

Esercizio (17 gennaio 2019)

Funzioni di Lagrange

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q), \quad V(q) = -\cos q$$

$$q, \dot{q} \in \mathbb{R}$$

Si consideri la sol. $\gamma(t)$ delle eq. di E.-L. per L con c.i.

$$q(0) = \frac{\pi}{3}, \quad \dot{q}(0) = 1$$

Trovare $\bar{t} > 0$ t.c. in $(0, \bar{t})$ non ci siano valori coniugati

$$\text{a } t = 0$$

Sol.

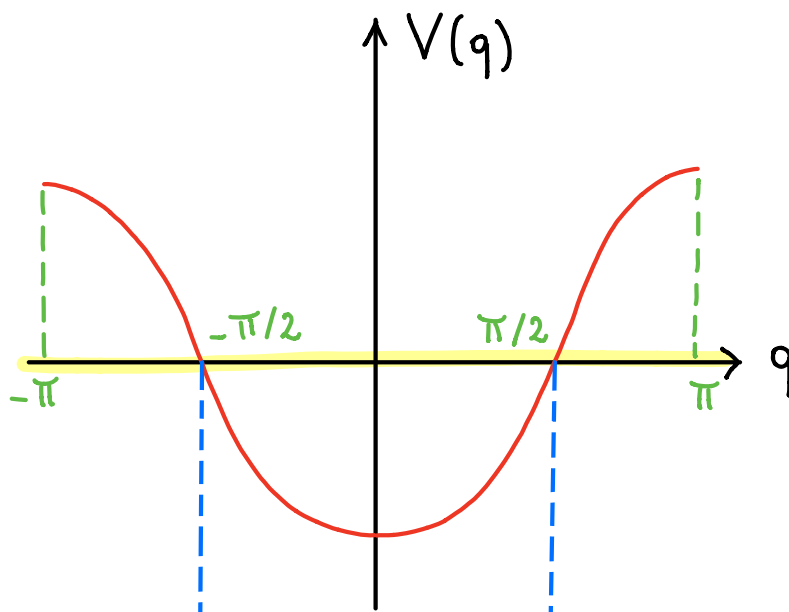
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -V' \quad -V' = -\sin q$$

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^2 + V = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \cos q$$

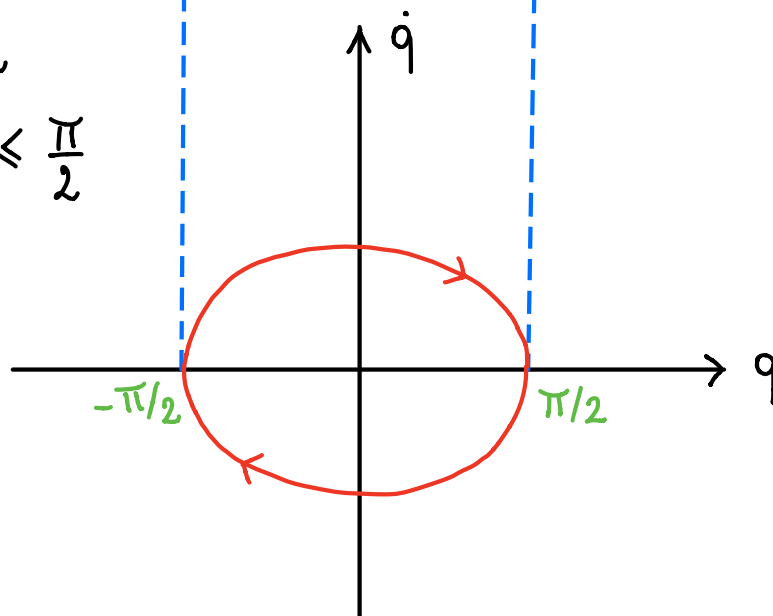
$$\bar{E} = E(\pi/3, 1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$E(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$



notiamo che

$$-\frac{\pi}{2} \leq q(t) \leq \frac{\pi}{2}$$



equazione di Jacobi

$$-\frac{d(a(t)\dot{\eta})}{dt} + (c(t) - \dot{b}(t))\eta = 0$$

$$a(t) = \frac{1}{2} L_{\dot{q}\dot{q}}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \frac{1}{2} > 0$$

