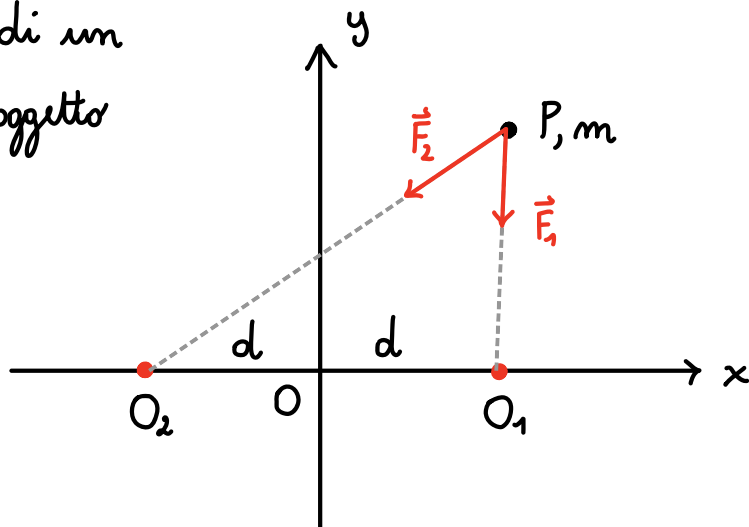


Esercizio (13 settembre 2016)

Consideriamo il moto di un punto P di massa m soggetto ad un campo di forze generato da due centri fissi O_1, O_2



il moto avviene sul piano Oxy $|O_1 - O_2| = 2d$

Sul punto P agiscono le due forze

$$\vec{F}_1(x, y) = - \frac{(x-d, y)}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}}$$

$$\vec{F}_2(x, y) = - \frac{(x+d, y)}{[(x+d)^2 + y^2]^{3/2}}$$

Mostrare che le coordinate ellittiche (ξ, η)

$$\begin{cases} x = d \cosh \xi \cos \eta \\ y = d \sinh \xi \sin \eta \end{cases}$$

sono variabili separabili per l'eq. di Hamilton - Jacobi relativa a questo sistema meccanico.

Sol.

Vogliamo scrivere la funzione hamiltoniana e per questo troviamo prima le espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = d (\sinh \xi \cos \eta) \dot{\xi} - d (\cosh \xi \sin \eta) \dot{\eta} \\ \dot{y} = d (\cosh \xi \sin \eta) \dot{\xi} + d (\sinh \xi \cos \eta) \dot{\eta} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 1 - \cos^2 \eta$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= d^2 (\sinh^2 \xi \cos^2 \eta + \cosh^2 \xi \sin^2 \eta) \dot{\xi}^2 \\ &\quad + d^2 (\cosh^2 \xi \sin^2 \eta + \sinh^2 \xi \cos^2 \eta) \dot{\eta}^2 \\ &= 1 - \cos^2 \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= d^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) \dot{\xi}^2 \\ &\quad + d^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) \dot{\eta}^2 \end{aligned}$$

$$T(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} m d^2 (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)$$

Occupiamoci dell'energia potenziale

$$V(x, y) = V_1(x, y) + V_2(x, y)$$

dove V_1 e V_2 sono due funzioni tali che

$$\nabla V_1 = -\vec{F}_1 \quad \nabla V_2 = -\vec{F}_2$$

Le forze esercitate da O_1, O_2 sono di natura gravitazionale, ricordiamo che l'energia potenziale gravitazionale ha la forma $-k/g$, con k costante e g distanza dal centro di attrazione. Si ha

$$V_1 = -\frac{1}{[(x-d)^2 + y^2]^{1/2}}$$

$$V_2 = -\frac{1}{[(x+d)^2 + y^2]^{1/2}}$$

Calcoliamo

$$[(x \pm d)^2 + y^2] = [(d \cosh \xi \cos \eta \pm d)^2 + (d \sinh \xi \sin \eta)^2] =$$

$$d^2 \cosh^2 \xi \cos^2 \eta + d^2 \pm 2 d^2 \cosh \xi \cos \eta +$$

$$d^2 \sinh^2 \xi \sin^2 \eta = \quad \downarrow = 1 - \sin^2 \eta$$

$$d^2 \cosh^2 \xi - d^2 \sin^2 \eta + d^2 \pm 2 d^2 \cosh \xi \cos \eta =$$

$$= d^2 \cos^2 \eta$$

$$d^2 \cosh^2 \xi + d^2 \cos^2 \eta \pm 2 d^2 \cosh \xi \cos \eta =$$

$$(d \cosh \xi \pm d \cos \eta)^2$$

Allora

$$[(x \pm d)^2 + y^2] = d^2 (\cosh \xi \pm \cos \eta)^2$$

$$\underline{V(\xi, \eta)} = -\frac{1}{d (\cosh \xi - \cos \eta)} - \frac{1}{d (\cosh \xi + \cos \eta)}$$

