Esercizio (1° compitino 2019/2020)

Consideriamo la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q^2 - V(q), \qquad V(q) = -\frac{1}{1+q} - \frac{1}{1-q}$$

con $-1 < q < 1$ e $\dot q \in \mathbb{R}$.

i) Si consideri la soluzione $t \to \gamma(t)$ delle eq. di E.-L. per L con c.i.

$$\gamma(0) = 0, \quad \dot\gamma(0) = 2,$$

mostrare che γ è monotona crescente e si trovino gli estremi t_1, t_2 del suo intervallo massimale di definizione.

Sol. i)

$$L = \frac{1}{2}\dot q^2 - V(q)$$

$$L_{\dot q} = \dot q, \qquad \frac{dL_{\dot q}}{dt} = \ddot q$$

$$V(q) = -\frac{1-q+1+q}{(1-q^2)} = -\frac{2}{1-q^2}$$

$$L_q = -V'(q)$$

$$-V'(q) = \frac{-2(-2q)}{(1-q^2)^2} = \frac{4q}{(1-q^2)^2}$$

$$L_q = \frac{4q}{(1-q^2)^2}$$

$$\frac{dL_{\dot{q}}}{dt} = L_q \longrightarrow \ddot{q} = \frac{4q}{(1-q^2)^2}$$

$$\begin{cases} \ddot{q} = \dfrac{4q}{(1-q^2)^2} \\ q(0) = 0 \\ \dot{q}(0) = 2 \end{cases}$$

consideriamo l'energia

$$E(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + V(q) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{2}{1-q^2},$$

poichè l'energia è un integrale primo del moto

$$\bar{E} = E(0,2) = \frac{1}{2}2^2 - 2 = 0 = E(q(t),\dot{q}(t))$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\dot{q}^2 + V(q) = 0, \qquad \dot{q}^2 = -2V(q)$$

poiché $\dot{q}(0) > 0$ scriviamo

$$\begin{cases} \dot{q} = \sqrt{-2V(q)} = \sqrt{\dfrac{4}{1-q^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-q^2}} \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

$\dot{q}\sqrt{1-q^2} = 2$ da cui integrando

$$2t = \int_0^q \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$x = \operatorname{sen}\theta \qquad dx = \cos\theta\, d\theta$$

$$2t = \int_0^{\operatorname{arcsen} q} \underbrace{\cos^2\theta}_{= \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)\Big|_0^{\operatorname{arcsen} q} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} q + q\sqrt{1-q^2}\right) = 2t$$

