Esercizio (12 febbraio 2016)

Si consideri un punto materiale di massa m che si sposta sulla superficie

$$\begin{cases} x = r(z)\cos\phi \\ y = r(z)\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z = z \end{cases}$$

con $z \in \mathbb{R}$, $\phi \in S^1$, $r(z) = e^{-\frac{1}{2}(z^4 - 2z^2 - 3)}$.

Sul punto agisce una forza attiva di energia potenziale

$$V(z) = \frac{k}{2}(2z^2 - z^4), \quad k > 0.$$

i) Discutere l'esistenza di traiettorie circolari al variare di k, m e delle c. i. $(z_0, \phi_0, \dot{z}_0, \dot{\phi}_0)$.

Sol. i)

$$\begin{cases} \dot{x} = r'(z)\dot{z}\cos\phi - r(z)\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi \\ \dot{y} = r'(z)\dot{z}\,\mathrm{sen}\,\phi + r(z)\dot{\phi}\cos\phi \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$$T(z, \dot{z}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\left[(1 + (r'(z))^2)\dot{z}^2 + r^2(z)\dot{\phi}^2\right]$$

$$V(z) = \frac{k}{2}(2z^2 - z^4)$$

inoltre

$$r'(z) = r(z)\left(-\frac{1}{2}\right)(4z^3 - 4z) =$$

$$-r(z)\,2z\,(z^2-1)$$

$$L = T - V$$

ϕ è una variabile ciclica

$$p_\phi = m\,r^2(z)\,\dot\phi\,, \qquad p_\phi = c$$

$$\dot\phi = \frac{c}{m\,r^2(z)}$$

$$L_R^{(c)} = \left(\tilde L_0 - \tilde L_2\right)\Big|_{\dot\phi = c/(m r^2(z))}$$

$$L_R^{(c)} = \frac{1}{2}m\left[1 + (r'(z))^2\right]\dot z^2 - \frac{k}{2}\left(2z^2 - z^4\right)$$

$$-\frac{1}{2}\cancel{m}\,\cancel{r^2}(z)\,\frac{c^2}{m^{\cancel{2}}\,r^{\cancel{4}}_{\;2}(z)}$$

$$L_R^{(c)} = \frac{1}{2}m\left[1 + (r'(z))^2\right]\dot z^2 - V_{eff}^{(c)}(z)$$

$$V_{eff}^{(c)}(z) = k\left(z^2 - \frac{z^4}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{m\,r^2(z)}$$

$$= k\left(z^2 - \frac{z^4}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{m}\,e^{z^4 - 2z^2 - 3}$$

Per agevolare i conti introduciamo

$$u = z^4 - 2z^2$$

$$W(u(z)) = V_{eff}^{c}(z)$$

$$W(u) = -\frac{k}{2}u + \frac{c^2}{2m}e^{u-3}$$

$$W'(u) = -\frac{k}{2} + \frac{c^2}{2m}e^{u-3} = 0$$

$$e^{u-3} = \frac{km}{c^2}$$

$$\bar{u} = 3 + \log\frac{km}{c^2}$$

quindi

$$\frac{d V_{eff}^{(c)}(z)}{dz} = W'(z^4 - 2z^2)(4z^3 - 4z) = 0$$

troviamo subito

$$z_1 = 0 \;, \quad z_{2,3} = \pm 1$$

inoltre

$$W'(z^4 - 2z^2) = 0 \longrightarrow z^4 - 2z^2 - \bar{u} = 0$$

$$t = z^2$$

$$t^2 - 2t - \bar{u} = 0$$

$$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \bar{u}}$$

Si presentano tre casi

① $\bar{u} \leqslant -1$

$$z_1 = 0$$

$$z_{2,3} = \pm 1$$

② $\bar{u} \geqslant 0$

$$t_1 = 1 + \sqrt{1 + \bar{u}}$$

$$z_1 = 0$$

$$z_{2,3} = \pm 1$$

$$z_{4,5} = \pm\sqrt{1 + \sqrt{1 + \bar{u}}}$$

③ $-1 < \bar{u} < 0$

$$z_1 = 0 \qquad z_{2,3} = \pm 1$$

$$z_{4,5} = \pm\sqrt{1 + \sqrt{1 + \bar{u}}}$$

$$z_{6,7} = \pm\sqrt{1 - \sqrt{1 + \bar{u}}}$$

ii) Date c.i. tali che $r^4(z_0)\,\dot{\phi}_0^2 = \dfrac{k}{m e^5}$,

studiare la stabilità delle traiettorie circolari

Sol. ii)

Una traiettoria circolare è stabile quando lo è il corrispondente punto $(z,\dot{z})$ nel piano delle fasi ridotto.