La funzione lagrangiana è

$$L(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}) = T(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}) - V(\xi, \eta)$$

La trasformazione di Legendre ci permette di introdurre

i momenti coniugati a ξ, η :

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m d^2 \dot{\xi} (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)$$

$$p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = m d^2 \dot{\eta} (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)$$

da cui

$$\dot{\xi} = \frac{p_\xi}{m d^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)}, \quad \dot{\eta} = \frac{p_\eta}{m d^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)}$$

Essendo questo un sistema meccanico, la funzione di Hamilton si può introdurre direttamente come

$$H(p_\xi, p_\eta, \xi, \eta) = T(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}) \Big|_{\substack{\dot{\xi} = \dot{\xi}(p_\xi, \xi, \eta) \\ \dot{\eta} = \dot{\eta}(p_\eta, \xi, \eta)}} + V(\xi, \eta)$$

$$T = \frac{1}{2} \cancel{m d^2} (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta) \left(\frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{m^2 d^4 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)^2} \right)$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{m d^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)}$$

$$H(p_\xi, p_\eta, \xi, \eta) = \frac{1}{2} \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{m d^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} - \frac{1}{d (\cosh \xi - \cos \eta)} - \frac{1}{d (\cosh \xi + \cos \eta)}$$

Introduciamo la funzione caratteristica di Hamilton

$$W(\xi, \eta, \alpha) = W_1(\xi, \alpha) + W_2(\eta, \alpha)$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ nuovi momenti

Possiamo scrivere l'equazione di H.-J. nella forma

$$H \left(\frac{\partial W}{\partial (\xi, \eta)}, \xi, \eta \right) = e(\alpha)$$

con $e(\alpha)$ funzione arbitraria di α

Abbiamo

$$p_\xi = \frac{\partial W_1}{\partial \xi}, \quad p_\eta = \frac{\partial W_2}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{2 m d^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta} \right)^2 \right]$$

$$- \frac{1}{d (\cosh \xi - \cos \eta)} - \frac{1}{d (\cosh \xi + \cos \eta)} = e(\alpha)$$

moltiplichiamo per $d (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)$

$$3 \quad \frac{1}{2 m d} \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta} \right)^2 \right] - (\cosh \xi + \cos \eta)$$

$$- (\cosh \xi - \cos \eta) = e(\alpha) d (\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)$$

Possiamo separare questa equazione in due equazioni differenziali ordinarie

$$1 \quad \frac{1}{2 m d} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi} \right)^2 - 2 \cosh \xi - d (\cosh^2 \xi) e(\alpha) = c_1(\alpha)$$

$$2 \quad \frac{1}{2md} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta} \right)^2 + d(\cos^2 \eta) e(\alpha) = -e_1(\alpha)$$

dove e_1, e sono due funzioni di α indipendenti, cioè tali che

$$\det \frac{\partial (e_1, e)}{\partial \alpha} \neq 0$$

Si noti che la somma di 1, 2 ci dà 3

Esercizio (1° compito 2019/2020)

Consideriamo la funzione hamiltoniana

$$H(p, q, t) = (1+t^2)^2 \left(|p|^2 - \frac{|q|^2}{q_1^2 q_2^2} \right) + \frac{2t}{1+t^2} p \cdot q$$

$$p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2, \quad q = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$$

i) Scrivere

$$X_K = \psi_* X_H$$

dove

$$(p, q, t) \xrightarrow{\psi} (P, Q, t)$$

è la trasformazione canonica definita da

$$S(q, P, t) = \frac{q \cdot P}{1+t^2}$$

$$\text{con } P = (P_1, P_2), \quad Q = (Q_1, Q_2)$$

Sol. Proponiamo due soluzioni

a)

$$K = H \circ \psi^{-1} + \frac{\partial S}{\partial t}(q(P, Q, t), P, t)$$

$$P = S_q = \frac{P}{1+t^2} \quad \longrightarrow \quad P = p(1+t^2)$$

$$Q = S_P = \frac{q}{1+t^2} \quad \longrightarrow \quad q = Q(1+t^2)$$

$$\frac{|q|^2}{q_1^2 q_2^2} = \frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2}$$

$$H \circ \psi^{-1} = (1+t^2)^2 \left(\frac{|P|^2}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{Q_1^2 (1+t^2)^2} - \frac{1}{Q_2^2 (1+t^2)^2} \right) + \frac{2t}{1+t^2} P \cdot Q$$

$$H \circ \psi^{-1} = |P|^2 - \underbrace{\frac{1}{Q_1^2} - \frac{1}{Q_2^2}}_{= -\frac{|Q|^2}{Q_1^2 Q_2^2}} + \frac{2t}{1+t^2} P \cdot Q$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{2t q \cdot P}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} \circ \psi^{-1} = - \frac{2t}{(1+t^2)^2} (1+t^2) P \cdot Q =$$

$$- \frac{2t}{1+t^2} P \cdot Q$$

$$K(P, Q, t) = |P|^2 - \frac{|Q|^2}{Q_1^2 Q_2^2} + \frac{2t}{1+t^2} P \cdot Q$$

$$- \frac{2t}{1+t^2} P \cdot Q$$

$$K(P, Q, t) = |P|^2 - \frac{|Q|^2}{Q_1^2 Q_2^2} = P_1^2 + P_2^2 - \frac{1}{Q_1^2} - \frac{1}{Q_2^2}$$

