## REGOLARIZZAZIONE di LEVI - CIVITA

(tratto da « Linear and Regular Celestial Mechanics », E. L. Stiefel & G. Scheifele)

$Ox_1x_2$ piano fisico

$Ou_1u_2$ piano trasformato

Tullio Levi-Civita (« Sur la résolution qualitative du problème des trois corps », 1906) generalizzò la regolarizzazione $\xi = u^2$, $t' = 4u^2$ al caso piano

Introduciamo

$$x = (x_1, x_2)$$

$$u = (u_1, u_2)$$

e consideriamo la seguente trasformazione

$$\mathbb{R}^2 \ni (u_1, u_2) \longrightarrow (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

data da

$$x_1 + i x_2 = (u_1 + i u_2)^2$$

$$\begin{cases} x_1 = u_1^2 - u_2^2 \\ x_2 = 2u_1u_2 \end{cases}$$

Notiamo che le distanze vengono elevate al quadrato

$$x_1^2 + x_2^2 = (u_1^4 + u_2^4 - 2u_1^2u_2^2) + 4u_1^2u_2^2$$

$$= (u_1^2 + u_2^2)^2$$

$$|x| = |u|^2$$

Gli angoli tra due direzioni passanti per O vengono raddoppiati

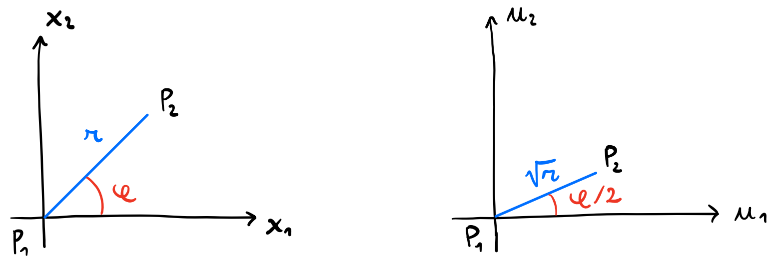
$$\tan\varphi = \frac{x_2}{x_1} = \frac{2u_1u_2}{u_1^2 - u_2^2} = \frac{\cancel{u_1^2}\,(2u_2/u_1)}{\cancel{u_1^2}\,(1 - u_2^2/u_1^2)}$$

$$\tan\alpha = \frac{u_2}{u_1}$$

$$\tan\varphi = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

$$\longrightarrow \quad \alpha = \varphi/2 \,, \qquad \varphi = 2\alpha$$

Perciò ad una rivoluzione di $P_2$ attorno a $P_1$ sul piano fisico corrisponde una mezza rivoluzione di $P_2$ attorno a $P_1$ sul piano trasformato




La trasformazione introdotta si può scrivere anche come

$$x = L(u)\, u$$

con $L(u)$ matrice di Levi-Civita definita da

$$L(u) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice gode di alcune proprietà

1) $$L^{-1}(u) = \frac{1}{u_1^2+u_2^2}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{|u|^2} L^T(u)$$

la matrice $\tilde{L} = \frac{L}{|u|}$ è ortogonale $(\tilde{L}^{-1} = \tilde{L}^T)$

2) gli elementi di $L$ sono funzioni omogenee lineari nelle variabili $u_1, u_2$

$$L'(u) = L(u')$$

Dati due vettori $u$ e $v$ si ha:

3) $L(u)v = L(v)u$

4) $|u|^2 L(v)v + |v|^2 L(u)u - 2(u \cdot v) L(u)v = 0$

infatti: $\quad \times\ L^{-1}(u) = \frac{1}{|u|^2} L^T(u)$

$$\cancel{|u|^2} \frac{1}{\cancel{|u|^2}} L^T(u) L(v) v + |v|^2 u - 2(u \cdot v) v = 0$$

$$\left[ L^T(u) L(v) - 2(u \cdot v) \right] v = -|v|^2 u$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} u_1 v_1 + u_2 v_2 & 0 \\ 0 & u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -u_1 v_1 - u_2 v_2 & -u_1 v_2 + u_2 v_1 \\ -u_2 v_1 + u_1 v_2 & -u_1 v_1 - u_2 v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -u_1 v_1 - u_2 v_2 & -u_1 v_2 + u_2 v_1 \\ -u_2 v_1 + u_1 v_2 & -u_1 v_1 - u_2 v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 |v|^2 \\ -u_2 |v|^2 \end{pmatrix}$$