Un punto $x = (z,\dot{z})$ è stabile se per ogni intorno U di x esiste un intorno $V \subset U$ tale che le orbite che partono da punti interni a V rimangono in U per tutti i tempi.

$$\bar{u} = 3 + \log (km / c^2)$$

$$c = mr^2 \dot{\phi}\ , \quad c^2 = m^2 r^4 \dot{\phi}^2$$

$$c^2 = m^2 \frac{k}{m e^5} = \frac{km}{e^5}$$

$\bar{u} = 8 \longrightarrow$ siamo nel caso 2

$$z_1 = 0\ , \quad z_{2,3} = \pm 1\ , \quad z_{4,5} = \pm 2$$

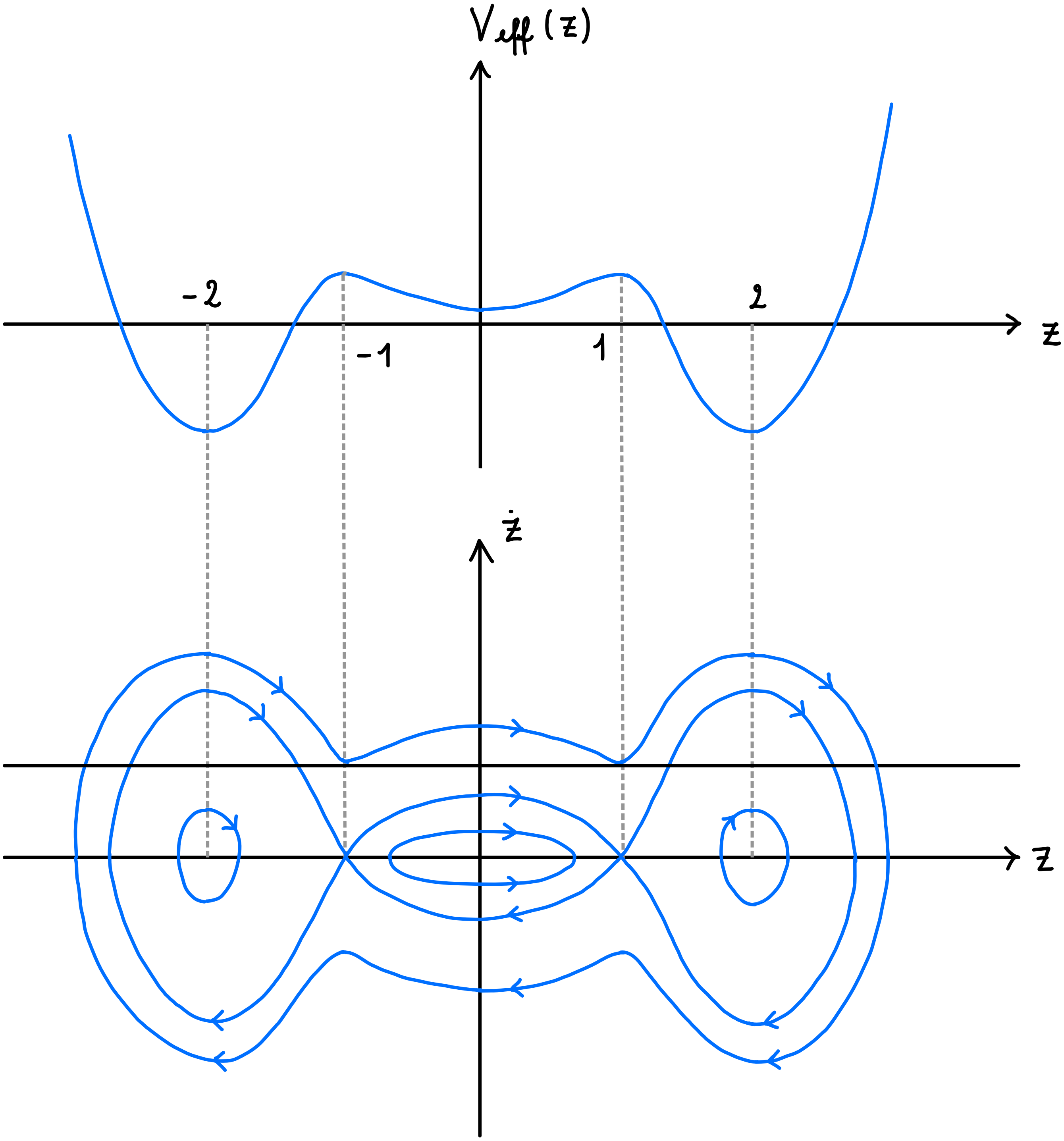
$$V_{eff}(z) = -\frac{k}{2}(z^4 - 2z^2) + \frac{k}{2} e^{z^4 - 2z^2 - 8}$$