Scriviamo X_K

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{P}_1 = - \frac{\partial K}{\partial Q_1} = \frac{\partial}{\partial Q_1} \left(\frac{1}{Q_1^2} \right) = - \frac{2}{Q_1^3} \\ \dot{P}_2 = - \frac{\partial K}{\partial Q_2} = \frac{\partial}{\partial Q_2} \left(\frac{1}{Q_2^2} \right) = - \frac{2}{Q_2^3} \\ \dot{Q}_1 = \frac{\partial K}{\partial P_1} = 2P_1 \\ \dot{Q}_2 = \frac{\partial K}{\partial P_2} = 2P_2 \end{array} \right.$$

b)

$$X_K = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} X_H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \circ \psi^{-1}$$

$$\text{con } x = (p, q) \text{ e}$$

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Phi} (P, Q)$$

$$P = p(1+t^2) \quad , \quad Q = \frac{q}{1+t^2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+t^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+t^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

 $X_H :$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{2}{q_1^3} (1+t^2)^2 - \frac{2t p_1}{1+t^2}$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{2}{q_2^3} (1+t^2)^2 - \frac{2t p_2}{1+t^2}$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = 2 p_1 (1+t^2)^2 + \frac{2t q_1}{1+t^2}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = 2 p_2 (1+t^2)^2 + \frac{2t q_2}{1+t^2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} X_H = \begin{pmatrix} -\frac{2(1+t^2)^3}{q_1^3} - 2t p_1 \\ -\frac{2(1+t^2)^3}{q_2^3} - 2t p_2 \\ 2p_1(1+t^2) + \frac{2t q_1}{(1+t^2)^2} \\ 2p_2(1+t^2) + \frac{2t q_2}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(2t p_1, 2t p_2, -\frac{2t q_1}{(1+t^2)^2}, -\frac{2t q_2}{(1+t^2)^2} \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} X_H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(-\frac{2(1+t^2)^3}{q_1^3}, -\frac{2(1+t^2)^3}{q_2^3}, 2p_1(1+t^2), 2p_2(1+t^2) \right)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} X_H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \circ \psi^{-1} = \left(-\frac{2(1+t^2)^3}{Q_1^3 (1+t^2)^3}, -\frac{2(1+t^2)^3}{Q_2^3 (1+t^2)^3} \right)$$

$$\left(2p_1 \frac{(1+t^2)}{(1+t^2)}, 2p_2 \frac{(1+t^2)}{(1+t^2)} \right) = \left(-\frac{2}{Q_1^3}, -\frac{2}{Q_2^3}, 2p_1, 2p_2 \right)$$

ii) Calcolare un integrale completo dell'eq. di H.-J. associata a

$$K = H \circ \psi^{-1} + K_0$$

Sol.

Ricordiamo che

$$H(p, q, t) = (1+t^2)^2 \left(|p|^2 - \frac{|q|^2}{q_1^2 q_2^2} \right) + \frac{2t}{1+t^2} p \cdot q$$

$$p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$q = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$$

Arriviamo già visto che

$$K = H \circ \psi^{-1} + \frac{\partial S}{\partial t} = |p|^2 - \frac{|q|^2}{q_1^2 q_2^2} =$$

$$p_1^2 + p_2^2 - \frac{1}{q_1^2} - \frac{1}{q_2^2}$$

$$\text{dove } S(q, p, t) = \frac{q \cdot p}{1+t^2}$$

Triviamo l'equazione di H.-J. per la funzione

caratteristica $W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_2}\right)^2 - \frac{1}{Q_1^2} - \frac{1}{Q_2^2} = e(\alpha)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

Poniamo

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(Q_1, \alpha_1, \alpha_2) + W_2(Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 - \frac{1}{Q_1^2} - \frac{1}{Q_2^2} = e(\alpha)$$

e scriviamo le due equazioni

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial Q_i}\right)^2 - \frac{1}{Q_i^2} = \alpha_i \quad i = 1, 2$$

$$e(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial Q_i} = \sqrt{\alpha_i + \frac{1}{Q_i^2}} = \frac{1}{Q_i} \sqrt{1 + \alpha_i Q_i^2}$$

$Q_i \in \mathbb{R}^+$

$$W_i = \sqrt{\alpha_i} \int \frac{1}{Q_i} \sqrt{Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i}} dQ_i$$