$$\longrightarrow 4t = \operatorname{arcsen} q + q\sqrt{1-q^2} = f(q)$$

$$f'(q) = 2\sqrt{1-q^2} > 0 \quad , \quad (-1 < q < 1)$$

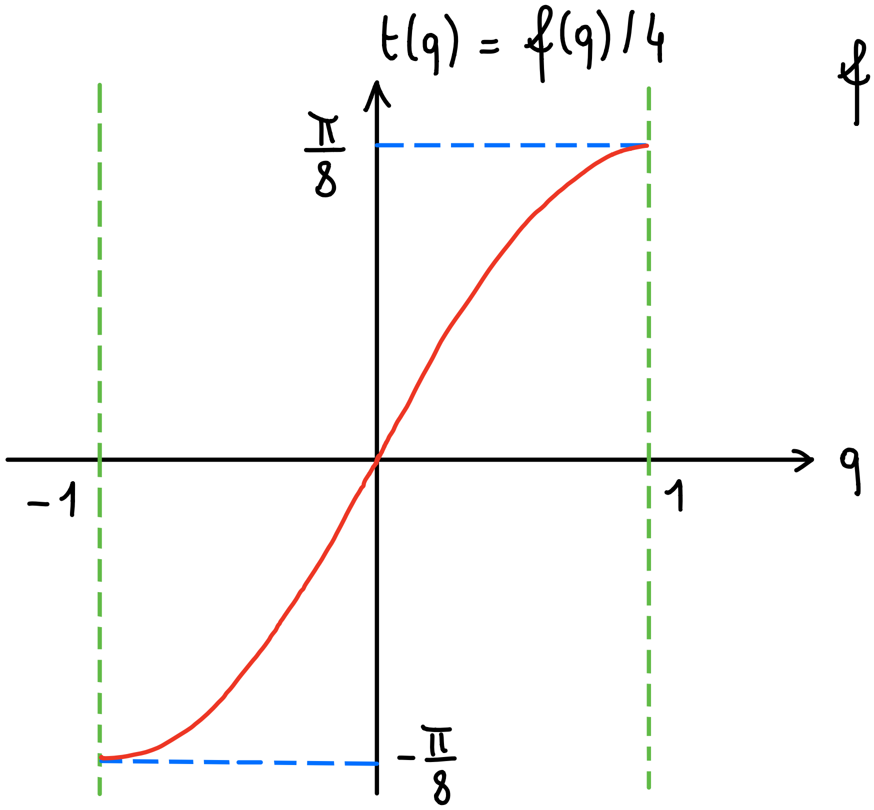
$$f(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f''(q) = 2 \frac{1}{2\sqrt{1-q^2}}(-2q) = -\frac{2q}{\sqrt{1-q^2}}$$

$f''(q) > 0$ per $-1 < q < 0$

$f''(q) < 0$ per $0 < q < 1$

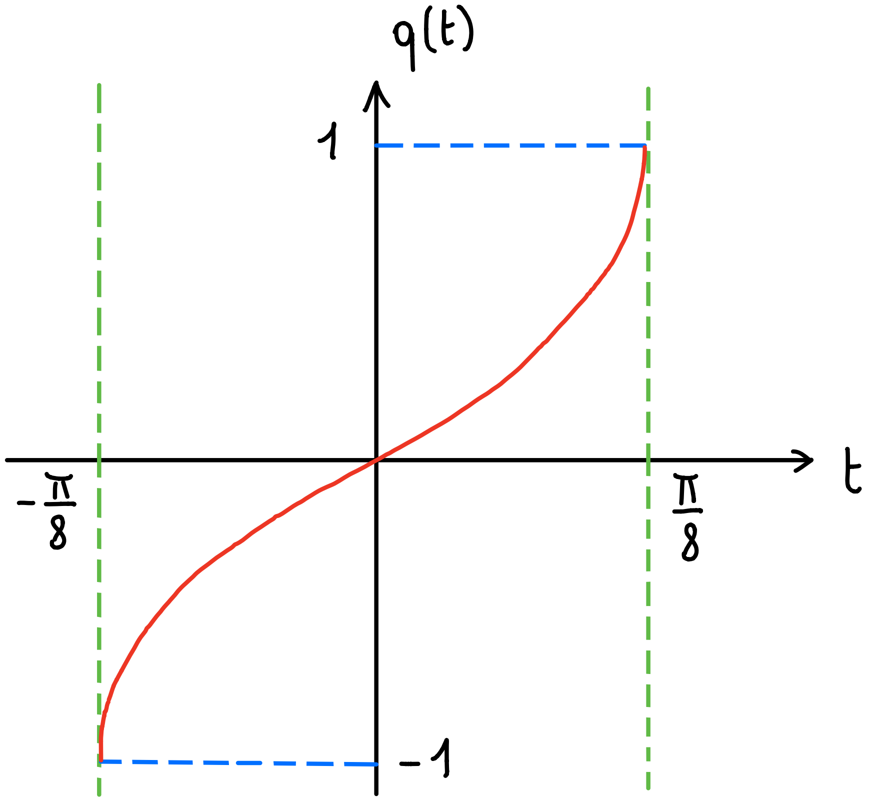


$f'(q) = 0$

per $q = \pm 1$

$\gamma(t)$ è monotona crescente e gli estremi t_1, t_2 del suo intervallo massimale di definizione sono

$$t_1 = -\frac{\pi}{8} \qquad t_2 = \frac{\pi}{8}$$



ii) Mostrare che per ogni tempo τ, con $0 < \tau < t_2$, $\gamma(t)$ è un minimo debole del funzionale

$$A(\gamma) = \int_0^\tau L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,\tau], \mathbb{R})$.

