Esercizio

Consideriamo l'hamiltoniana

$$H(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(I_1^2 + I_2^2) -$$

$$\varepsilon\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

dove $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$

i) Completare le relazioni

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$$

ad una trasformazione canonica

$$(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2) \longrightarrow (J_1, J_2, \psi_1, \psi_2)$$

e scrivere il sistema hamiltoniano nelle nuove variabili

Sol.

$$\dot{I}_1 = \frac{\partial}{\partial \varphi_1}\left[\varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \varepsilon \cos(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

$$= -\varepsilon \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\dot{I}_2 = \varepsilon \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\dot{\varphi}_1 = I_1$$

$$\dot{\varphi}_2 = I_2$$

Cerchiamo una funzione generatrice $S(\varphi, J)$

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T, \quad \mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2)^T$

$$\psi_1 = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{J}_1} = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\psi_2 = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{J}_2} = \varphi_1 - \varphi_2$$

poniamo $S(\varphi, \mathcal{J}) = \mathcal{J}_1(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathcal{J}_2(\varphi_1 - \varphi_2)$

e verifichiamo che $\det \dfrac{\partial^2 S}{\partial \varphi \partial \mathcal{J}} \neq 0$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi \partial \mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi \partial \mathcal{J}} = -2$$

$S(\varphi, \mathcal{J})$ è una buona funzione generatrice

$$I_1 = \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2, \quad I_2 = \frac{\partial S}{\partial \varphi_2} = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \quad \mathcal{J}_2 = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$

Riassumendo, la trasformazione canonica cercata è

$$\begin{cases} \psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \\ \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} J_1 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \\ J_2 = \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \end{cases}$$

Oppure si poteva completare la relazione puntuale

$$\psi = A\varphi, \quad \psi = (\psi_1, \psi_2)^T, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ponendo

$$J = A^{-T} I, \quad I = (I_1, I_2)^T$$

La nuova hamiltoniana diventa

$$\tilde{H}(J_1, J_2, \psi_1, \psi_2) = \frac{1}{2}\left[(J_1 + J_2)^2 + (J_1 - J_2)^2\right]$$

$$-\varepsilon(\cos\psi_2 - \cos\psi_1) =$$

$$J_1^2 + J_2^2 - \varepsilon(\cos\psi_2 - \cos\psi_1)$$

Il corrispondente sistema hamiltoniano diventa

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_1} = \varepsilon \operatorname{sen}\psi_1 \\ \dot{J}_2 = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_2} = -\varepsilon \operatorname{sen}\psi_2 \\ \dot{\psi}_1 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J_1} = 2J_1 \\ \dot{\psi}_1 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J_2} = 2J_2 \end{cases}$$

ii) Per tale sistema trovare due integrali primi indipendenti e in involuzione

Sol.

Notiamo che

$$\tilde{H}(\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\psi_1,\psi_2) = \tilde{H}_1(\mathcal{J}_1,\psi_1) + \tilde{H}_2(\mathcal{J}_2,\psi_2)$$

con

$$\tilde{H}_1 = \mathcal{J}_1^2 + \varepsilon\cos\psi_1$$

$$\tilde{H}_2 = \mathcal{J}_2^2 - \varepsilon\cos\psi_2$$

poichè l'hamiltoniana $\tilde{H}$ è indipendente dal tempo possiamo dire che $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ sono due integrali primi per $X_{\tilde{H}}$; infatti

$$\frac{d\tilde{H}_1}{dt} = 2\mathcal{J}_1\dot{\mathcal{J}}_1 - \varepsilon(\operatorname{sen}\psi_1)\dot{\psi}_1 = 2\mathcal{J}_1\varepsilon\operatorname{sen}\psi_1 - 2\mathcal{J}_1\varepsilon\operatorname{sen}\psi_1 = 0$$

$$\frac{d\tilde{H}_2}{dt} = 2\mathcal{J}_2\dot{\mathcal{J}}_2 + \varepsilon(\operatorname{sen}\psi_2)\dot{\psi}_2 = 2\mathcal{J}_2(-\varepsilon\operatorname{sen}\psi_2) + 2\mathcal{J}_2\varepsilon\operatorname{sen}\psi_2 = 0$$