(si era trovato che
 $Q = q / (1+t^2)$)

$$z^2 = Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i}$$

$$2z dz = 2Q_i dQ_i$$

$$Q_i^2 = z^2 - \frac{1}{\alpha_i}$$

$$\frac{dQ_i}{Q_i} = \frac{z}{z^2 - 1/\alpha_i} dz$$

$$\int \frac{1}{Q_i} \sqrt{Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i}} dQ_i = \int \frac{z^2}{z^2 - 1/\alpha_i} dz =$$

$$\int \left(1 + \frac{1/\alpha_i}{z^2 - 1/\alpha_i} \right) dz = \int dz + \frac{1}{\alpha_i} \int \frac{1}{z^2 - 1/\alpha_i} dz$$

$$= z + \frac{1}{\alpha_i} \left(\int \frac{1}{z - 1/\sqrt{\alpha_i}} dz - \int \frac{1}{z + 1/\sqrt{\alpha_i}} dz \right) \frac{\sqrt{\alpha_i}}{2}$$

$$= z + \frac{1}{2\sqrt{\alpha_i}} \log \frac{z - 1/\sqrt{\alpha_i}}{z + 1/\sqrt{\alpha_i}}$$

$$= z + \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \log \left(\frac{(z - 1/\sqrt{\alpha_i})^2}{z^2 - 1/\alpha_i} \right)^{1/2}$$

$$z = \sqrt{Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i}}$$

$$\underline{z^2 - 1/\alpha_i} = Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\alpha_i} = Q_i^2$$

$$W_i(Q_i, \alpha_i) = \sqrt{\alpha_i} \left\{ \sqrt{Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \log \left(\frac{1}{Q_i} \left(\sqrt{Q_i^2 + \frac{1}{\alpha_i}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \right) \right) \right\}$$

e infine

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) =$$

$$\sqrt{1 + \alpha_1 Q_1^2} + \log \left(\frac{1}{Q_1} \left(\sqrt{Q_1^2 + \frac{1}{\alpha_1}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \right) \right) +$$

$$\sqrt{1 + \alpha_2 Q_2^2} + \log \left(\frac{1}{Q_2} \left(\sqrt{Q_2^2 + \frac{1}{\alpha_2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \right) \right)$$

La funzione principale di Hamilton è

$$S(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) - t e(\alpha)$$

Notiamo infine che W è una buona funzione generatrice

$$\frac{\partial W_i}{\partial Q_i} = \frac{1}{Q_i} \sqrt{1 + \alpha_i Q_i^2}, \quad \frac{\partial^2 W_i}{\partial \alpha_i \partial Q_i} = \frac{Q_i}{2 \sqrt{1 + \alpha_i Q_i^2}}$$

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial Q} = \frac{Q_1 Q_2}{4 \sqrt{1 + \alpha_1 Q_1^2} \sqrt{1 + \alpha_2 Q_2^2}} \neq 0$$

Esercizio (18 dicembre 2014)

Consideriamo un'hamiltoniana della forma

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = H_2(H_1(p_1, q_1 + q_2), p_2 - p_1, q_2)$$

$$p_1, p_2 \in \mathbb{R} \quad q_1, q_2 \in \mathbb{R}^+$$

$$H_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

i) Si cerchi una trasformazione canonica

$$(p_1, p_2, q_1, q_2) \xrightarrow{\Psi_1} (P_1, P_2, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^+)^2$$

per cui nelle nuove coordinate l'hamiltoniana H venga trasformata nell'hamiltoniana

$$K(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = K_2(K_1(P_1, Q_1), P_2, Q_2)$$

$$K_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad K_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Sol. Mostriamo due possibili risposte

a) Proviamo a porre

$$P_2 = p_2 - p_1 \quad Q_1 = q_1 + q_2$$

$$P_1 = p_1 \quad Q_2 = q_2$$

dato che con questa trasformazione avremmo

$$H \circ \Psi_1^{-1} = K_2(K_1(P_1, Q_1), P_2, Q_2)$$

$$\text{con } H = H_2(H_1(p_1, q_1 + q_2), p_2 - p_1, q_2)$$

Controlliamo che la trasformazione che abbiamo scritto sia canonica. A tal fine verificiamo che siano preservate le parentesi di Poisson fondamentali

Teniamo a mente che

$$\{X, Y\} = \frac{\partial X}{\partial q_1} \frac{\partial Y}{\partial p_1} + \frac{\partial X}{\partial q_2} \frac{\partial Y}{\partial p_2} - \frac{\partial X}{\partial p_1} \frac{\partial Y}{\partial q_1} - \frac{\partial X}{\partial p_2} \frac{\partial Y}{\partial q_2}$$

$$\{Q_1, P_1\} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 0 - 0 = 1$$

$$\{Q_1, P_2\} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 - 0 - 0 = 0$$

$$\{Q_1, Q_2\} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$$

$$\{P_1, P_2\} = 0 + 0 - 0 - 0 = 0$$

$$\{Q_2, P_2\} = 0 + 1 \cdot 1 - 0 - 0 = 1$$

$$\{Q_2, P_1\} = 0 + 1 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$$

poiché le parentesi di Poisson fondamentali sono conservate la trasformazione è canonica

b)