Sol. ii)

Calcoliamo i coefficienti

$$a(t) = \frac{1}{2} L_{\dot q \dot q}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = \frac{1}{2} > 0$$

la cond. di Legendre stretta è verificata

$$b(t) = \frac{1}{2} L_{\dot q q}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = 0$$

$$c(t) = \frac{1}{2} L_{qq}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = \dots$$

$$L_q = -V' \qquad L_{qq} = -V''$$

$$-V'(q) = \frac{4q}{(1-q^2)^2}$$

$$-V''(q) = \frac{4(1-q^2)^{\cancel{2}} - 4q \cdot 2\cancel{(1-q^2)}(-2q)}{(1-q^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{4 - 4q^2 + 16q^2}{(1-q^2)^3}$$

$$= \frac{4(1+3q^2)}{(1-q^2)^3}$$

quindi $\quad c(t) = \dfrac{2(1+3\gamma^2(t))}{(1-\gamma^2(t))^3}$

Scriviamo l'equazione di Jacobi

$$-\frac{d(a(t)\dot{\eta})}{dt} + c(t)\eta = 0$$

$$-\frac{1}{2}\ddot{\eta} + \left(\frac{2(1+3\tilde{q}^2)}{(1-\tilde{q}^2)^3}\right)\eta = 0$$

dove ho introdotto per comodità $\tilde{q} = \gamma(t)$

$$\begin{cases} \ddot{\eta} = \dfrac{4(1+3\tilde{q}^2)}{(1-\tilde{q}^2)^3}\,\eta \\ \dot{\eta}(0) = 1 \\ \eta(0) = 0 \end{cases}$$

vogliamo mostrare che la funzione di Jacobi, soluzione di questo sistema, non si annulla in $0 < t \leq \tau < t_2$. Sia $I = (0, t_2)$.

Può essere utile considerare il sistema

$$
\begin{cases}
\dot{\eta}(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t \frac{4\,(1+3\gamma^2(s))}{(1-\gamma^2(s))^3}\,\eta(s)\,ds \\[2em]
\eta(0) = 0
\end{cases}
$$

Assumiamo che esista

$$
\bar{t} := \min \{ t \in I \mid \eta(t) = 0 \},
$$

(questo minimo può esistere perché non ci possono essere punti di accumulazione di zeri per $\eta(t)$)

allora deve esistere $\bar{t}_1 < \bar{t}$ t.c. $\dot{\eta}(\bar{t}_1) = 0$

$$
\dot{\eta}(\bar{t}_1) = 0 = 1 + \int_0^{\bar{t}_1} \underbrace{\frac{4\,(1+3\gamma^2(s))}{(1-\gamma^2(s))^3}}_{=\,\Gamma(s)}\,\eta(s)\,ds
$$

$$
\int_0^{\bar{t}_1} \Gamma(s)\,\eta(s)\,ds = -1 < 0
$$

Notiamo che

$\Gamma'(s) > 0$ in I,

dunque deve esistere $\bar{t}_2 > 0$ e $\bar{t}_2 < \bar{t}_1 < \bar{t}$

tale che $\eta(\bar{t}_2) = 0$, ma questo è un assurdo

per come abbiamo definito $\bar{t}$.

iii) Calcolare la funzione di eccesso di Weierstrass per L e mostrare che $\forall \tau$, con $0 < \tau < t_2$, $\gamma(t)$ è un minimo forte per A nella classe di funzioni $C^1([0,\tau], \mathbb{R})$.

