$$

La trasformazione inversa porge

$$q_1 = \sqrt{2t Q_1} \quad q_2 = \sqrt{2t Q_2}$$

$$p_1 = P_1 \sqrt{\frac{2Q_1}{t}} \quad p_2 = P_2 \sqrt{\frac{2Q_2}{t}}$$

Ricaviamo l'hamiltoniana K coniugata ad H
tramite ψ

$$K(P, Q, t) = \left(H(p, q, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, P, t) \right) \circ \psi^{-1}$$

$$H \circ \psi^{-1} = \frac{t}{2} \left(\frac{2P_1^2 Q_1}{t} + \frac{2P_2^2 Q_2}{t} \right) +$$
$$\frac{1}{2t} (2t Q_1 + 2t Q_2 + 2P_1 Q_1 + 2P_2 Q_2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2t^2} (q_1^2 P_1 + q_2^2 P_2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} \circ \psi^{-1} = -\frac{1}{t} (P_1 Q_1 + P_2 Q_2)$$

$$K = P_1^2 Q_1 + P_2^2 Q_2 + Q_1 + Q_2$$

ii) Dato che K è indipendente dal tempo
cerco un integrale completo della forma

$$S(Q, \alpha, t) = W(Q, \alpha) - e(\alpha) t$$

$$\text{con } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Assumo

$$W(Q, \alpha) = W_1(Q_1, \alpha) + W_2(Q_2, \alpha)$$

L'equazione di Hamilton - Jacobi diventa

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 Q_1 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 Q_2 + Q_1 + Q_2 = e(\alpha)$$

Si possono quindi scrivere le due equazioni

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 Q_1 + Q_1 = \alpha_1 \\ \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 Q_2 + Q_2 = \alpha_2 \end{cases}$$

$$\text{dove } e(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2$$

Consideriamo la prima equazione

$$\frac{\partial W_1}{\partial Q_1} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \quad (\text{scegliendo il segno } +)$$

$$W_1(Q_1, \alpha_1) = \int \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \, dQ_1$$

$$\int \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \, dQ_1 = Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \int \frac{Q_1 \left(-\frac{\alpha_1}{Q_1^2}\right)}{\sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}} dQ_1$$

$$z = \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \quad dz = -\left(\frac{\alpha_1}{2Q_1^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}} dQ_1$$

$$Q_1 = \frac{\alpha_1}{1 + z^2}$$

$$\longrightarrow - \int \frac{\alpha_1}{1 + z^2} dz = -\alpha_1 \arctan z$$

quindi

$$\int \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} \, dQ_1 = Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \alpha_1 \arctan \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1}$$

L'integrale completo cercato è dato da $\left(\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial Q} \neq 0\right)$

$$S(Q, \alpha, t) = Q_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \alpha_1 \arctan \sqrt{\frac{\alpha_1}{Q_1} - 1} - \alpha_1 t +$$

$$Q_2 \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_2} - 1} - \alpha_2 \arctan \sqrt{\frac{\alpha_2}{Q_2} - 1} - \alpha_2 t$$

iii) Il metodo di Hamilton-Jacobi ci indica una scelta possibile: α_1 e α_2

$$\alpha_1 = P_1^2 Q_1 + Q_1$$

$$\alpha_2 = P_2^2 Q_2 + Q_2$$

$$\frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial(P, Q)} = \begin{pmatrix} 2P_1 Q_1 & 0 & 1 + P_1^2 & 0 \\ 0 & 2P_2 Q_2 & 0 & 1 + P_2^2 \end{pmatrix}$$

il rango di questa matrice è 2, quindi i due integrali sono indipendenti

Si conclude che due integrali primi indipendenti per X_H sono

$$J_1 = t^2 \frac{P_1^2}{Q_1^2} \frac{Q_1^2}{2t} + \frac{Q_1^2}{2t} = \frac{t}{2} P_1^2 + \frac{Q_1^2}{2t}$$

$$J_2 = \frac{t}{2} P_2^2 + \frac{Q_2^2}{2t}$$

Esercizio

i) Completare le relazioni

$$P_1 = p_1 q_1 t \quad P_2 = p_2 q_2 t$$

ad una trasformazione canonica

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, t)$$

con $p = (p_1, p_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $q = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$t \in \mathbb{R}^+$, usando una funzione generatrice

$$S(q, P, t)$$

Sol.