Questi due integrali sono in involuzione dato che

$$\frac{\partial\tilde{H}_1}{\partial\mathcal{J}_i}\frac{\partial\tilde{H}_2}{\partial\psi_i} = 0, \quad i = 1,2$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \mathcal{J}_i} \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial \psi_i} = 0 , \quad i = 1, 2$$

quindi

$$\{ \tilde{H}_1, \tilde{H}_2 \} = 0$$

Per quanto riguarda la loro indipendenza, calcoliamo

$$\frac{\partial(\tilde{H}_1, \tilde{H}_2)}{\partial(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \psi_1, \psi_2)} = \begin{pmatrix} 2\mathcal{J}_1 & 0 & -\varepsilon \operatorname{sen} \psi_1 & 0 \\ 0 & 2\mathcal{J}_2 & 0 & \varepsilon \operatorname{sen} \psi_2 \end{pmatrix}$$

$\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ sono in generale indipendenti

non lo sono se

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = 0 , \quad \psi_1 = k\pi , \quad \psi_2 = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

cioè in corrispondenza dei punti di equilibrio del sistema hamiltoniano associato ad $\tilde{H}$ e in realtà anche ad H

iii) Mostrare che il sistema hamiltoniano definito da H soddisfa il principio della media per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$, dimostrando che I_1, I_2 non possono variare più di $4\sqrt{2\varepsilon}$

Sol.

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{J}}_1 = \varepsilon \operatorname{sen} \psi_1 \\ \dot{\psi}_1 = 2\mathcal{J}_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\mathcal{J}}_2 = -\varepsilon \operatorname{sen} \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = 2\mathcal{J}_2 \end{cases}$$

dal sistema di sinistra abbiamo

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{\ddot{\psi}_1}{2} \qquad e \qquad \ddot{\psi}_1 = 2\varepsilon \operatorname{sen}\psi_1$$

da quello di destra abbiamo

$$\dot{\zeta}_2 = \frac{\ddot{\psi}_2}{2} \qquad e \qquad \ddot{\psi}_2 = -2\varepsilon \operatorname{sen}\psi_2$$

Riconosciamo le equazioni differenziali di un pendolo di pulsazione $\sqrt{2\varepsilon}$; vogliamo scrivere le due hamiltoniane corrispondenti e tracciare il ritratto di fase nel piano (p_i, ψ_i), $i = 1,2$, con p_i momento associato a ψ_i

Si ha

$$K_1(p_1, \psi_1) = \frac{1}{2} p_1^2 + V_1(\psi_1)$$

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial V_1}{\partial \psi_1} = 2\varepsilon \operatorname{sen}\psi_1, \qquad \dot{p}_1 = \ddot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_1 = p_1 \end{cases}$$