$$V_{eff}(0) = \frac{k}{2e^8}$$

$$V_{eff}(\pm 1) = \frac{k}{2}\left(1 + \frac{1}{e^9}\right)$$

$$V_{eff}(\pm 2) = -\frac{k}{2}(16-8) + \frac{k}{2}e^{0}$$

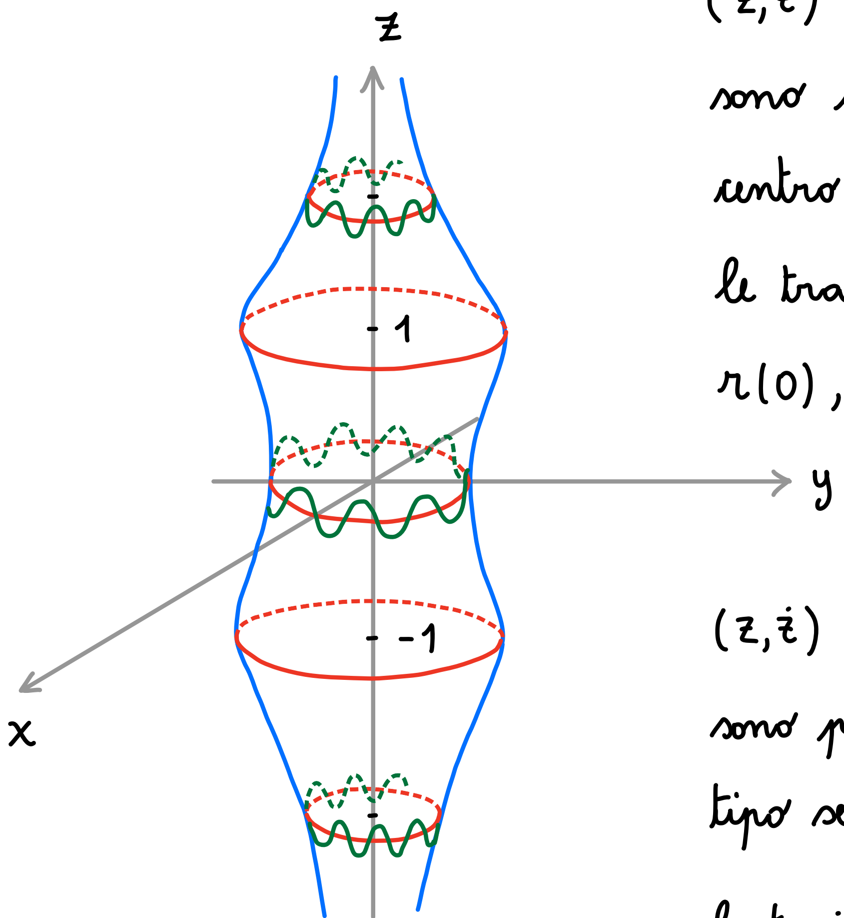
$$= -4k + \frac{k}{2} = -\frac{7}{2}k$$



$$r(z) = e^{-\frac{1}{2}(z^4 - 2z^2 - 3)}$$

$$r'(z) = r(z)\left(-\frac{1}{2}\right)(4z^3 - 4z) = 0$$

$$z = 0\,, \quad z = \pm 1$$



$(z,\dot{z}) = (0,0), (\pm 2, 0)$

sono punti di equilibrio di tipo centro

le traiettorie circolari di raggi $r(0)$, $r(2)$, $r(-2)$ sono stabili

$(z,\dot{z}) = (\pm 1, 0)$

sono punti di equilibrio di tipo sella

le traiettorie circolari di raggi $r(1)$, $r(-1)$ sono instabili

Esercizio (14 giugno 2016)

Consideriamo il funzionale di azione lagrangiana

$$\mathcal{J}_L(\gamma) = \int_1^2 \left[t\dot{\gamma}^2 + \gamma(1-\dot{\gamma}) \right] dt$$

i) Mostrare che $\gamma(t)$ soluzione dell'equazione di Eulero - Lagrange per $\mathcal{J}_L$ con $\dot\gamma(1) = 0$ soddisfa la relazione $\dot\gamma(t) < \frac{1}{2}$, $\forall t \in [1,2]$.

Sol. i)