$$P_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{P_1}{q_1 t}$$

$$P_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{P_2}{q_2 t}$$

$$S(q, P, t) = \frac{P_1}{t} \log q_1 + f(q_2, P, t)$$

$$S(q, P, t) = \frac{P_2}{t} \log q_2 + g(q_1, P, t)$$

$$\text{Poniamo } S(q, P, t) = \frac{P_1}{t} \log q_1 + \frac{P_2}{t} \log q_2$$

e notiamo che

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} = \frac{1}{q_1 q_2 t^2} \neq 0$$

quindi $S(q, P, t)$ è una buona funzione generatrice

Abbiamo

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{1}{t} \log q_1$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = \frac{1}{t} \log q_2$$

La trasformazione canonica ψ e la sua inversa sono date da

$$P_1 = p_1 q_1 t$$

$$P_2 = p_2 q_2 t$$

$$Q_1 = \frac{1}{t} \log q_1$$

$$Q_2 = \frac{1}{t} \log q_2$$

$$p_1 = \frac{P_1}{t e^{t Q_1}}$$

$$p_2 = \frac{P_2}{t e^{t Q_2}}$$

$$q_1 = e^{t Q_1}$$

$$q_2 = e^{t Q_2}$$

ii)

Estendere tale trasformazione ad una trasformazione canonica nello spazio delle fasi esteso

$$(p, e, q, t) \xrightarrow{\tilde{\psi}} (P, E, Q, t)$$

Sol.

Partiamo dalla teoria che deve valere

$$\mathcal{E}(p, e, q, t) = e - \frac{\partial S}{\partial t}(q, P(p, q, t), t)$$

riprendendo l'espressione di S ,

$$S(q, P, t) = \frac{P_1}{t} \log q_1 + \frac{P_2}{t} \log q_2$$

si ha

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{t^2} (P_1 \log q_1 + P_2 \log q_2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, P(p, q, t), t) = -\frac{1}{t} (p_1 q_1 \log q_1 + p_2 q_2 \log q_2)$$

$$\mathcal{E}(p, e, q, t) = e + \frac{1}{t} (p_1 q_1 \log q_1 + p_2 q_2 \log q_2)$$

iii) Si consideri l'hamiltoniana

$$H(p, q, t) = t^2 (p_1^2 q_1^2 + p_2^2 q_2^2) + \frac{1}{t} ((1 + p_2 q_2) \log q_2 + p_1 q_1 \log q_1)$$

Trovare un integrale completo dell'equazione di H.-J. per l'hamiltoniana K coniugata ad

H tramite ψ

Sol.

Possiamo scrivere

$$K(P, Q, t) = H \circ \psi^{-1} + \frac{\partial S}{\partial t}(q(P, Q, t), P, t)$$

$$H \circ \psi^{-1} = P_1^2 + P_2^2 + \frac{1}{t} \left(\left(1 + \frac{P_2}{t} \right) Q_2 t + \frac{P_1}{t} Q_1 t \right)$$

$$= P_1^2 + P_2^2 + \frac{1}{t} (Q_2 t + P_2 Q_2 + P_1 Q_1)$$

$$= P_1^2 + P_2^2 + Q_2 + \frac{1}{t} (P_2 Q_2 + P_1 Q_1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{t^2} (P_1 \log q_1 + P_2 \log q_2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q(P, Q, t), P, t) = -\frac{1}{t} (P_1 Q_1 + P_2 Q_2)$$

$$H \circ \psi^{-1} + \frac{\partial S}{\partial t}(q(P, Q, t), P, t) = P_1^2 + P_2^2 + Q_2$$

$$K(P, Q, t) = P_1^2 + P_2^2 + Q_2$$

L'equazione di H.-J. associata a K , per la f. caratteristica di Hamilton $W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$ è