dalla prima equazione troviamo

$$V_1(\psi_1) = 2\varepsilon \cos\psi_1$$

Inoltre

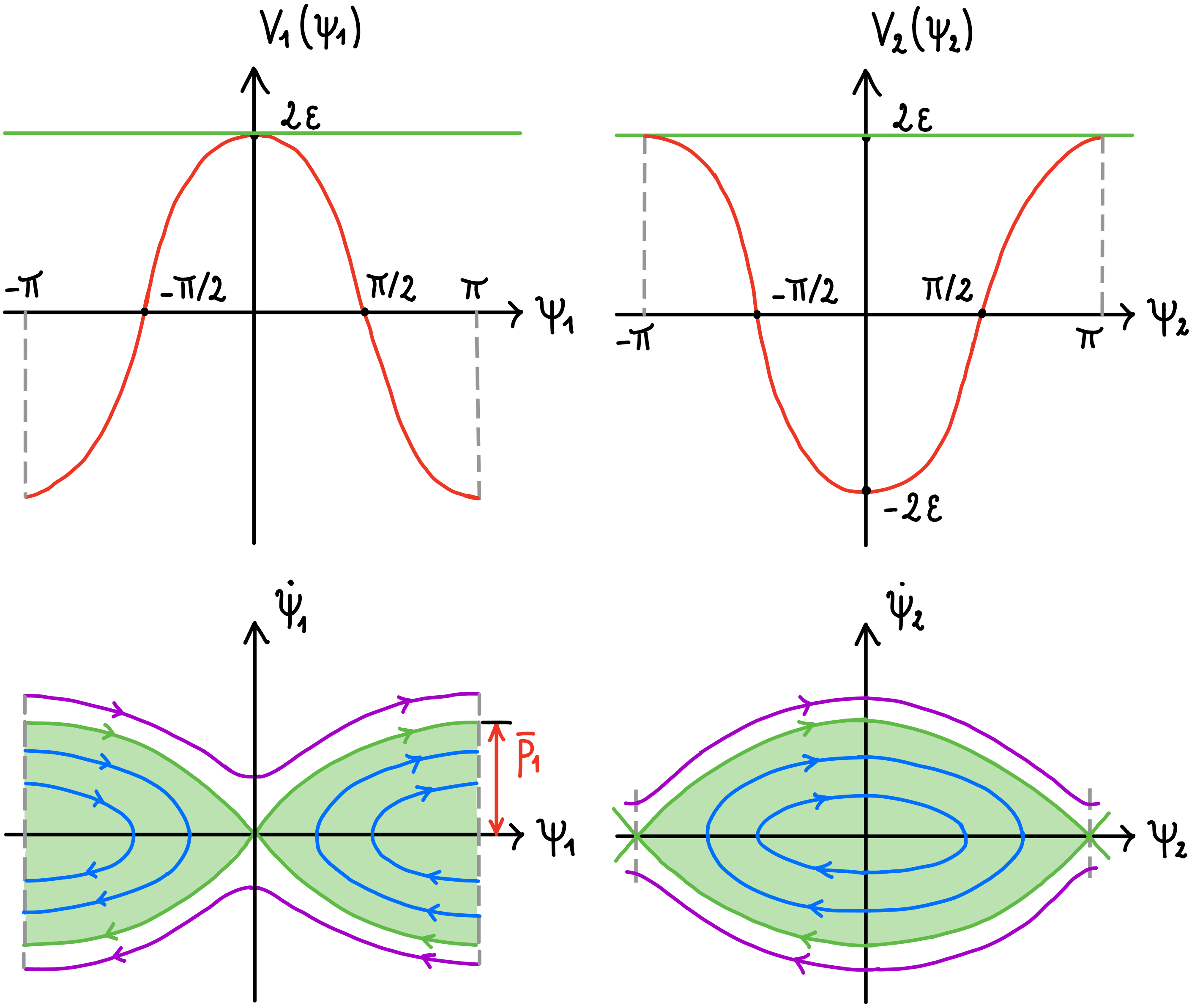
$$K_2(p_2, \psi_2) = \frac{1}{2} p_2^2 + V_2(\psi_2)$$

$$\begin{cases} \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial V_2}{\partial \psi_2} = -2\varepsilon \operatorname{sen}\psi_2, \qquad \dot{p}_2 = \ddot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_2 = p_2 \end{cases}$$

e dalla prima equazione troviamo

$$V_2(\psi_2) = -2\varepsilon \cos\psi_2$$

Disegniamo i grafici di $V_1(\psi_1)$, $V_2(\psi_2)$, grazie ai quali tracciamo i ritratti di fase



Poichè entrambi i sistemi hamiltoniani definiscono la dinamica di un pendolo di pulsazione $\sqrt{2\varepsilon}$, la massima variazione di ψ_1 sarà uguale a quella di ψ_2 sia nella regione delle librazioni sia nella regione delle rotazioni