$$L(\gamma,\dot\gamma,t) = t\dot\gamma^2 + \gamma(1-\dot\gamma)$$

$$L_{\dot\gamma} = 2t\dot\gamma - \gamma$$

$$\frac{dL_{\dot\gamma}}{dt} = 2\dot\gamma + 2t\ddot\gamma - \dot\gamma = 2t\ddot\gamma + \dot\gamma$$

$$L_\gamma = 1 - \dot\gamma$$

$$\frac{dL_{\dot\gamma}}{dt} - L_\gamma = 0$$

$$2t\ddot\gamma + \dot\gamma - 1 + \dot\gamma = 0$$

$$2t\ddot\gamma + 2\dot\gamma - 1 = 0$$

poniamo $u = \dot\gamma$

$$2t\dot u + 2u - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \dot u = \dfrac{1-2u}{2t} \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ possiamo determinare direttamente $u(t)$ (vedere più avanti), oppure consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{1}{2}(1-2v) \\ v(1) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{v} = -v + \frac{1}{2}$$

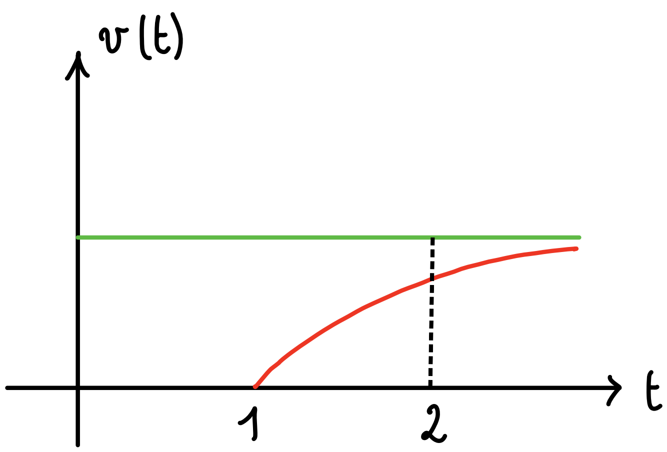
$$v(t) = a\,e^{-t} + \frac{1}{2}$$

$$v(1) = \frac{a}{e} + \frac{1}{2} = 0, \qquad a = -\frac{e}{2}$$

$$v(t) = -\frac{1}{2}e^{1-t} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{1-t}\right)$$