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_2}\right)^2 + Q_2 = e(\alpha_1, \alpha_2)$$

Chiamo W della forma

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(Q_1, \alpha_1, \alpha_2) + W_2(Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 + Q_2 = e(\alpha_1, \alpha_2)$$

Notiamo che l'hamiltoniana K non dipende da Q_1 , e quindi P_1 è un integrale del moto. Alla luce di questo fatto possiamo porre

$$(P_1 =) \frac{\partial W_1}{\partial Q_1} = \alpha_1$$

da cui otteniamo $W_1(Q_1, \alpha_1) = \alpha_1 Q_1$

L'equazione diventa

$$\alpha_1^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 + Q_2 = \alpha_2$$

con α_2 valore dell'hamiltoniana K

$$\left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 - Q_2$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial Q_2} = \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2 - Q_2} \quad (P_2 > 0 \text{ dato che } P_2 = p_2 q_2 t)$$

$$W_2(Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = -\frac{2}{3} (\alpha_2 - \alpha_1^2 - Q_2)^{3/2}$$

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 Q_1 - \frac{2}{3} (\alpha_2 - \alpha_1^2 - Q_2)^{3/2}$$

Notiamo che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial Q} = \frac{1}{2 \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2 - Q_2}} \neq 0$$

Esercizio

Consideriamo l'hamiltoniana

$$H(p, q) = \frac{1}{2} |p|^2 + \frac{1}{8} |q|^2 + \frac{1}{2} (p_1 q_2 - q_1 p_2)$$

con $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$

↓
 è l'hamiltoniana di una particella carica di massa unitaria immersa in un campo magnetico costante e campo elettrico nullo

i) Completare le relazioni

$$\begin{cases} q_1 = Q_2 \cos Q_1 \\ q_2 = Q_2 \sin Q_1 \end{cases}$$

ad una trasformazione canonica

$$(p, q) \xrightarrow{\psi} (P, Q)$$

con $P = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$, $Q = (Q_1, Q_2) \in S^1 \times \mathbb{R}^+$

usando una funzione generatrice $S(q, P)$ lineare omogenea nelle P e scrivere la nuova hamiltoniana

Sol.

Invertiamo le relazioni date per ottenere

$$Q_2 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad Q_1 = \arctan \frac{q_2}{q_1}$$

da cui

$$\frac{\partial S}{\partial P_1} = \arctan \frac{q_2}{q_1}, \quad \frac{\partial S}{\partial P_2} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$$

$$S(q, P) = P_1 \arctan \frac{q_2}{q_1} + \mathcal{F}(P_2, q)$$

$$S(q, P) = P_2 \sqrt{q_1^2 + q_2^2} + \mathcal{g}(P_1, q)$$

Prendiamo

$$S(q, P) = P_1 \arctan \frac{q_2}{q_1} + P_2 \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$$

e verifichiamo che sia una buona funzione generatrice

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial P_1} & \frac{\partial^2 S}{\partial q_2 \partial P_1} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial P_2} & \frac{\partial^2 S}{\partial q_2 \partial P_2} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\cancel{q_1^2}}{q_1^2 + q_2^2} \left(-\frac{q_2}{\cancel{q_1^2}} \right) & \frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2} \\ \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} & \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \end{pmatrix}$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \neq 0$$

Consideriamo le altre due relazioni

$$\begin{cases} P_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = - \frac{P_1 q_2}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{P_2 q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \\ P_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{P_1 q_1}{q_1^2 + q_2^2} + \frac{P_2 q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \end{cases}$$

dalle quali si ottiene $p(P, Q)$

$$P_1 = - \frac{P_1 \cancel{Q_2} \sin Q_1}{\cancel{Q_2^2}} + \frac{P_2 \cancel{Q_2} \cos Q_1}{\cancel{Q_2}}$$

$$\begin{cases} P_1 = -\frac{P_1}{Q_2} \sin Q_1 + P_2 \cos Q_1 \\ P_2 = \frac{P_1}{Q_2} \cos Q_1 + P_2 \sin Q_1 \end{cases}$$