$$b(t) = \frac{1}{2} L_{q\dot{q}}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$$

$$c(t) = \frac{1}{2} L_{qq}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = -\frac{1}{2} \cos(\gamma(t))$$

$$L_{qq} = -V'' = -\cos q$$

$$-V = \cos q \quad (-V)' = -\sin q$$

$$(-V)'' = -\cos q$$

$$-\frac{1}{2} \ddot{\eta} - \frac{1}{2} \cos(\gamma(t)) \eta = 0$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} \ddot{\eta} = -\cos(\gamma(t)) \eta \\ \eta(0) = 0 \\ \dot{\eta}(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \gamma(t) \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \cos(\gamma(t)) \leq 1 \end{cases}$$

consideriamo il sistema

$$\textcircled{2} \begin{cases} \ddot{z} = -z \\ z(0) = 0 \\ \dot{z}(0) = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z(t) = \sin t \\ \dot{z}(t) = \cos t \end{cases}$$

prendiamo un intervallo $I = (0, t^*)$, $t^* > 0$, t.c.

$\eta(t) > 0$, $z(t) > 0$ (sicuramente esiste),

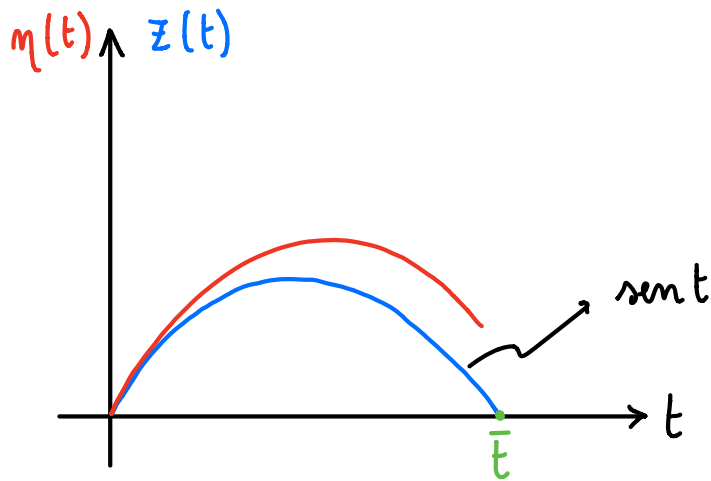
allora notiamo che in I si ha

$$\ddot{\eta} \geq -\eta,$$

e il confronto dei due sistemi $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$ porta a scrivere

$$\dot{\eta} > \dot{z} = \cos t$$

da cui $\eta(t) > \sin t$



Nell'intervallo $(0, \bar{t})$ con $\bar{t} = \pi$ non ci sono valori coniugati a $t = 0$

Esercizio

Per quali scelte di $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ la trasformazione

$$p = a I^\alpha \cos^\beta \varphi$$

$$q = b I^\alpha \sin^\gamma \varphi$$

è completamente canonica?

Sol.

(I è il momento coniugato a φ)

$$\{q, p\} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial q}{\partial \varphi} \frac{\partial p}{\partial I} - \frac{\partial q}{\partial I} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 1$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = a I^\alpha \beta (\cos \varphi)^{\beta-1} (-\sin \varphi)$$

$$\frac{\partial p}{\partial I} = \alpha a I^{\alpha-1} \cos^\beta \varphi$$

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = b I^\alpha \gamma (\sin \varphi)^{\gamma-1} (\cos \varphi)$$

$$\frac{\partial q}{\partial I} = b \alpha I^{\alpha-1} \sin^\gamma \varphi$$

$$\alpha a I^{2\alpha-1} b \gamma (\cos \varphi)^{\beta+1} (\sin \varphi)^{\gamma-1} +$$

$$\alpha a I^{2\alpha-1} b \beta (\cos \varphi)^{\beta-1} (\sin \varphi)^{\gamma+1} = 1$$

$$\alpha a I^{2\alpha-1} b (\cos \varphi)^{\beta-1} (\sin \varphi)^{\gamma-1} (\gamma \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi) = 1$$

allora due a essere

$$\beta = 1, \gamma = 1, \alpha = \frac{1}{2}$$

dunque

$$\frac{1}{2} ab = 1, \quad ab = 2$$

sugliamo

$$a = \sqrt{2} c, \quad b = \frac{2}{c\sqrt{2}} \quad \text{con } c \text{ costante}$$

$$p = c \sqrt{2I} \cos \varphi$$

$$q = \frac{2}{c\sqrt{2}} \sqrt{I} \sin \varphi = \frac{\sqrt{2I}}{c} \sin \varphi$$