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \frac{1}{2}, \qquad \dot{v}(t) = \frac{1}{2}e^{1-t} > 0$$

$$v(t) < \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad t \in [1, 2]$$



Inoltre notiamo che

$$u(1) = 0 \qquad (v(1) = 0)$$

$$\dot{u}(t) = \frac{1 - 2u(t)}{2t}, \qquad \dot{u}(1) = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\dot{v}(t) = \frac{1 - 2v(t)}{2}, \qquad \dot{v}(1) = \frac{1}{2}$$

poi

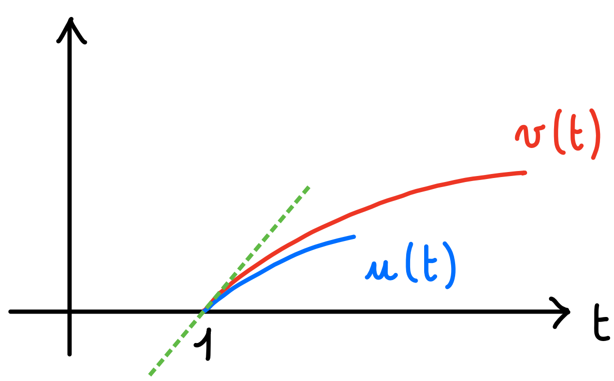
$$\ddot{u}(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2\dot{u}(t)t - (1 - 2u(t))}{t^2}\right)$$

$$\ddot{u}(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2/2 - 1}{1}\right) = -1$$

$$\ddot{v}(t) = -\dot{v}(t)$$

$$\ddot{v}(1) = -\dot{v}(1) = -\frac{1}{2}$$

Segue che esiste $1 < \tau < 2$ t.c. per $t \in (1, \tau]$ si ha $u(t) < v(t)$



Assumiamo che esista

$$\bar{t} = \min\{1 < t \leq 2 \mid u(t) = v(t)\}$$

allora, se $\bar{w} \equiv u(\bar{t})$, si ha

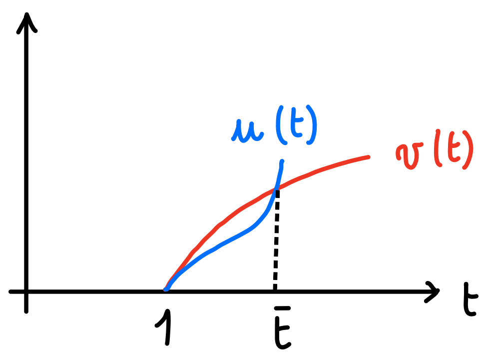
$$\dot{u}(\bar{t}) = \frac{1 - 2\bar{w}}{2\bar{t}}$$

$$\dot{v}(\bar{t}) = \frac{1 - 2\bar{w}}{2}$$

notando che $1 - 2\bar{w} > 0$ e $1/\bar{t} < 1$ si ottiene

$$\dot{u}(\bar{t}) < \dot{v}(\bar{t})$$

che non è possibile (si veda la figura a destra).



Segue che per $t \in (1, 2]$

$$u(t) < v(t)$$

e dato che $v(t) < \frac{1}{2}$ si è dimostrato che

$$\gamma(t) < \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad t \in [1, 2].$$

Si poteva rispondere più velocemente come segue.

Ripartiamo da

$$\dot{u} = \frac{1-2u}{2t}, \quad \text{con} \quad u(1) = 0$$

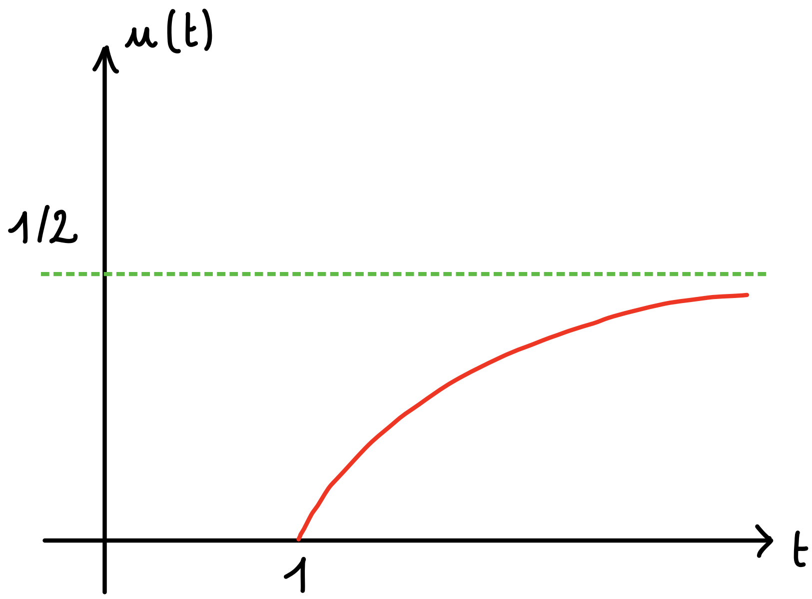
$$\frac{du}{dt} = \frac{1-2u}{2t} \longrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{2\,du}{1-2u}$$