Dalle relazioni ● possiamo ottenere $P(p, q)$:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{q_2}{q_1^2 + q_2^2} & \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \\ \frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2} & \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = -\sqrt{q_1^2 + q_2^2} \begin{pmatrix} \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} & -\frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \\ -\frac{q_1}{q_1^2 + q_2^2} & -\frac{q_2}{q_1^2 + q_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} P_1 = -P_1 q_2 + q_1 P_2 \\ P_2 = \frac{P_1 q_1 + P_2 q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \end{cases}$$

Scriviamo la nuova hamiltoniana

$$K(P, Q) = H \circ \psi^{-1}$$

$$|p|^2 = \frac{P_1^2}{Q_2^2} + P_2^2, \quad |q|^2 = Q_2^2$$

$$p_1 q_2 - q_1 p_2 = -P_1$$

$$K(P, Q) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_1^2}{Q_2^2} + P_2^2 \right) + \frac{1}{8} Q_2^2 - \frac{1}{2} P_1$$

ii) Trovare due integrali primi indipendenti per X_H

Sol.

Consideriamo prima X_K ; notiamo che K è un integrale primo perché non dipende dal tempo.

Notiamo inoltre che Q_1 è una variabile ciclica, allora P_1 è un integrale primo

K e P_1 sono in involuzione

$$\{K, P_1\} = \frac{\partial K}{\partial Q_1} \frac{\partial P_1}{\partial P_1} = 0$$

Mostriamo che questi due integrali primi sono in generale indipendenti

$$\frac{\partial (K, P_1)}{\partial (P_1, P_2, Q_1, Q_2)} = \begin{pmatrix} \frac{P_1}{Q_2^2} - \frac{1}{2} & P_2 & 0 & -\frac{P_1^2}{Q_2^3} + \frac{Q_2}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il rango di questa matrice $\tilde{i} = 2$ in generale

Il rango $\tilde{i}$ uguale a 1 se

$$\begin{cases} P_2 = 0 \\ P_1^2 = \frac{1}{4} Q_2^4 \rightarrow P_1 = \pm \frac{1}{2} Q_2^2 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} P_1 q_1 = -P_2 q_2 \rightarrow P_1 = -\frac{P_2 q_2}{q_1} \\ P_2 q_1 - P_1 q_2 = \pm \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) \end{cases} \downarrow$$

$$P_2 q_1 + \frac{P_2 q_2^2}{q_1} = \pm \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2)$$

$$a) \quad P_2 = \frac{1}{2} q_1, \quad P_1 = -\frac{1}{2} q_2$$

$$b) \quad P_2 = -\frac{1}{2} q_1, \quad P_1 = \frac{1}{2} q_2,$$

Se scriviamo X_H

$$\dot{q}_1 = P_1 + \frac{1}{2} q_2, \quad \dot{q}_2 = P_2 - \frac{1}{2} q_1$$

$$\dot{P}_1 = \frac{1}{2} \left(P_2 - \frac{1}{2} q_1 \right), \quad \dot{P}_2 = -\frac{1}{2} \left(P_1 + \frac{1}{2} q_2 \right)$$

si vede che i (P_1, P_2, q_1, q_2) che soddisfanno a) sono punti di equilibrio per X_H ; inoltre se scegliamo c. i. che soddisfanno b), queste relazioni saranno soddisfatte anche dalle corrisp. soluzioni

In definitiva i due integrali primi indipendenti per X_H sono $-P_1 q_2 + q_1 P_2$ e

$$\frac{1}{2} |P|^2 + \frac{1}{8} |q|^2 + \frac{1}{2} (P_1 q_2 - q_1 P_2)$$

iii) Mostrare che le variabili P, Q sono separabili per l'equazione di H.-J. associata a K

Sol.

$$K(P, Q) = \frac{1}{2} \left(\frac{P_1^2}{Q_2^2} + P_2^2 \right) + \frac{1}{8} Q_2^2 - \frac{1}{2} P_1$$

cerchiamo W della forma

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(Q_1, \alpha_1) + W_2(Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial Q_1} = \alpha_1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_1^2}{Q_2^2} + \frac{1}{8} Q_2^2 - \frac{\alpha_1}{2} = \alpha_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2} \right)^2 = \alpha_2 + \frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1^2}{Q_2^2} - \frac{1}{8} Q_2^2$$