Poniamo

$$\begin{cases} Q_1 = q_1 + q_2 \\ Q_2 = q_2 \end{cases}$$

e cerchiamo di completare questa trasformazione puntuale ad una trasformazione canonica. Lo possiamo fare in due modi:

A) cerchiamo una funzione generatrice $S(q, P)$

$$Q = Aq \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = (Q_1, Q_2), \quad q = (q_1, q_2)$$

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = q_1 + q_2 \\ Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = q_2 \end{cases}$$

$$P = (P_1, P_2)$$

$$S = P \cdot A q = q^T A^T P = q \cdot A^T P$$

$$P_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad P_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}$$

$$P = (P_1, P_2)$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = A^T P \quad \text{e} \quad P = A^{-T} p$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = p_1$$

$$P_2 = p_2 - p_1$$

B) Sappiamo che se

$$Q = v(q)$$

allora possiamo completare questa trasformazione puntuale ad una trasformazione canonica con

$$P = \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q} \right)^{-1} P$$

$$\text{Nel nostro caso } \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che l'hamiltoniana K coniugata ad H tramite Ψ_1 avrà la forma desiderata:

$$K(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = K_2(K_1(P_1, Q_1), P_2, Q_2)$$

ii) Assumiamo che

$$H_1(x, y) = y \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$H_2(x, y, z) = x + z \sqrt{y^2 + z^2};$$

usare il metodo di $\mathcal{H}-\mathcal{J}$ per trovare una funzione generatrice di una trasformazione canonica

$$(P_1, P_2, Q_1, Q_2) \xrightarrow{\Psi_2} (\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2)$$

tale che η_1, η_2 siano costanti del moto della forma

$$\eta_j = F(P_j, Q_j), \quad j = 1, 2$$

per la stessa funzione $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Sol.

$$H_1(p_1, q_1 + q_2) = (q_1 + q_2) \sqrt{p_1^2 + (q_1 + q_2)^2}$$

$$H_2(H_1(p_1, q_1 + q_2), p_2 - p_1, q_2) =$$

$$(q_1 + q_2) \sqrt{p_1^2 + (q_1 + q_2)^2} + q_2 \sqrt{q_2^2 + (p_2 - p_1)^2}$$

$$K_2(K_1(P_1, Q_1), P_2, Q_2) = Q_1 \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} + Q_2 \sqrt{P_2^2 + Q_2^2}$$

Introduciamo la funzione caratteristica di Hamilton

$$W(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2) = W_1(Q_1, \eta_1, \eta_2) + W_2(Q_2, \eta_1, \eta_2)$$

e scriviamo l'equazione di H.-J. per K

$$Q_1 \sqrt{\left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1}\right)^2 + Q_1^2} + Q_2 \sqrt{\left(\frac{\partial W_2}{\partial Q_2}\right)^2 + Q_2^2} = e(\eta_1, \eta_2)$$

Ponendo $e(\eta_1, \eta_2) = \eta_1 + \eta_2$ possiamo scrivere le due equazioni

$$Q_i \sqrt{\left(\frac{\partial W_i}{\partial Q_i}\right)^2 + Q_i^2} = \eta_i, \quad i = 1, 2$$

e riconosciamo che

$$\eta_j = F(P_j, Q_j) \quad \text{con}$$

(ricordiamo che
 $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^+$ e
quindi si ha
 $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^+$)

$$F(P_j, Q_j) = Q_i \sqrt{P_i^2 + Q_i^2}$$

come richiesto

Procediamo cercando di trovare $W(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2)$

$$Q_i^2 \left[\left(\frac{\partial W_i}{\partial Q_i} \right)^2 + Q_i^2 \right] = \eta_i^2$$

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial Q_i} \right)^2 + Q_i^2 = \frac{\eta_i^2}{Q_i^2}$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial Q_i} = \frac{\sqrt{\eta_i^2 - Q_i^4}}{Q_i}$$

$$W_i = \int \frac{\sqrt{\eta_i^2 - Q_i^4}}{Q_i} dQ_i$$

poniamo $\xi = Q_i^4$ $d\xi = 4Q_i^3 dQ_i$

$$\rightarrow \frac{d\xi}{\xi} = 4 \frac{dQ_i}{Q_i}$$

$$\int \frac{\sqrt{\eta_i^2 - Q_i^4}}{Q_i} dQ_i = \int \frac{\sqrt{\eta_i^2 - \xi}}{4\xi} d\xi$$