Sol. iii)

$$\mathcal{E}_L(t,q,v,w) = L(q,w,t) - [L(q,v,t) + (w-v)L_{\dot{q}}(q,v,t)]$$

ricordiamoci che $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$, allora

$$\mathcal{E}_L(t,q,v,w) = \frac{1}{2}w^2 - V(q) - \frac{1}{2}v^2 + V(q) - (w-v)v =$$

$$\frac{1}{2}(w-v)(w+v) - v(w-v) =$$

$$\frac{1}{2}(w-v)(w+v-2v) = \frac{1}{2}(w-v)^2 > 0$$

$$v \neq w$$

Poichè in I è soddisfatta la cond. di Legendre stretta e non esistono valori coniugati a $t=0$ lungo $\gamma(t)$ è possibile immergere $\gamma(t)$ in un campo di estremali $q = \gamma(t, \alpha)$, $t \in I$, $\alpha \in A$, di classe C^3.

La slope function $P(t,q)$ del campo di estremali soddisfa la cond. stretta di Weierstrass

$$\mathcal{E}_L(t, q, P(t,q), \dot{q}) > 0$$

per $\dot{q} \neq P(t,q)$ dato che

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}(\dot{q} - P(t,q))^2$$

Esercizio

Consideriamo la trasformazione ψ

$$x^T = (p, q) \xrightarrow{\psi} (P, Q), \quad x \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} P = \frac{1}{2} x \cdot Ax + a \cdot x + \alpha \\ Q = \frac{1}{2} x \cdot Bx + b \cdot x + \beta \end{cases}$$

con A, B matrici simmetriche non nulle

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \neq 0$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} \neq 0$$

$a = (a_1, a_2)^T$, $b = (b_1, b_2)^T$,

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Determinare le cond. su A, B, a, b, α, β per cui ψ definisca una trasformazione canonica univalente.

Dire se esistono trasformazioni canoniche con A, B non degeneri.

Soluzione

Imponiamo la condizione

$$\{Q, P\} = 1$$

Notiamo fin da subito che la traslazione

$$P = p + \alpha$$

$$Q = q + \beta$$

è canonica e cambia $H(p,q,t)$ in $K(P,Q,t) =$

$H(P-\alpha, Q-\beta, t)$.

Scriviamo esplicitamente la trasformazione

$$P = \frac{1}{2} (p \;\; q) \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} A_{11} p + A_{12} q \\ A_{12} p + A_{22} q \end{pmatrix}} + a_1 p + a_2 q + \alpha$$

$$= \frac{1}{2} \left(A_{11} p^2 + A_{12} pq + A_{12} pq + A_{22} q^2 \right)$$

$$+ a_1 p + a_2 q + \alpha$$

$$P = \frac{1}{2} A_{11} p^2 + \frac{1}{2} A_{22} q^2 + A_{12} pq + a_1 p + a_2 q + \alpha$$

$$Q = \frac{1}{2} B_{11} p^2 + \frac{1}{2} B_{22} q^2 + B_{12} pq + b_1 p + b_2 q + \beta$$

$$\{Q, P\} = 1 \longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = B_{22} q + B_{12} p + b_2$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = A_{11} p + A_{12} q + a_1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = B_{11} p + B_{12} q + b_1$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = A_{22} q + A_{12} p + a_2$$

$$(B_{22} q + B_{12} p + b_2)(A_{11} p + A_{12} q + a_1) -$$

$$(B_{11} p + B_{12} q + b_1)(A_{22} q + A_{12} p + a_2) = 1$$

coefficiente di p^2

1 $A_{11} B_{12} - B_{11} A_{12}$

coefficiente di q^2

2 $B_{22} A_{12} - B_{12} A_{22}$

coefficiente di pq

$$B_{22}A_{11} + \cancel{B_{12}A_{12}} - B_{11}A_{22} - \cancel{B_{12}A_{12}} =$$