Esercizio

Consideriamo una particella di massa unitaria che si muove lungo l'asse Ox in assenza di forze

i) Si verifichi la canonicità della trasformazione

$$(p, q) \longrightarrow (P, Q)$$

$$\begin{cases} Q = q + pt^2 \\ P = p \end{cases}$$

e si scriva la nuova hamiltoniana

Sol.

Usiamo una funzione generatrice $S(q, P, t)$

$$\begin{cases} p = \frac{\partial S}{\partial q} = P \\ Q = \frac{\partial S}{\partial P} = q + P t^2 \end{cases}$$

$P = P$

$$S(q, P, t) = Pq + \varphi(P, t)$$

$$S(q, P, t) = Pq + \frac{1}{2} P^2 t^2 + g(q, t)$$

verifichiamo che

$$S(q, P, t) = Pq + \frac{1}{2} P^2 t^2$$

sia una buona funzione generatrice

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P} = 1$$

L'hamiltoniana è data dall'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

$$m = 1, \quad p = \dot{x}$$

$$H(p) = \frac{1}{2} p^2$$

la nuova hamiltoniana è

$$K(P, t) = \frac{1}{2} P^2 + \frac{\partial S}{\partial t}(q(P, Q, t), P, t)$$

$$K(P, t) = \frac{1}{2} P^2 + P^2 t$$

- ii) Si risolve l'equazione di H. - J. associata a K
esplicitando la soluzione del moto

Sol.

Dato che K dipende dal tempo introduciamo la funzione principale di Hamilton nella forma

$$\tilde{S}(Q, \alpha, t) = \tilde{S}_1(Q, \alpha) + \tilde{S}_2(t, \alpha)$$

l'equazione di H.-J. porge

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial Q}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + t\right) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial Q}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + t\right) + \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial t} = 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial Q}\right)^2 = \alpha^2 \\ \frac{\partial \tilde{S}_2}{\partial t} = -\frac{\alpha^2}{2} (1 + 2t) \end{cases}$$

$$\tilde{S}_1 = \alpha Q$$

$$\tilde{S}_2 = -\frac{\alpha^2}{2} t - \frac{\alpha^2}{2} t^2$$

da cui

$$\tilde{S}(Q, \alpha, t) = \alpha Q - \frac{\alpha^2}{2} t (1 + t)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial Q \partial \alpha} = 1$$

$$\bullet \begin{cases} P = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial Q} = \alpha = p \\ \beta = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} = Q - \alpha t (1+t) \end{cases}$$

calcoliamo α, β che sono costanti dalle
c. i.

$$\begin{aligned} x_0 &= q(0) \\ \dot{x}_0 &= p(0) \end{aligned} \quad (t=0)$$

$$\alpha = \dot{x}_0$$

$$\beta = Q(0) = q(0) = x_0$$

$\uparrow$
 $(Q = q + p t^2)$

riprendiamo l'equazione ●

$$x_0 = (q + \dot{x}_0 t^2) - \dot{x}_0 t (1+t)$$

$$q = x_0 - \cancel{\dot{x}_0 t^2} + \dot{x}_0 t + \cancel{\dot{x}_0 t^2}$$

$$q = x_0 + \dot{x}_0 t$$

come ci si aspettava per un moto rettilineo
uniforme

Esercizio (3 luglio 2018)

Già data la lagrangiana

$$L(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} e^{2\kappa t} (\dot{q}^2 - q^2), \quad \kappa \in (0, 1)$$

$$q, \dot{q} \in \mathbb{R}$$

- i) Trovare $t \rightarrow \bar{\gamma}(t)$ sol. dell'eq. di E. - L.
tale che $\bar{\gamma}(0) = 1$, $\dot{\bar{\gamma}}(0) = -\kappa$