$$z = \sqrt{\eta_i^2 - \xi} \rightarrow \xi = \eta_i^2 - z^2$$

$$dz = -\frac{1}{2z} d\xi$$

$$\int \frac{\sqrt{\eta_i^2 - \xi}}{4\xi} d\xi = \int \frac{z(-2z)}{4(\eta_i^2 - z^2)} dz =$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{z^2}{\eta_i^2 - z^2} dz = -\frac{1}{2} \int \frac{z^2 + \eta_i^2 - \eta_i^2}{\eta_i^2 - z^2} dz$$

$$= \frac{1}{2} \int dz - \frac{1}{2} \eta_i^2 \int \frac{1}{\eta_i^2 - z^2} dz =$$

$$\frac{1}{2} z - \frac{1}{2} \eta_i^2 \left(\int \frac{dz}{\eta_i - z} + \int \frac{dz}{\eta_i + z} \right) \frac{1}{2\eta_i} =$$

$$\frac{1}{2} z - \frac{\eta_i}{4} \log \frac{\eta_i + z}{\eta_i - z} =$$

$$\frac{1}{2} \left\{ z - \eta_i \log \left(\frac{(\eta_i + z)(\eta_i + z)}{(\eta_i - z)(\eta_i - z)} \right)^{1/2} \right\} =$$

$$\frac{1}{2} \left(z - \eta_i \log \frac{\eta_i + z}{(\eta_i^2 - z^2)^{1/2}} \right)$$

$$\left(z = \sqrt{\eta_i^2 - \xi} \quad \xi = Q_i^4 \right)$$

$$W = W_1 + W_2$$

$$W(Q_1, Q_2, \eta_1, \eta_2) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{\eta_1^2 - Q_1^4} - \frac{\eta_1}{2} \log \frac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 - Q_1^4}}{Q_1^2} \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\eta_2^2 - Q_2^4} - \frac{\eta_2}{2} \log \frac{\eta_2 + \sqrt{\eta_2^2 - Q_2^4}}{Q_2^2} \end{aligned}$$

Notiamo infine che

$$\left(\frac{\partial W_i}{\partial Q_i} = \frac{\sqrt{\eta_i^2 - Q_i^4}}{Q_i} \right) \quad \frac{\partial^2 W_i}{\partial \eta_i \partial Q_i} = \frac{\eta_i}{Q_i \sqrt{\eta_i^2 - Q_i^4}}$$

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \eta \partial Q} = \frac{\eta_1 \eta_2}{Q_1 Q_2 \sqrt{\eta_1^2 - Q_1^4} \sqrt{\eta_2^2 - Q_2^4}} \neq 0$$

in quanto $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^+$

Esercizio

Problema di Keplero in un campo di

forze costante

(noto anche come problema di Stark)

Consideriamo il moto di un punto materiale di massa m

soggetto ad una forza conservativa derivata dall'energia potenziale

$$V(x, y, z) = -\frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + Fx$$

Mostrare che le coordinate paraboliche $(\mu, \nu, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$,

$$x = \frac{\mu^2 - \nu^2}{2}, \quad y = \mu\nu \sin \phi, \quad z = \mu\nu \cos \phi$$

sono variabili separabili per l'equazione di \mathcal{H} - \mathcal{J} .
relativa a questo sistema meccanico

Sol.

Notiamo che

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{F} = -\nabla V(x, y, z) = -\frac{k}{\rho^3} (x, y, z)^T - F(1, 0, 0)^T$$

Scriviamo le equazioni di Hamilton in coordinate cartesiane

Introduciamo i momenti coniugati a x, y, z

$$T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m \dot{y}$$

$$p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m \dot{z}$$

$$H(p_x, p_y, p_z, x, y, z) =$$

$$\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + F_x$$

$$\dot{\vec{p}} = -\nabla V = \vec{F} \quad \left. \begin{array}{l} \dot{x} = p_x/m \\ \dot{y} = p_y/m \\ \dot{z} = p_z/m \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow m \vec{a} = \vec{F} \\ \text{equazioni di Hamilton} \\ \vec{p} = (p_x, p_y, p_z)^T \\ \vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})^T \end{array}$$

$$\dot{x} = p_x/m$$

$$\dot{y} = p_y/m$$

$$\dot{z} = p_z/m$$

equazioni di Hamilton

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$$

$$\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})^T$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \mu \dot{u} - \nu \dot{v} \\ \dot{y} = \dot{u} \nu \sin \phi + \mu \dot{v} \sin \phi + \mu \nu \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{z} = \dot{u} \nu \cos \phi + \mu \dot{v} \cos \phi - \mu \nu \dot{\phi} \sin \phi \end{array} \right.$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{u}^2 \nu^2 + \mu^2 \dot{v}^2 + \mu^2 \nu^2 \dot{\phi}^2 + 2 \mu \dot{u} \nu \dot{v} + \mu^2 \dot{u}^2 + \nu^2 \dot{v}^2 - 2 \mu \dot{u} \nu \dot{v})$$