$$\log t = -\log(1-2u) + \log(1-2u(1))$$

$$\log t = -\log(1-2u) = \log \frac{1}{1-2u}$$

$$t = \frac{1}{1-2u}, \qquad 1-2u = \frac{1}{t}$$

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$



$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \frac{1}{2}$$

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2t^2} > 0$$

$$u(t) < \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad t \in [1,2].$$

ii) Mostrare che $\bar{\gamma}$, soluzione delle equazioni di E.-L. con c.i.

$$\bar{\gamma}(1) = \frac{1}{2}, \quad \dot{\bar{\gamma}}(1) = 0$$

è un minimo debole per J_L.

Sol. ii)

Partiamo da

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

Abbiamo

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\log t + c$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c \longrightarrow c = 0$$

$$\bar{\gamma}(t) = \frac{1}{2}(t - \log t)$$

Scriviamo l'equazione di Jacobi

$$-\frac{d(a(t)\dot{\eta})}{dt} + (c(t) - \dot{b}(t))\eta = 0$$

$$a(t) = \frac{1}{2}L_{\dot{\gamma}\dot{\gamma}}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t), t) = \frac{1}{2}(2t) = t \quad (>0 \text{ per } t \in [1,2])$$

$$b(t) = \frac{1}{2} L_{\dot{\gamma}\gamma}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t), t) = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$c(t) = \frac{1}{2} L_{\gamma\gamma}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t), t) = 0$$

$$-\frac{d(t\dot{\eta})}{dt} = 0$$

$$-\dot{\eta} - t\ddot{\eta} = 0 \qquad \begin{cases} t\ddot{\eta} + \dot{\eta} = 0 \\ \dot{\eta}(1) = 1 \\ \eta(1) = 0 \end{cases}$$

poniamo $y = \dot{\eta}$

$$t\dot{y} + y = 0 \qquad \begin{cases} \dot{y} = -\frac{1}{t} y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Si può trovare direttamente $y(t)$ (si veda più avanti), oppure consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\xi \\ \xi(1) = 1 \end{cases}$$

Notiamo che nell'intervallo $t \in [1,2]$ vale

$$-\frac{1}{t} \geqslant -1$$

da cui $\dot{y}(t) \geqslant -y(t)$; allora poichè $\dot{\xi}(t) = -\xi(t)$

possiamo dire che $y(t) \geq \xi(t)$ per $t \in [1,2]$

Inoltre

$$\xi(t) = a e^{-t}, \quad \xi(1) = 1 = \frac{a}{e}, \quad a = e$$

$$\xi(t) = e^{1-t} > 0$$

Si conclude che $y(t) \geq \xi(t) > 0$ per $t \in [1,2]$.

Allora $\eta(t)$ è una funzione monotona crescente (almeno nell'intervallo di interesse) e non ci sono valori coniugati a $t = 1$ lungo $\bar{\gamma}(t)$.

Si poteva trovare direttamente $\eta(t)$:

$$\begin{cases} t\ddot{\eta} + \dot{\eta} = 0 \\ \eta(1) = 0 \\ \dot{\eta}(1) = 1 \end{cases}$$

$$t\ddot{\eta} + \dot{\eta} = 0 \longrightarrow \frac{d(t\dot{\eta})}{dt} = 0$$

$$t\dot{\eta} = c, \quad \dot{\eta} = \frac{c}{t}, \quad \dot{\eta}(1) = 1, \quad c = 1$$

$$\eta(t) = \log t \longrightarrow$$

$\eta(t) > 0$ per $t \in (1,2]$.