Consideriamo allora solo $(\psi_1, \dot{\psi}_1)$

Regione delle librazioni

È chiaro che la massima variazione di $\dot{\psi}_1$ è minore di

$$2\,\bar{p}_1$$

dove $\bar{p}_1$ è il massimo valore di $\dot{\psi}_1$ per il livello di energia che corrisponde alla separatrice (si veda la figura precedente), che è dato da

$$K_1^* = V_1(0) = 2\varepsilon\cos(0) = 2\varepsilon$$

$$p_1(\psi_1) = \sqrt{2(K_1 - V_1(\psi_1))} = \sqrt{2(K_1 - 2\varepsilon\cos\psi_1)}$$

$$p_1^*(\psi_1) = \sqrt{2(K_1^* - 2\varepsilon\cos\psi_1)} = \sqrt{4\varepsilon(1-\cos\psi_1)}$$

Si vede che $p_1^*(\psi_1)$ assume il suo valore massimo per $\psi_1 = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; allora

$$\bar{p}_1 = p_1^*(\pi) = \sqrt{4\varepsilon(1-(-1))} = 2\sqrt{2\varepsilon}$$

La massima variazione di $\dot{\psi}_1$ e di $\dot{\psi}_2$ nella regione delle librazioni è minore di $4\sqrt{2\varepsilon}$

Vediamo come $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$ sono legate a J_1, J_2 e poi come queste ultime a I_1, I_2

abbiamo

$$p_1 = \dot\psi_1 = 2\mathcal{J}_1$$

$$p_2 = \dot\psi_2 = 2\mathcal{J}_2$$

da cui si vede che la massima variazione di $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ è minore di $2\sqrt{2\varepsilon}$

Infine, tenendo conto che

$$I_1 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$$

$$I_2 = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2$$

concludiamo quanto segue

$$|I_1(t) - I_1(0)| < 4\sqrt{2\varepsilon}$$

$$|I_2(t) - I_2(0)| < 4\sqrt{2\varepsilon}$$

Regione delle rotazioni

Fissiamo un valore dell'energia maggiore di 2ε

$$K_1^* = 2\varepsilon + \delta, \quad \delta > 0$$

$$p_1^*(\psi_1) = \sqrt{2(K_1^* - V_1(\psi_1))} = \sqrt{2(2\varepsilon + \delta - 2\varepsilon\cos\psi_1)}$$

$$= \sqrt{4\varepsilon(1 - \cos\psi_1) + 2\delta}$$

per δ fissato, il valore massimo assunto da $p_1^*(\psi_1)$ è ottenuto per $\psi_1 = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ed è

$$p_1^*(\pi) = \sqrt{8\varepsilon + 2\delta}$$

mentre il valore minimo di $p_1^*(\psi_1)$ si ha per $\psi_1 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ed è

$$p_1^*(0) = \sqrt{2\delta}$$

Allora per δ fissato la variazione massima di $p_1^*(\psi_1)$ è data da

$$(\Delta p_1^*)_{max} = \sqrt{8\varepsilon + 2\delta} - \sqrt{2\delta}$$

Introduciamo $f(\delta) = \sqrt{8\varepsilon + 2\delta} - \sqrt{2\delta}$ e notiamo che

$$f'(\delta) = \frac{1}{\sqrt{8\varepsilon + 2\delta}} - \frac{1}{\sqrt{2\delta}} < 0 \quad \text{per } \delta \geqslant 0$$

perciò il valore massimo assunto da $f(\delta)$ è

$$f(0) = \sqrt{8\varepsilon} = 2\sqrt{2\varepsilon}$$

La variazione massima di ψ_1 e di ψ_2 nella regione delle rotazioni è minore di $2\sqrt{2\varepsilon}$. Date le relazioni tra ψ_1, ψ_2 e I_1, I_2 si può concludere che

$$|I_1(t) - I_1(0)| < 2\sqrt{2\varepsilon}$$

$$|I_2(t) - I_2(0)| < 2\sqrt{2\varepsilon}$$

Esercizio

Si consideri la seguente funzione di Hamilton espressa in variabili azione - angolo

$$H_\varepsilon(I,\varphi) = \frac{1}{2} I_1^2 - I_2 - \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

con

$$I = (I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{(variabili azione)}$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2 \qquad \text{(variabili angolo)}$$

i) Usare il metodo di Lie per trovare una trasformazione canonica vicina all'identità

$$(I,\varphi) \xrightarrow{\mathcal{C}_\varepsilon^{-1}} (\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

tale che $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon$ non dipenda da $\tilde{\varphi}$ al primo ordine in ε; scrivere inoltre la forma normale non risonante fino al secondo ordine in ε incluso

Sol.