$$= \frac{1}{2} m [\dot{u}^2 (\mu^2 + \nu^2) + \dot{v}^2 (\mu^2 + \nu^2) + \mu^2 \nu^2 \dot{\phi}^2]$$

$$= \frac{1}{2} m [(\dot{\mu}^2 + \dot{\nu}^2)(\mu^2 + \nu^2) + \mu^2 \nu^2 \dot{\phi}^2]$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4} (\mu^2 - \nu^2)^2 + \mu^2 \nu^2 =$$

$$\frac{1}{4} (\mu^2 + \nu^2)^2$$

$$V(\mu, \nu) = -\frac{2k}{\mu^2 + \nu^2} + F \left(\frac{\mu^2 - \nu^2}{2} \right)$$

$$p_\mu = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mu}} = m \dot{\mu} (\mu^2 + \nu^2) \rightarrow \dot{\mu} = \frac{p_\mu}{m(\mu^2 + \nu^2)}$$

$$p_\nu = \frac{\partial T}{\partial \dot{\nu}} = m \dot{\nu} (\mu^2 + \nu^2) \rightarrow \dot{\nu} = \frac{p_\nu}{m(\mu^2 + \nu^2)}$$

$$p_\phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m \mu^2 \nu^2 \dot{\phi} \rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m \mu^2 \nu^2}$$

$$H(p_\mu, p_\nu, p_\phi, \mu, \nu) = \frac{1}{2} m \left((\mu^2 + \nu^2) \frac{p_\mu^2 + p_\nu^2}{m^2 (\mu^2 + \nu^2)^2} + \right.$$

$$\left. \frac{p_\phi^2}{m^2 \mu^2 \nu^2} \right) - \frac{2k}{\mu^2 + \nu^2} + F \left(\frac{\mu^2 - \nu^2}{2} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{p_\mu^2 + p_\nu^2}{m(\mu^2 + \nu^2)} + \frac{p_\phi^2}{m \mu^2 \nu^2} \right) - \frac{2k}{\mu^2 + \nu^2} + F \left(\frac{\mu^2 - \nu^2}{2} \right)$$

Assumiamo che la funzione caratteristica W

dell'equazione di H. - J. abbia la forma

$$W(u, v, \phi, \alpha) = W_u(u, \alpha) + W_v(v, \alpha) + W_\phi(\phi, \alpha)$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ nuovi momenti

L'equazione di H. - J. diventa

$$\frac{1}{2m(u^2 + v^2)} \left[\left(\frac{\partial W_u}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_v}{\partial v} \right)^2 \right] + \frac{1}{2m u^2 v^2} \left(\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{2h}{u^2 + v^2} + F\left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right) = e(\alpha) \quad \bullet$$

Notiamo che ϕ è una variabile ciclica, quindi p_ϕ è costante.

Poniamo $\alpha_1 = p_\phi$, cioè

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} = p_\phi = \alpha_1 \quad 1$$

da cui otteniamo $W_\phi = p_\phi \alpha_1$

Ora moltiplichiamo l'equazione \bullet per $u^2 + v^2$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W_u}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_v}{\partial v} \right)^2 \right] + \frac{\alpha_1^2}{2m} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) -$$

$$2k + F\left(\frac{u^4 - v^4}{2}\right) = e(\alpha)(u^2 + v^2)$$

Possiamo scrivere le due equazioni differenziali

$$2 \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_u}{\partial u}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{2m u^2} - k + \frac{F}{2} u^4 - e(\alpha) u^2 = e_1(\alpha)$$

$$3 \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_v}{\partial v}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{2m v^2} - k - \frac{F}{2} v^4 - e(\alpha) v^2 = -e_1(\alpha)$$

dove si richiede che $\det \frac{\partial(e, e_1, \alpha_1)}{\partial \alpha} \neq 0$.

Abbiamo quindi scritto un sistema di 3 equazioni differenziali ordinarie (1, 2, 3) a partire dall'eq. di H.-J.

Esercizio (8 giugno 2018)

Consideriamo una funzione regolare $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(p, q) = \psi((p_1 + q_2)^2 + q_1^2, p_2 + q_1, q_2)$$

$$p = (p_1, p_2) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad q = (q_1, q_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$$

i) Trovare

$$(p, q) \xrightarrow{\psi} (P, Q)$$

t. c. P, Q siano separabili per l'equazione di H.-J.

per la hamiltoniana $K = H \circ \psi^{-1}$

Sol.