Esercizio

Consideriamo la lagrangiana

$$L(q,\dot q) = \frac{1}{2}(\dot q^2 + q^2 - q), \quad q,\dot q \in \mathbb{R}.$$

i) Trovare la soluzione $t \to \bar\gamma(t)$ dell'equazione di Eulero Lagrange per L con c.i.

$$\bar\gamma(0) = 1, \quad \dot{\bar\gamma}(0) = 0.$$

Sol. i)

$$L_{\dot q} = \dot q, \quad L_q = q - \frac{1}{2}$$

$$\frac{dL_{\dot q}}{dt} = \ddot q$$

$$\ddot q = q - \frac{1}{2}$$

$$q(t) = a e^t + b e^{-t} + \frac{1}{2}$$

$$q(0) = 1, \quad \dot q(0) = 0$$

$$a + b + \frac{1}{2} = 1 \longrightarrow a + b = \frac{1}{2}$$

$$a - b = 0 \longrightarrow a = b$$

$$a = b = \frac{1}{4}$$

$$q(t) = \frac{1}{2}\cosh t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cosh t)$$

$$\bar{\gamma}(t) = \frac{1}{2}(1 + \cosh t).$$

ii) Mostrare che $\forall\, T > 0$, $\bar{\gamma}$ è un minimo debole di

$$A(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt$$

nella classe di funzioni $C^1([0,T], \mathbb{R})$.

Sol. ii)

$$a(t) = \frac{1}{2} L_{\dot{q}\dot{q}}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t)) = \frac{1}{2} > 0$$

$$b(t) = \frac{1}{2} L_{\dot{q}q}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t)) = 0$$

$$c(t) = \frac{1}{2} L_{qq}(\bar{\gamma}(t), \dot{\bar{\gamma}}(t)) = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\eta = 0$$

$$\ddot{\eta} = \eta$$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \ddot{\eta} = \eta \\ \eta(0) = 0 \\ \dot{\eta}(0) = 1 \end{cases}$$

$$\eta(t) = a e^{t} + b e^{-t}$$

$$a + b = 0, \qquad a = -b$$

$$a - b = 1, \qquad b = -\frac{1}{2}$$

$$\eta(t) = \operatorname{senh} t .$$

Perciò per $t \in (0, T]$ si ha $a(t) > 0$ e

$\eta(t) > 0$, $\forall T > 0$

iii) Fissiamo $T > 0$, calcolare la slope function del campo di estremali $\{\gamma_\alpha(t)\}_\alpha$ definito in $\{(t, \alpha) : t \in (0, T), \alpha \in \mathbb{R}\}$ dalle soluzioni dell'eq. di E.-L. per L con c.i.

$$\gamma_\alpha(0) = 1, \quad \dot{\gamma}_\alpha(0) = \alpha .$$

Sol. iii)

$$q(t) = a e^{t} + b e^{-t} + \frac{1}{2}$$

$$q(0) = a + b + \frac{1}{2} = 1$$

$$a - b = \alpha , \qquad a = b + \alpha$$

$$2b + \alpha = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right), \qquad a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)$$

$$\gamma(t,\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)e^{t} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)e^{-t} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cosh t) + \alpha \,\mathrm{senh}\, t$$

Scriviamo

$$q = \frac{1}{2}(1 + \cosh t) + \alpha \,\mathrm{senh}\, t := \gamma(t,\alpha)$$

allora

$$\alpha = a(t,q) = \frac{1}{\mathrm{senh}\, t}\left[q - \frac{1}{2}(1 + \cosh t)\right]$$

$$p(t,q) = \gamma_t(t, a(t,q)) =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{senh}\, t + \frac{\cosh t}{\mathrm{senh}\, t}\left[q - \frac{1}{2}(1 + \cosh t)\right]$$

$$p(t,q) = \frac{1}{2}\mathrm{senh}\, t + \coth t\left[q - \frac{1}{2}(1 + \cosh t)\right].$$

iv) Scrivere le equazioni di Carathéodory e calcolare la funzione iconale $S(q,t)$.