Introduciamo la funzione hamiltoniana generatrice $\chi(I,\varphi)$ e consideriamo il flusso Φ_χ^ε. Si ha

$$\mathcal{C}_\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \Phi_\chi^\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi})$$

Scriviamo H_ε nella forma

$$H_\varepsilon(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(\varphi)$$

con

$$h(I) = \frac{1}{2} I_1^2 - I_2, \quad f(\varphi) = -\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Calcoliamo

$$h \circ \Phi_\chi^\varepsilon = h + \varepsilon \{h,\chi\} + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{h,\chi\},\chi\} + O(\varepsilon^3)$$

$$f \circ \Phi_\chi^\varepsilon = f + \varepsilon \{f, \chi\} + O(\varepsilon^2)$$

$$\tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = H_\varepsilon \circ \Phi_\chi^\varepsilon = h + \varepsilon\left(\{h, \chi\} + f\right)$$

$$+ \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2}\{\{h, \chi\}, \chi\} + \{f, \chi\} \right) + O(\varepsilon^3)$$

Cerchiamo χ in modo che

$$\{h, \chi\}(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) + f(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = g(\tilde{I})$$

$$g(\tilde{I}) = \langle f \rangle_\varphi (\tilde{I})$$

$$\{h, \chi\} = -\frac{\partial h}{\partial I} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = -\omega \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \varphi}$$

con $\omega = \dfrac{\partial h}{\partial I} = (I_1, -1)$

NOTA. Poiché la dipendenza di h dalle azioni non è lineare (caso non isocrono), le frequenze dipendono in generale dalle variabili azione

Si procede ora scrivendo lo sviluppo in serie di Fourier di f, che in questo caso è immediato

$$f(\varphi) = -\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{1}{2}\left(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)}\right)$$

$$f(\varphi) = \sum_{k \in K} \hat{f}_k \, e^{ik \cdot \varphi}$$

Si vede subito che la media sugli angoli di f è nulla, inoltre

$$K = \{(1,-1),(-1,1)\}$$

e i coefficienti $\hat{f}(1,-1)$, $\hat{f}(-1,1)$ sono

$$\hat{f}(1,-1) = -\frac{1}{2}, \quad \hat{f}(-1,1) = -\frac{1}{2}$$

Notiamo che la condizione di non risonanza è in generale soddisfatta

$$\omega \cdot k \neq 0 \quad \text{per } k \in K$$

$$(I_1,-1)\cdot(1,-1) = I_1 + 1 \neq 0$$

$$(I_1,-1)\cdot(-1,1) = -(I_1+1) \neq 0$$

$$I_1 \neq -1$$

Siamo pronti per determinare la funzione χ assumiamo anche per χ uno sviluppo in serie di Fourier

$$\chi(I,\varphi) = \sum_{k\in K} \hat{\chi}_k(I)\, e^{ik\cdot\varphi}$$

in cui

$$\hat{\chi}_k = \frac{\hat{f}_k}{i\,\omega\cdot k}$$

$$\hat{\chi}_{(1,-1)} = \frac{\hat{f}(1,-1)}{i\,(1,-1)\cdot(I_1,-1)} = \frac{\hat{f}(1,-1)}{i\,(I_1+1)} = -\frac{1}{2i\,(1+I_1)}$$

$$\hat{\chi}_{(-1,1)} = \frac{\hat{f}(-1,1)}{i\,(-1,1)\cdot(I_1,-1)} = -\frac{\hat{f}(-1,1)}{i\,(I_1+1)} = \frac{1}{2i\,(1+I_1)}$$

Allora

$$\chi(I,\varphi) = \hat{\chi}_{(1,-1)}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} + \hat{\chi}_{(-1,1)}\, e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$\chi(I,\varphi) = -\frac{1}{2i\,(1+I_1)}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} + \frac{1}{2i\,(1+I_1)}\, e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)} = -\frac{1}{1+I_1}\left(\frac{e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} - e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}}{2i}\right)$$

$$\chi(I,\varphi) = -\frac{\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}{1+I_1}$$