Esercizio

Consideriamo la trasformazione

$$I = \frac{1}{2w} (p^2 + w^2 q^2)$$

$$\varphi = \arctan \frac{wq}{p}$$

i) Si dimostri che è completamente canonica

Sol. i)

$$1 \quad \{\varphi, I\} = 1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial I}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial I}{\partial q} = 1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{1}{1 + \frac{w^2 q^2}{p^2}} \frac{w}{p} = \frac{pw}{p^2 + w^2 q^2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial q} = \frac{w^2 2q}{2w} = wq$$

$$\frac{\partial I}{\partial p} = \frac{p}{w}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 q^2}{p^2}} \left(-\frac{\omega q}{p^2} \right) = -\frac{\omega q}{p^2 + \omega^2 q^2}$$

$$\frac{\cancel{p}\omega}{p^2 + \omega^2 q^2} \frac{p}{\cancel{\omega}} - \left(-\frac{\omega q}{p^2 + \omega^2 q^2} \right) \omega q =$$

$$\frac{p^2 + \omega^2 q^2}{p^2 + \omega^2 q^2} = 1 \quad \checkmark$$

2 La matrice jacobiana della trasformazione è
simplitica

$$(p, q) \xrightarrow{\psi} (I, \varphi)$$

$$x = (p, q)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^T \mathcal{J} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \mathcal{J} \quad \text{con } \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial p} & \frac{\partial I}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/\omega & \omega q \\ -\frac{\omega q}{p^2 + \omega^2 q^2} & \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2 q^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ \frac{\partial I}{\partial q} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial p} & \frac{\partial I}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial p} & \frac{\partial I}{\partial q} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial p} & -\frac{\partial \varphi}{\partial q} \\ \frac{\partial I}{\partial p} & \frac{\partial I}{\partial q} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^T \curvearrowright \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \quad = \{I, \varphi\} = -1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial p} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial I}{\partial p} & \frac{\partial I}{\partial p} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial I}{\partial q} \\ \frac{\partial I}{\partial q} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial I}{\partial p} & \frac{\partial I}{\partial q} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial I}{\partial q} \end{pmatrix} =$$

$= \{\varphi, I\} = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

3

Condizione di Lie

cerchiamo una funzione $F(p, q)$ t. c.

$$I d\varphi - p dq = dF,$$

scriviamo $I d\varphi$

$$\frac{1}{2\omega} (p^2 + \omega^2 q^2) \left(\underbrace{\frac{p\omega}{p^2 + \omega^2 q^2}}_{\parallel \frac{\partial \psi}{\partial q}} dq + \left(\underbrace{-\frac{q\omega}{p^2 + \omega^2 q^2}}_{\parallel \frac{\partial \psi}{\partial p}} \right) dp \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (pdq - qdp)$$

allora

$$\frac{1}{2} (pdq - qdp) - pdq = -\frac{1}{2} (pdq + qdp)$$

$$\text{e } F(p, q) = -\frac{1}{2} pq \quad \checkmark$$

ii) Te ne determini una funzione generatrice $S(p, \psi)$

Sol. ii)