Poniamo

$$\begin{cases} P_1 = p_1 + q_2 \\ P_2 = p_2 + q_1 \end{cases}$$

e completiamo queste relazioni ad una trasformazione canonica usando una funzione generatrice $S(q, P)$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad p_1 = P_1 - q_2, \\ p_2 = P_2 - q_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = P_1 - q_2 \quad \longrightarrow \quad S(q, P) = P_1 q_1 - q_1 q_2 + h(q_2, P)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_2} = P_2 - q_1 \quad \longrightarrow \quad S(q, P) = P_2 q_2 - q_1 q_2 + g(q_1, P)$$

Togliamo

$$S(q, P) = P_2 q_2 + P_1 q_1 - q_1 q_2$$

e notiamo che è una buona funzione generatrice

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$


$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = q_1$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = q_2$$

$$\begin{cases} P_1 = p_1 + q_2 \\ P_2 = p_2 + q_1 \end{cases} \quad \begin{cases} Q_1 = q_1 \\ Q_2 = q_2 \end{cases}$$

La nuova hamiltoniana diventa

$$K(P, Q) = \frac{1}{2} (P_1^2 + Q_1^2, P_2, Q_2)$$

Per rispondere alla domanda si può anche verificare che la trasformazione  sia canonica. In effetti la matrice jacobiana

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (p, q)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è simplettica, cioè

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial (p, q)} \right)^T \mathcal{J} \frac{\partial \Psi}{\partial (p, q)} = \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(provate a verificarlo)

ii) Trovare le soluzioni del sistema hamiltoniano per H con c. i.

$$p_1(0) = -1, \quad p_2(0) = 0, \quad q_1(0) = 1, \quad q_2(0) = 1$$

ed

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x + yz$$

Sol.

Si ha

$$H(p, q) = \frac{1}{2} [(p_1 + q_2)^2 + q_1^2] + (p_2 + q_1)q_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -q_1 - q_2 \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -p_1 - q_2 - p_2 - q_1 \\ \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 + q_2 \\ \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = q_2 \end{array} \right.$$

Anziché risolvere questo sistema con le c. i. date, consideriamo il sistema hamiltoniano associato a K

$$K(P, Q) = \frac{1}{2} (P_1^2 + Q_1^2) + P_2 Q_2$$

$$\dot{P}_1 = -Q_1, \quad \dot{P}_2 = -P_2$$

$$\dot{Q}_1 = P_1, \quad \dot{Q}_2 = Q_2$$

$$P_1(0) = p_1(0) + q_2(0) = -1 + 1 = 0$$

$$P_2(0) = p_2(0) + q_1(0) = 0 + 1 = 1$$

$$Q_1(0) = q_1(0) = 1$$

$$Q_2(0) = q_2(0) = 1$$

quindi

$$Q_2(t) = e^t, \quad P_2(t) = e^{-t}, \quad e$$

$$(\ddot{Q}_1 = -Q_1)$$

$$Q_1(t) = \cos t, \quad P_1(t) = -\sin t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1(t) = Q_1(t) = \cos t \\ q_2(t) = Q_2(t) = e^t \\ p_1(t) = P_1(t) - Q_2(t) = -\sin t - e^t \\ p_2(t) = P_2(t) - Q_1(t) = e^{-t} - \cos t \end{array} \right.$$

iii) Calcolare un integrale completo dell'equazione di

\mathcal{H} - \mathcal{J} associata a $K = H \circ \psi^{-1}$

Sol.

Scriviamo subito per $W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1} \right)^2 + Q_1^2 \right] + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_2} \right) Q_2 = e(\alpha)$$

con $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

Poniamo

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(Q_1, \alpha_1, \alpha_2) + W_2(Q_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

e scriviamo le due equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_1} \right)^2 + \frac{1}{2} Q_1^2 = \alpha_1 \\ \frac{\partial W_2}{\partial Q_2} Q_2 = \alpha_2 \end{cases}$$

con $\alpha_1 + \alpha_2 = e(\alpha)$

$$\begin{cases} \frac{\partial W_1}{\partial Q_1} = \sqrt{2\alpha_1 - Q_1^2} \\ \frac{\partial W_2}{\partial Q_2} = \frac{\alpha_2}{Q_2} \rightarrow W_2 = \alpha_2 \log Q_2 \end{cases} \quad Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^+$$

$$W_1 = \int \sqrt{2\alpha_1 - Q_1^2} \, dQ_1 = \sqrt{2\alpha_1} \int \sqrt{1 - \frac{Q_1^2}{2\alpha_1}} \, dQ_1$$

$$x = Q_1 / \sqrt{2\alpha_1}$$

$$\sqrt{2\alpha_1} \int \sqrt{1 - x^2} \, dx$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = x \sqrt{1-x^2} - \int \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\rightarrow \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$$

$$W(Q_1, Q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \left(\frac{Q_1}{\sqrt{2\alpha_1}} \sqrt{1 - \frac{Q_1^2}{2\alpha_1}} + \arcsin \frac{Q_1}{\sqrt{2\alpha_1}} \right) + \alpha_2 \log Q_2$$

Infine, notiamo che

$$\det \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial Q} = \frac{1}{Q_2 \sqrt{2\alpha_1 - Q_1^2}} \neq 0$$