Possiamo scrivere la forma normale non risonante fino al secondo ordine in ε

$$\tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2}\tilde{I}_1^2 - \tilde{I}_2 + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\{\{h,\chi\},\chi\}(\tilde{I},\tilde{\varphi}) + \{f,\chi\}(\tilde{I},\tilde{\varphi})\right) + O(\varepsilon^3)$$

dall'equazione omologica, essendo $g=0$, si ha

$$\{h,\chi\} = -f$$

da cui

$$\frac{1}{2}\{\{h,\chi\},\chi\}(\tilde{I},\tilde{\varphi}) + \{f,\chi\}(\tilde{I},\tilde{\varphi}) =$$

$$\frac{1}{2}\{-f,\chi\}(\tilde{I},\tilde{\varphi}) + \{f,\chi\}(\tilde{I},\tilde{\varphi}) =$$

$$\frac{1}{2}\{f,\chi\}(\tilde{I},\tilde{\varphi})$$

Calcoliamo allora

$$\{f,\chi\} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial I} = \big(\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2),$$

$$-\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)\big)\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}{(1+I_1)^2},\ 0\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2(\varphi_1-\varphi_2)}{(1+I_1)^2} \qquad \big(f = -\cos(\varphi_1-\varphi_2)\big)$$

Infine, la forma normale non risonante è data da

$$\tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2}\tilde{I}_1^2 - \tilde{I}_2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\operatorname{sen}^2(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)}{(1+\tilde{I}_1)^2} + O(\varepsilon^3)$$

la trasformazione canonica vicina all'identità è

$$I_j = \tilde{I}_j + \varepsilon\{I_j,\chi\}(\tilde{I},\tilde{\varphi}) +$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\{\{I_j,\chi\},\chi\}(\tilde{I},\tilde{\varphi}) + O(\varepsilon^3),$$

$j = 1, 2$

$$\{I_j,\chi\} = -\frac{\partial \chi}{\partial \varphi_j}$$

$$\{I_1, \chi\} = -\frac{\partial \chi}{\partial \varphi_1} = \frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{1+I_1}$$

$$\{I_2, \chi\} = -\frac{\partial \chi}{\partial \varphi_2} = -\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{1+I_1}$$

$$\{\{I_1, \chi\}, \chi\} = -\frac{\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}{1+I_1}\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}{(1+I_1)^2}$$

$$+\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{(1+I_1)^2}\left(-\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{(1+I_1)}\right)$$

$$= -\frac{1}{(1+I_1)^3}$$

$$\{\{I_2, \chi\}, \chi\} = \frac{\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}{1+I_1}\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}{(1+I_1)^2}$$

$$-\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{(1+I_1)^2}\left(-\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{(1+I_1)}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+I_1)^3}$$

$$I_1 = \tilde{I}_1 + \varepsilon\,\frac{\cos(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)}{1+\tilde{I}_1} - \frac{\varepsilon^2}{2}\,\frac{1}{(1+\tilde{I}_1)^3} + O(\varepsilon^3)$$

$$I_2 = \tilde{I}_2 - \varepsilon\,\frac{\cos(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)}{1+\tilde{I}_1} + \frac{\varepsilon^2}{2}\,\frac{1}{(1+\tilde{I}_1)^3} + O(\varepsilon^3)$$

passando alle variabili angolo

$$\varphi_j = \tilde{\varphi}_j + \varepsilon\,\{\varphi_j, \chi\}(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) +$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\{\{\varphi_j,\chi\},\chi\}(\tilde{I},\tilde{\varphi}) + O(\varepsilon^3),$$