Consideriamo le equazioni

$$q = \frac{\partial S}{\partial p}(p, \psi) \quad I = \frac{\partial S}{\partial \psi}(p, \psi)$$

$$\psi = \arctan \frac{\omega q}{p} \quad \text{da cui } q = \frac{p}{\omega} \tan \psi$$

$$\text{e quindi } \frac{\partial S}{\partial p} = \frac{p}{\omega} \tan \psi$$

sostituendo $q(p, \varphi)$ scritta sopra in

$$I = \frac{1}{2w} (p^2 + w^2 q^2)$$

si ha

$$I = \frac{1}{2w} \left(p^2 + w^2 \frac{p^2}{w^2} \tan^2 \varphi \right)$$

$$I = \frac{p^2}{2w} (1 + \tan^2 \varphi)$$

quindi

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{p^2}{2w^2} (1 + \tan^2 \varphi) & * \\ \frac{\partial S}{\partial p} = \frac{p}{w} \tan \varphi \end{cases}$$

integrando trovo

$$S(p, \varphi) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{w} \tan \varphi + f(\varphi)$$

derivo rispetto a φ

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{w} (1 + \tan^2 \varphi) + f'(\varphi)$$

confronto con *

$$\text{scelgo } \varphi = 0$$

$$S(p, \varphi) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{w} \tan \varphi$$

verifico che

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p \partial \varphi} = \frac{p}{w} (1 + \tan^2 \varphi) \neq 0 \quad \text{per } p \neq 0.$$

Esercizio

Si scriva la funzione generatrice $S(I, q)$ della trasformazione (che è l'inversa di quella dell'esercizio precedente)

$$\begin{cases} p = \sqrt{2Iw} \cos \varphi & * \\ q = \sqrt{\frac{2I}{w}} \sin \varphi & * \end{cases}$$

Sol.

$$\frac{\partial S}{\partial I} = \varphi, \quad \frac{\partial S}{\partial q} = p$$

dalla seconda relazione (*) otteniamo

$$\sin \varphi = q \sqrt{\frac{w}{2I}} \quad \rightarrow \quad \varphi = \arcsin \left(q \sqrt{\frac{w}{2I}} \right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial I} = \arcsin \left(q \sqrt{\frac{w}{2I}} \right)$$

cerchiamo di scrivere p come funzione di q, I :

prima trovo

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{q^2 \omega}{2I}}$$

che sostituisco in (*)

$$p = \sqrt{2I\omega} \sqrt{1 - \frac{q^2 \omega}{2I}} = \sqrt{2I\omega - \omega^2 q^2}$$

Considero

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2I\omega - \omega^2 q^2} \\ \frac{\partial S}{\partial I} = \arcsin \left(q \sqrt{\frac{\omega}{2I}} \right) \quad * \end{cases}$$

integrando ottengo

$$S(I, q) = \int_0^q \sqrt{2I\omega - \omega^2 x^2} dx + \varphi(I)$$

derivo rispetto ad I

$$\frac{\partial S}{\partial I} = \int_0^q \underbrace{\frac{\partial}{\partial I} (\sqrt{2I\omega - \omega^2 x^2})}_{\frac{2\omega}{2\sqrt{2I\omega - \omega^2 x^2}}} dx + \varphi'(I) =$$

$$= \frac{\omega}{\sqrt{2I\omega}} \int_0^q \frac{1}{\sqrt{1 - \omega x^2 / (2I)}} dx + f'(I)$$

$$= \arcsin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2I}} q\right) + f'(I)$$

confrontando questa espressione con quella riportata in (*) vediamo che f deve essere costante, scegliamo $f = 0$, da cui

$$S(I, q) = \int_0^q \sqrt{2I\omega - \omega^2 x^2} dx$$

Esercizio

Si consideri la trasformazione di coordinate

$$(p, q, t) \xrightarrow{\psi} (P, Q, t)$$

con $p, q \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, $P = R_t p$, $Q = R_t q$,

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

i) dimostrare che ψ è canonica

sol. i)

Condizione di Liouville: cerchiamo

$$G = G(p, q, t) \quad e \quad \alpha \neq 0 \quad t.c.$$

$$P \cdot \delta Q - \alpha p \cdot \delta q = \delta G$$

dove δ indica il differenziale a tempo bloccato

$$R_t p \cdot R_t \delta q - \alpha p \cdot \delta q = p \cdot \delta q - \alpha p \cdot \delta q$$

$$= (1 - \alpha) p \cdot \delta q$$

per $\alpha = 1$ otteniamo

$$P \cdot \delta Q - p \cdot \delta q = 0$$

Essendo soddisfatta la cond. di Liouville e dato che (p, q) sono definite in \mathbb{R}^2 possiamo concludere che ψ è una trasformazione canonica

ii) Estendere ψ ad una trasformazione canonica

$$(p, e, q, t) \xrightarrow{\tilde{\psi}} (P, E, Q, t)$$

dove P, Q sono definite da ψ

$e, E \in \mathbb{R}$ sono le nuove variabili coniugate al tempo

Sol. ii)