3 $B_{22}A_{11} - B_{11}A_{22}$

coefficiente di p

4 $a_1 B_{12} + b_2 A_{11} - a_2 B_{11} - b_1 A_{12}$

coefficiente di q

5 $a_1 B_{22} + b_2 A_{12} - a_2 B_{12} - b_1 A_{22}$

6 $a_1 b_2 - b_1 a_2$

Una prima condizione necessaria è che

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = 1$$

Suggerimento: mostrare che A è necessariamente un multiplo di B

Ciascuno dei coefficienti 1 2 3 4 5 deve essere posto uguale a zero. Consideriamo 1 2 3 :

$$\begin{cases} A_{11}B_{12} - B_{11}A_{12} = 0 & \text{1} = 0 \\ B_{22}A_{12} - B_{12}A_{22} = 0 & \text{2} = 0 \\ B_{22}A_{11} - B_{11}A_{22} = 0 & \text{3} = 0 \end{cases}$$

e introduciamo $\tilde{A} = (A_{11}, A_{12}, A_{22})$

$\tilde{B} = (B_{11}, B_{12}, B_{22})$,

notando che

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = (A_{12} B_{22} - B_{12} A_{22}, \; A_{22} B_{11} - A_{11} B_{22}, \; A_{11} B_{12} - A_{12} B_{11}) = (2, -3, 1).$$

Allora imporre il sistema equivale ad imporre

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = 0,$$

cioè $\tilde{A} \parallel \tilde{B}$,

quindi possiamo scrivere $\tilde{A} = \lambda \tilde{B}$, $\lambda \neq 0$, da cui

deve essere $A = \lambda B$.

Ora consideriamo i coefficienti 4, 5 e scriviamo

$$\begin{cases} a_1 B_{12} + b_2 \lambda B_{11} - a_2 B_{11} - b_1 \lambda B_{12} = 0 \\ a_1 B_{22} + b_2 \lambda B_{12} - a_2 B_{12} - b_1 \lambda B_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda (b_2 B_{11} - b_1 B_{12}) = a_2 B_{11} - a_1 B_{12} & 1) \\ \lambda (b_2 B_{12} - b_1 B_{22}) = a_2 B_{12} - a_1 B_{22} & 2) \end{cases}$$

Si presentano 3 casi

1) $b_2 B_{11} - b_1 B_{12} = 0$

$a_2 B_{11} - a_1 B_{12} = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ a_2 & -a_1 \end{bmatrix}} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

il determinante è $-a_1 b_2 + a_2 b_1 = -1 \neq 0$

$\rightarrow B_{11} = B_{12} = 0$

sostituendo $B_{11} = B_{12} = 0$ in 2) si ha

$$-\lambda b_1 B_{22} = -a_1 B_{22}$$

e dividendo per B_{22} (che vogliamo $\neq 0$, altrimenti $B = 0$)

$$\lambda b_1 = a_1 \qquad \lambda = \frac{a_1}{b_1}$$

$b_1 \neq 0$ (se $b_1 = 0$ anche $a_1 = 0$ e la condizione $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 1$ non può essere soddisfatta)

Riassumendo, le condizioni trovate sono

$$B_{11} = B_{12} = 0 \, , \quad \lambda = \frac{a_1}{b_1} \qquad (B_{22} \neq 0 \, , \ b_1 \neq 0)$$

2) $b_2 B_{12} - b_1 B_{22} = 0$

$a_2 B_{12} - a_1 B_{22} = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ a_2 & -a_1 \end{bmatrix}}\begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

il determinante è $-a_1 b_2 + a_2 b_1 = -1 \neq 0$

$\rightarrow \; B_{22} = B_{12} = 0$

sostituendo $B_{22} = B_{12} = 0$ in 1) si ha

$$\lambda b_2 B_{11} = a_2 B_{11}$$

e dividendo per B_{11} (che vogliamo $\neq 0$, altrimenti $B = 0$)

$$\lambda b_2 = a_2 \qquad \lambda = \frac{a_2}{b_2}$$

$b_2 \neq 0$ (se $b_2 = 0$ anche $a_2 = 0$ e la condizione $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 1$ non può essere soddisfatta)