$j = 1,2$

$$\{\varphi_j,\chi\} = \frac{\partial\chi}{\partial I_j}$$

$$\{\varphi_1,\chi\} = \frac{\partial\chi}{\partial I_1} = \frac{\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}{(1+I_1)^2}$$

$$\{\varphi_2,\chi\} = 0$$

$$\{\{\varphi_1,\chi\},\chi\} = \frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{(1+I_1)^2}\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}{(1+I_1)^2}$$

$$+\frac{2\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}{(1+I_1)^3}\left(-\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{1+I_1}\right)$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}(2(\varphi_1-\varphi_2))}{2(1+I_1)^4}$$

$$\{\{\varphi_2,\chi\},\chi\} = 0$$

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 + \varepsilon\frac{\operatorname{sen}(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2)}{(1+\tilde{I}_1)^2} - \frac{\varepsilon^2}{4}\frac{\operatorname{sen}(2(\tilde{\varphi}_1-\tilde{\varphi}_2))}{(1+\tilde{I}_1)^4} + O(\varepsilon^3)$$

$$\varphi_2 = \tilde{\varphi}_2$$

Vediamo ora come risulta la forma normale non risonante usando il metodo della funzione generatrice.
Partiamo da

$$S(\varphi,\tilde{I}) = \varphi\cdot\tilde{I} + \varepsilon W(\varphi,\tilde{I})$$

con

$$W(\varphi,\tilde{I}) = \frac{\operatorname{sen}(\varphi_1-\varphi_2)}{1+\tilde{I}_1} \quad \left(= -\chi \right)$$

Poi

$$I = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \tilde{I} + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi}(\varphi,\tilde{I})$$

$$\tilde{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{I}} = \varphi + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}}(\varphi,\tilde{I})$$

Allora

$$\tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2}\left(\tilde{I}_1 + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi_1}(\varphi,\tilde{I})\right)^2 - \left(\tilde{I}_2 + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi_2}(\varphi,\tilde{I})\right) - \varepsilon \cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

con $\varphi = \varphi(\tilde{\varphi},\tilde{I})$

$$\tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2}\tilde{I}_1^2 - \tilde{I}_2 + \varepsilon\left(\tilde{I}_1 \frac{\partial W}{\partial \varphi_1}(\varphi,\tilde{I}) - \frac{\partial W}{\partial \varphi_2}(\varphi,\tilde{I}) - \cos(\varphi_1-\varphi_2)\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_1}(\varphi,\tilde{I})\right)^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi_1} = \frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{1+\tilde{I}_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi_2} = -\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{1+\tilde{I}_1}$$

$$\tilde{H}_\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2}\tilde{I}_1^2 - \tilde{I}_2 + \varepsilon\left(\tilde{I}_1 \frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{1+\tilde{I}_1} + \frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{1+\tilde{I}_1} - \cos(\varphi_1-\varphi_2)\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_1}(\varphi,\tilde{I})\right)^2$$

questo termine è uguale a zero

$$\tilde H_\varepsilon(\tilde I, \tilde\varphi) = \frac{1}{2}\tilde I_1^2 - \tilde I_2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\cos^2(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2)}{(1+\tilde I_1)^2} + O(\varepsilon^3)$$

che è diversa da quella trovata con il metodo di Lie

$$\tilde H_\varepsilon(\tilde I, \tilde\varphi) = \frac{1}{2}\tilde I_1^2 - \tilde I_2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{\operatorname{sen}^2(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2)}{(1+\tilde I_1)^2} + O(\varepsilon^3)$$

inoltre abbiamo

$$I_1 = \tilde I_1 + \varepsilon \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1+\tilde I_1}$$

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2) - \operatorname{sen}(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2)\left(-\varepsilon \overbrace{\frac{\partial W}{\partial \tilde I_1}(\tilde\varphi, \tilde I)}^{-\frac{\operatorname{sen}(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2)}{(1+\tilde I_1)^2} \,=}\right) + O(\varepsilon^2)$$

$$I_1 = \tilde I_1 + \varepsilon \frac{\cos(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2)}{1+\tilde I_1} - \varepsilon^2 \frac{\operatorname{sen}^2(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2)}{(1+\tilde I_1)^3} + O(\varepsilon^3)$$

$$I_2 = \tilde I_2 - \varepsilon \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1+\tilde I_1}$$