Sol. i)

$$L_{\dot{q}} = e^{2\kappa t} \dot{q}$$

$$\frac{dL_{\dot{q}}}{dt} = e^{2\kappa t} \ddot{q} + 2\kappa \dot{q} e^{2\kappa t}$$

$$L_q = -q e^{2\kappa t}$$

$$e^{2\kappa t} \ddot{q} + 2\kappa e^{2\kappa t} \dot{q} + e^{2\kappa t} q = 0$$

$$e^{2\kappa t} (\ddot{q} + 2\kappa \dot{q} + q) = 0$$

$$\ddot{q} + 2\kappa \dot{q} + q = 0$$

$$q(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1,2} = -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - 1}, \quad \kappa \in (0, 1)$$

$$\lambda_{1,2} = -\kappa \pm i\sqrt{1-\kappa^2}$$

$$q(t) = c_1 e^{(-\kappa + i\sqrt{1-\kappa^2})t} + c_2 e^{(-\kappa - i\sqrt{1-\kappa^2})t}$$

$$q(0) = c_1 + c_2 = 1$$

$$\dot{q}(0) = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = -\kappa$$

$$-\kappa (c_1 + c_2) + i\sqrt{1-\kappa^2} (c_1 - c_2) = -\kappa$$

$$c_1 = 1 - c_2$$

$$i\sqrt{1-\kappa^2} (1 - 2c_2) = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\bar{\gamma}(t) = e^{-\kappa t} \cos(\sqrt{1-\kappa^2} t)$$

- ii) Calcolare $t_1 > 0$ t. c. $\bar{\gamma}(t)$ sia un minimo
debole stretto del funzionale di azione lagrangiana
 A_L nell'insieme delle funzioni $C^1([0, t_1], \mathbb{R})$

Sol. ii)

$$\begin{cases} -\frac{d(a(t)\dot{\eta})}{dt} + (c(t) - \dot{b}(t))\eta = 0 \\ \eta(0) = 0 \\ \dot{\eta}(0) = 1 \end{cases}$$

$$a(t) = \frac{1}{2} L_{\dot{q}\dot{q}}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t), t) = \frac{1}{2} e^{2\kappa t}$$

$$b(t) = \frac{1}{2} L_{q\dot{q}}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t), t) = 0$$

$$c(t) = \frac{1}{2} L_{qq}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t), t) = -\frac{1}{2} e^{2\kappa t}$$

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} e^{2\kappa t} \dot{\eta} \right) + \left(-\frac{1}{2} e^{2\kappa t} \right) \eta = 0$$

$$-\frac{1}{2} e^{2\kappa t} \ddot{\eta} - \frac{2\kappa e^{2\kappa t}}{2} \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta e^{2\kappa t} = 0$$

$$e^{2\kappa t} (\ddot{\eta} + 2\kappa \dot{\eta} + \eta) = 0$$

$$\ddot{\eta} + 2\kappa \dot{\eta} + \eta = 0$$

$$\eta(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

con

$$\lambda_{1,2} = -\kappa \pm i\sqrt{1-\kappa^2}$$

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 = -c_2$$

$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1$$

$$c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = 1$$

$$c_2 = \frac{1}{2i\sqrt{1-\kappa^2}}, \quad c_1 = -\frac{1}{2i\sqrt{1-\kappa^2}}$$

$$\eta(t) = \frac{1}{2i\sqrt{1-\kappa^2}} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{1-\kappa^2}} e^{-\kappa t} (e^{i\sqrt{1-\kappa^2}t} - e^{-i\sqrt{1-\kappa^2}t})$$

$$\eta(t) = \frac{e^{-\kappa t}}{\sqrt{1-\kappa^2}} \sin(\sqrt{1-\kappa^2}t)$$

il primo tempo positivo t^* in cui si annulla $\eta(t)$

$$\tilde{t} \quad t^* = \frac{\pi}{\sqrt{1-\kappa^2}}$$

$\bar{\gamma}(t)$ è un minimo debole stretto di A_1 in

$$t \in [0, t_1] \quad \forall t_1 < t^*$$