Riassumendo, le condizioni trovate sono

$$B_{22} = B_{12} = 0 \,, \quad \lambda = \frac{a_2}{b_2} \quad (B_{11} \neq 0,\; b_2 \neq 0)$$

NOTA: In 1) e 2) (vedi sopra) potremmo anche considerare il caso in cui

$$(b_2 B_{11} - b_1 B_{12}) = (b_2 B_{12} - b_1 B_{22}) = 0$$

$$(a_2 B_{11} - a_1 B_{12}) = (a_2 B_{12} - a_1 B_{22}) = 0$$

ma si può vedere che, in quanto deve valere $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$, questi quattro termini non possono essere tutti nulli.

3) Da 1) ricaviamo

$$\lambda = \frac{a_2 B_{11} - a_1 B_{12}}{b_2 B_{11} - b_1 B_{12}} \qquad (b_2 B_{11} - b_1 B_{12} \neq 0)$$

e sostituendo in 2) si ha

$$\frac{a_2 B_{11} - a_1 B_{12}}{b_2 B_{11} - b_1 B_{12}} = \frac{a_2 B_{12} - a_1 B_{22}}{b_2 B_{12} - b_1 B_{22}}$$

$$(b_2 B_{12} - b_1 B_{22} \neq 0)$$

da cui

$$(a_2 B_{11} - a_1 B_{12})(b_2 B_{12} - b_1 B_{22}) =$$

$$(b_2 B_{11} - b_1 B_{12})(a_2 B_{12} - a_1 B_{22})$$

$$\cancel{a_2 b_2 B_{11}} B_{12} - a_2 b_1 B_{11} B_{22} - a_1 b_2 B_{12}^2 + a_1 \cancel{b_1 B_{12}} B_{22} =$$

$$\cancel{a_2 b_2 B_{11}} B_{12} - a_1 b_2 B_{11} B_{22} - b_1 a_2 B_{12}^2 + \cancel{a_1 b_1} B_{12} B_{22}$$

$$- a_2 b_1 (B_{11} B_{22} - B_{12}^2) + a_1 b_2 (B_{11} B_{22} - B_{12}^2) = 0$$

$$\underbrace{(B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}_{\substack{\parallel \\ \det B}} \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{\substack{\parallel \\ 1}} = 0$$

allora deve essere $\det B = 0$

$$\lambda = \frac{a_2 B_{11} - a_1 B_{12}}{b_2 B_{11} - b_1 B_{12}} = \frac{a_2 B_{12} - a_1 B_{22}}{b_2 B_{12} - b_1 B_{22}}$$

La risposta in definitiva è:

Non esistono trasformazioni canoniche con A, B non degeneri, infatti si presentano questi tre casi:

1) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$ $\quad B_{22} \neq 0$

$$A = \lambda B = \frac{a_1}{b_1} B \qquad b_1 \neq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_1 B_{22} / b_1 \end{bmatrix}$$

2) $$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{11} \neq 0$$

$$A = \lambda B = \frac{a_2}{b_2} B \qquad b_2 \neq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_2 B_{11} / b_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) $A = \lambda B$, $\det A = \det B = 0$,

$$\lambda = \frac{a_2 B_{11} - a_1 B_{12}}{b_2 B_{11} - b_1 B_{12}} = \frac{a_2 B_{12} - a_1 B_{22}}{b_2 B_{12} - b_1 B_{22}}$$

$$b_2 B_{11} - b_1 B_{12} \neq 0$$

$$b_2 B_{12} - b_1 B_{22} \neq 0$$

Alle condizioni in 1), 2), 3) va aggiunta la condizione

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1 .$$

Infine, α e β possono essere qualsiasi.