$$I_2 = \tilde I_2 - \varepsilon \frac{\cos(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2)}{1+\tilde I_1} + \varepsilon^2 \frac{\operatorname{sen}^2(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2)}{(1+\tilde I_1)^3} + O(\varepsilon^3)$$

e per le variabili angolo

$$\tilde\varphi_1 = \varphi_1 - \varepsilon \frac{\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1+\tilde I_1)^2}$$

$$\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) = \operatorname{sen}(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2) + \cos(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2)\left(-\varepsilon \overbrace{\frac{\partial W}{\partial \tilde I_1}(\tilde\varphi, \tilde I)}^{-\frac{\operatorname{sen}(\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2)}{(1+\tilde I_1)^2} \,=}\right) + O(\varepsilon^2)$$

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 + \varepsilon \frac{\operatorname{sen}(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)}{(1+\tilde{I}_1)^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\operatorname{sen}(2(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2))}{(1+\tilde{I}_1)^4} + O(\varepsilon^3)$$

$$\varphi_2 = \tilde{\varphi}_2$$

Notiamo che le relazioni appena scritte per I_1, I_2, φ_1, φ_2 sono uguali a quelle scritte con il metodo di Lie solo al primo ordine in ε

Tali relazioni, al primo ordine in ε, si possono invertire ottenendo

$$\begin{cases} \tilde{I}_1 = I_1 - \varepsilon \dfrac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + I_1} \\[2ex] \tilde{I}_2 = I_2 + \varepsilon \dfrac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{1 + I_1} \\[2ex] \tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 - \varepsilon \dfrac{\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)}{(1 + I_1)^2} \\[2ex] \tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 \end{cases}$$

ii) Mostrare che I_1, I_2 compiono oscillazioni di ampiezza di ordine $\sqrt{\varepsilon}$ attorno a dei valori costanti

Sol.

Partiamo dal sistema hamiltoniano associato ad H_ε

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = -\dfrac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varphi_1} = -\varepsilon \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \dot{I}_2 = -\dfrac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varphi_2} = \varepsilon \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \dot{\varphi}_1 = \dfrac{\partial H_\varepsilon}{\partial I_1} = I_1 \\ \dot{\varphi}_2 = \dfrac{\partial H_\varepsilon}{\partial I_2} = -1 \end{cases}$$

L'idea è quella di ricondurci all'equazione di un oscillatore armonico, magari dopo aver applicato una opportuna trasformazione canonica

Notiamo che

$$J_1 = I_1 + I_2$$

è un integrale primo per X_{H_ε}

Scriviamo una trasformazione che riguardi i soli momenti

$$\begin{cases} J_1 = I_1 + I_2 \\ J_2 = I_2 \end{cases} , \quad \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{=A} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

e la completiamo ad una trasformazione canonica

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = A^{-T} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \varphi_1 \\ \theta_2 = \varphi_2 - \varphi_1 \end{cases}$$

Inoltre abbiamo

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = J_1 - J_2 \\ I_2 = J_2 \end{cases}$$

La nuova hamiltoniana diventa

$$K_\varepsilon (J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}(J_1 - J_2)^2 - J_2 - \varepsilon \cos\theta_2$$

e

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = 0 \\ \dot{J}_2 = -\varepsilon \operatorname{sen}\theta_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\theta}_1 = J_1 - J_2 \\ \dot{\theta}_2 = -(J_1 - J_2) - 1 \\ \quad\; = J_2 - J_1 - 1 \end{cases}$$

si vede che $\dot{J}_2 = \ddot{\theta}_2$ e

$$\ddot{\theta}_2 = -\varepsilon \operatorname{sen}\theta_2$$

che è l'equazione di un pendolo di pulsazione $\sqrt{\varepsilon}$

Sappiamo allora che $\dot{\theta}_2$ compie oscillazioni di ampiezza di ordine $\sqrt{\varepsilon}$

poiché $J_2 = \dot{\theta}_2 + c$, con $c = 1 + J_2$ costante, e

$$I_1 = J_1 - J_2\,, \quad I_2 = J_2$$

si può concludere che I_1, I_2 compiono oscillazioni di ampiezza di ordine $\sqrt{\varepsilon}$ attorno a due valori costanti