$$= -|v|^2 u \quad \checkmark$$

Deriviamo

$\underline{x = L(u)u}$ rispetto a $\tau$, dove

$$\frac{dt}{d\tau} = |u|^2 = r$$

$$x' = \underbrace{L'(u)\,u}_{\shortparallel} + L(u)\,u'$$

$$L(u')\,u = L(u)\,u'$$

$$\underline{x' = 2L(u)\,u'}$$

Mostriamo che $|u'| < +\infty$ a collisione

$$\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$$

velocità

$$\dot{x} = x' \frac{1}{|u|^2} \longrightarrow x' = |u|^2 \dot{x}$$

$$2L(u)\,u' = |u|^2 \dot{x}$$

$$u' = \frac{|u|^2}{2} L^{-1}(u)\,\dot{x} = \frac{\cancel{|u|^2}}{2} \frac{1}{\cancel{|u|^2}} L^T(u)\,\dot{x}$$

$$u' = \frac{1}{2} L^T(u)\,\dot{x}$$

$$|u'|^2 = \frac{1}{4} \left(L^T(u)\,\dot{x}\right) \cdot \left(L^T(u)\,\dot{x}\right) = \frac{1}{4}\,\dot{x}^T \overbrace{L(u)\,\underbrace{L^T(u)}_{\substack{\shortparallel \\ |u|^2 L^{-1}(u)}}}^{|u|^2 I_2}\,\dot{x}$$

$$a \cdot b = a^T b$$

$$|u'|^2 = \frac{1}{4} |u|^2\, \dot{x}^T \dot{x} = \frac{1}{4} |u|^2 |\dot{x}|^2$$

energia

$$\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 - \frac{1}{|x|} = -\frac{C}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}|\dot{x}|^2 = \frac{1}{|x|} - \frac{C}{2}$$

$$\underline{|u'|^2} = \frac{1}{2}|u|^2\left(\frac{1}{|u|^2} - \frac{C}{2}\right) = \underline{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{|u|^2 C}{2}\right)}$$

per $|u| \to 0$ si ha che $|u'| \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vediamo come si trasforma l'equazione del moto

$$\ddot{x} = -\frac{1}{|x|^3}x$$

$$\dot{x} = \frac{x'}{r} \qquad \ddot{x} = -\frac{1}{r^2}x'r'\frac{1}{r} + \frac{x''}{r^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{r^2}\left(x'' - \frac{x'r'}{r}\right)$$

$$\frac{1}{r^2}\left(x'' - \frac{x'r'}{r}\right) = -\frac{x}{r^3}$$

$$\underline{r x'' - x'r' = -x}$$

ora introduciamo i parametri $u_1$ e $u_2$

$$x' = 2L(u)u'$$

$$x'' = 2L'(u)u' + 2L(u)u''$$

$$= 2L(u)u'' + 2L(u')u'$$

$$r' = (u\cdot u)' = 2u\cdot u'$$

$$2|u|^2\left(L(u)u'' + L(u')u'\right) - 4(u\cdot u')L(u)u' + L(u)u = 0$$

$$|u|^2L(u')u' + |u'|^2L(u)u - 2(u\cdot u')L(u)u' = 0$$

$$2\left[|u|^2Lu'' + 2\cancel{(u\cdot u')}Lu' - |u'|^2Lu\right] - 4\cancel{(u\cdot u')}Lu' + Lu = 0$$

$$2|u|^2 L u'' - 2|u'|^2 L u + L u = 0$$

$$2|u|^2 u'' - 2|u'|^2 u + u = 0$$

$$u'' + \frac{1}{|u|^2}\Big(\frac{1}{2} - \underbrace{|u'|^2}_{|u'|^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|u|^2}{2} C\right)}\Big) u = 0$$

$$\boxed{u'' + \frac{C}{2} u = 0}$$