Sol. iv)

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} S_q = \overline{L_{\dot q}} \\ S_t = \overline{L} - P\,\overline{L_{\dot q}} \end{cases}$$

dove

$$\overline{L} = L(q, P(t,q), t)$$

$$L = \frac{1}{2}(\dot q^2 + q^2 - q)$$

$$\overline{L} = \frac{1}{2}(P^2 + q^2 - q)$$

$$\overline{L_{\dot q}} = P.$$

Si ha

$$S_q = \frac{1}{2}\operatorname{senh} t + \coth t \left[q - \frac{1}{2}(1 + \cosh t) \right].$$

Poniamo per comodità

$$s = \operatorname{senh} t$$

$$c = \cosh t$$

$$S_q = \frac{1}{2}s + \coth t \left[q - \frac{1}{2}(1+c)\right]$$

$$S_t = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q - p^2$$

$$= -\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q .$$

Integriamo l'espressione di S_q rispetto a q

$$S(q,t) = \frac{1}{2}qs + \coth t \left[\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q(1+c)\right] + f(t)$$

$$= \frac{1}{2}q^2 \coth t + \frac{1}{2}q\left[s - (1+c)\coth t\right] + f(t) .$$

Riscriviamo S_t

$$S_t = \frac{1}{2}(q^2 - q) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}s^2 + \coth^2 t \left(q - \frac{1}{2}(1+c)\right)^2 + c\left(q - \frac{1}{2}(1+c)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}q^2(1 - \coth^2 t) - \frac{1}{2}q\left[1 - (1+c)\coth^2 t + c\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}(1+c)^2\coth^2 t - \frac{1}{2}c(1+c)\right]$$

$$1 - \coth^2 t = -\frac{1}{s^2}$$

$$(1+c)(1-\coth^2 t) = -\frac{1+c}{s^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[(1+c)(c-1) + \frac{1}{4}(1+c)^2\coth^2 t - \frac{1}{2}c(1+c)\right]$$

$$= \frac{1}{4}(1+c)\left[c-1+(1+c)\coth^2 t - 2c\right]$$

$$= \frac{1}{4}(1+c)^2(\coth^2 t - 1) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+c}{s}\right)^2$$

$$S_t = -\frac{1}{2s^2}q^2 + \frac{1}{2}q\left(\frac{1+c}{s^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1+c}{s}\right)^2.$$

Deriviamo $S(q,t)$ scritta sopra rispetto al tempo, si ha

$$S_t(q,t) = -\frac{1}{2s^2}q^2 + \frac{1}{2}q\left[c + \frac{1}{s^2}(1+c) - c\right] + f'(t)$$

$$= -\frac{1}{2s^2}(q^2 - q - qc) + f'(t)$$

Confrontando con si ottiene

$$f(t) = \int -\frac{1}{8}\left(\frac{1+c}{s}\right)^2 dt$$

Consideriamo $\int\left(\frac{1+c}{s}\right)^2 dt$;

notiamo che $\frac{d}{dt}\left(\frac{1+c}{s}\right) = -\frac{1+c}{s^2}$

Allora

$$\int \left(\frac{1+c}{s}\right)^2 dt = \int \left(-\frac{1+c}{s^2}\right)(-(1+c))\, dt$$

$$= -\frac{(1+c)^2}{s^2} + \int (1+c)\, dt$$

$$= t - \frac{1+c^2-s^2+2c}{s^2} + \text{cost}$$

e ponendo la costante uguale a 0 si ha

$$f(t) = -\frac{1}{8}\left(t - \frac{2(1+c)}{s}\right)$$

La funzione iconale risulta

$$S(q,t) = \frac{1}{2} q^2 \coth t + \frac{1}{2} q \,[\operatorname{senh} t -$$

$$\coth t\,(1+\cosh t)] - \frac{1}{8} t + \frac{1}{4}\frac{1+\cosh t}{\operatorname{senh} t}$$