Dato che ψ è canonica, deve essere

$$\mathcal{E}(p, e, q, t) = e - H_0(p, q, t)$$

$$\text{con } H_0 = K_0 \circ \psi$$

e K_0 funzione hamiltoniana di $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1}$, dove

$$(p, q, t) \xrightarrow{\Phi} (P, Q)$$

Se $S = S(q, P, t)$ è una funzione generatrice di ψ , allora si ha

$$H_0(p, q, t) = \frac{\partial S}{\partial t}(q, P(p, q, t), t),$$

$$\text{e quindi } \mathcal{E} = e - \frac{\partial S}{\partial t}$$

1 Proviamo a trovare \mathcal{E} attraverso una funzione generatrice $S(q, P, t)$:

$$\begin{cases} Q = \frac{\partial S}{\partial P} = R_t q \\ P = \frac{\partial S}{\partial q} = R_t^T P \end{cases}$$

integrando la prima relazione si ha

$$S(q, P, t) = R_t q \cdot P + \phi(q, t)$$

integrando la seconda si ha $\rightarrow = R_t q \cdot P$

$$S(q, P, t) = \overbrace{R_t^T P \cdot q} = R_t q \cdot P + \psi(P, t)$$

Segue che $S(q, P, t) = R_t q \cdot P$

$$\frac{\partial (R_t q)}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -q_1 \sin t - q_2 \cos t \\ q_1 \cos t - q_2 \sin t \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial (R_t q)}{\partial t} \cdot P = P_1 (-q_1 \sin t - q_2 \cos t) + P_2 (q_1 \cos t - q_2 \sin t)$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, P(p, q, t), t) =$$

$$(p_1 \cos t - p_2 \sin t)(-q_1 \sin t - q_2 \cos t) +$$

$$(p_1 \sin t + p_2 \cos t)(q_1 \cos t - q_2 \sin t) =$$

$$-p_1 q_1 (\cancel{\sin t \cos t}) - p_1 q_2 \cos^2 t + p_2 q_1 \sin^2 t +$$

$$p_2 q_2 \cancel{(\text{unit cost})} + p_1 q_1 \cancel{(\text{unit cost})} - p_1 q_2 \sin^2 t + p_2 q_1 \cos^2 t - p_2 q_2 \cancel{(\text{unit cost})} =$$

$$p_2 q_1 - p_1 q_2$$

$$\mathcal{E}(p, e, q, t) = e - (p_2 q_1 - p_1 q_2)$$

Podiamo evitare diversi conti notando che

$$\frac{\partial R_t}{\partial t} = R_t \mathcal{J}, \quad \text{con } \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, P, t) = P \cdot R_t \mathcal{J} q$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q, P(p, q, t), t) = R_t p \cdot R_t \mathcal{J} q =$$

$$p^T \underbrace{R_t^T R_t}_{\text{"I"}} \mathcal{J} q$$

$$= p^T \mathcal{J} q = p \cdot \underbrace{\mathcal{J} q}_{\text{"I"}} = p_2 q_1 - q_2 p_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo trovato che

$$\frac{\partial S}{\partial t}(p, q, t) = p_2 q_1 - q_2 p_1$$

2 Proviamo ora a ricavare l'espressione di $\mathcal{E}(p, e, q, t)$ dalla relazione

$$\mathcal{E}(p, e, q, t) = e - H_0(p, q, t)$$

$$H_0 = K_0 \circ \psi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1}$$

$$\Phi = (R_t p, R_t q)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = (R_t \dot{\mathcal{J}} p, R_t \dot{\mathcal{J}} q) \quad e$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} = (R_t \dot{\mathcal{J}} R_t^T P, R_t \dot{\mathcal{J}} R_t^T Q)$$

poiché R_t è una matrice simplettica $\forall t \in \mathbb{R}$, dato che ψ è canonica, vale

$$R_t \dot{\mathcal{J}} R_t^T = R_t^T \dot{\mathcal{J}} R_t = \dot{\mathcal{J}}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} = (\dot{\mathcal{J}} P, \dot{\mathcal{J}} Q)$$

$$\begin{cases} \dot{P} = \dot{\mathcal{J}} P = -\frac{\partial K_0}{\partial Q} \\ \dot{Q} = \dot{\mathcal{J}} Q = \frac{\partial K_0}{\partial P} \end{cases}$$

segue che $K_0 = P \cdot \dot{\mathcal{J}} Q$

$$\begin{aligned}
 H_0 &= K_0 \circ \psi = R_t p \cdot \delta R_t q \\
 &= p^T R_t^T \delta R_t q = p \cdot \delta q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(p, e, q, t) &= e - H_0(p, q, t) = \\
 &= e - (p_2 q_1 - q_2 p_1) = \\
 &= e - p_2 q_1 + q_2 p_1
 \end{aligned}$$

iii) Scrivere il campo vettoriale

$$X = (-|q|^{-3} q, 0, p, 1)^T$$

nelle nuove variabili (P, E, Q, t)

Sol. iii)

$$\tilde{\psi}^* X = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}} X \circ \tilde{\psi}^{-1}$$

$$\text{con } \tilde{x} = (p, e, q, t)$$

ricordiamo le relazioni

$$P = R_t p, \quad Q = R_t q \quad e$$

$$E = e - q_1 p_2 + q_2 p_1$$

Calcoliamo prima $\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}}$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}} = \begin{pmatrix} R_t & 0 & O_2 & R_t \delta p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & -q_1 & 1 & -p_2 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_t & 0 & R_t \delta q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}} x =$$

$$\begin{pmatrix} R_t & 0 & O_2 & R_t \delta p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & -q_1 & 1 & -p_2 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_t & 0 & R_t \delta q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -|q|^{-3} q \\ 0 \\ p \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -R_t q / |q|^3 + R_t \delta p \\ -|q|^{-3} (q_1 q_2 - q_2 q_1) - p_2 p_1 + p_1 p_2 \\ R_t p + R_t \delta q \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}} X \circ \Psi^{-1} = \begin{pmatrix} -R_t R_t^T Q / |Q|^3 + R_t \mathcal{J} R_t P \\ 0 \\ R_t R_t^T P + R_t \mathcal{J} R_t^T Q \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -Q / |Q|^3 + \mathcal{J} P \\ 0 \\ P + \mathcal{J} Q \\ 1 \end{pmatrix}$$

si può notare che questo è il campo vettoriale hamiltoniano corrispondente a

$$\tilde{K}(P, \varepsilon, Q, t) = \tilde{H} \circ \tilde{\Psi}^{-1}$$

$$\text{con } \tilde{H} = H + e, \quad H(p, q) = \frac{1}{2} |p|^2 - \frac{1}{|q|}$$

$$\tilde{H} = e + \frac{1}{2} |p|^2 - \frac{1}{|q|}$$

per verificare questa affermazione procediamo come segue

$$\mathcal{E}(p, e, q, t) = e - (p_2 q_1 - q_2 p_1)$$

$$e = \mathcal{E} + p \cdot \delta q = \mathcal{E} + R_t^T P \cdot \delta R_t^T Q$$

$$= \mathcal{E} + \underbrace{P^T R_t \delta R_t^T Q}_{= P} = \mathcal{E} + P \cdot \delta Q$$

$$\underbrace{\tilde{H} \circ \tilde{\psi}^{-1}}_{= \tilde{K}} = \mathcal{E} + \underbrace{P \cdot \delta Q}_{=} + \frac{1}{2} |P|^2 - \frac{1}{|Q|} - Q^T \delta P = -Q \cdot \delta P$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial Q} = \delta P - \frac{Q}{|Q|^3}$$

$$\frac{\partial |Q|^{-1}}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q} \left((Q_1^2 + Q_2^2)^{-1/2} \right) =$$

$$-\frac{1}{2} (Q_1^2 + Q_2^2)^{-3/2} 2Q = \underline{-Q/|Q|^3}$$

$$\dot{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial t} = 0,$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial P} = \delta Q + P, \quad \dot{t} = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \mathcal{E}} = 1$$