

## CAPITOLO 4

# LA TERRA COME CORPO RIGIDO

Finora abbiamo studiato fenomeni astronomici in cui non interveniva la particolare forma dei corpi celesti. Anzi, abbiamo sempre supposto che questi fossero puntiformi o, se estesi, a simmetria sferica. Quando parliamo dei fenomeni che interessano la Terra, però, non possiamo più trascurare il fatto che questa è ben lontana dall'essere perfettamente sferica: le correzioni apportate al potenziale gravitazionale terrestre che tengono conto di ciò sono anche dell'ordine del millesimo, quindi non ignorabili.

In questo capitolo studieremo la forma effettiva della Terra, analizzando le cause della sua non sfericità, e vedremo a quali fenomeni dà origine.

### 4.1 Il potenziale di uno sferoide oblato

Come giustificheremo nel seguito, la Terra è approssimabile ad uno *sferoide oblato*: il solido ottenuto ruotando un'ellisse di semiassi  $a, b$  con  $a > b$ , attorno al suo semiasse minore. A tal proposito, sarà fondamentale avere a disposizione la forma del potenziale gravitazionale generato da un tale oggetto. Quello che faremo in questa sezione è procurarci uno sviluppo in serie di tale potenziale troncato ad un opportuno termine.

Si consideri, dunque, in  $\mathbb{R}^3$  uno sferoide oblato di semiassi  $a$  e  $b$  e massa  $M$ , con il centro di massa posto nell'origine di un sistema di riferimento di assi  $xyz$ . Sia  $P := (x, y, z)$  il generico punto in cui vogliamo calcolare il potenziale e  $\vec{r}$  il suo vettore posizione; sia  $\vec{\rho}$  il vettore posizione del generico punto dello sferoide (figura 4.1). Supporremo  $\rho/r \ll 1$ , e trascureremo termini di ordine superiore a  $\rho^2/r^2$ .

Il potenziale dello sferoide nel punto  $P$  ha la forma

$$U(x, y, z) = +G \int \frac{dm}{|\vec{r} - \vec{\rho}|}. \quad (4.1)$$

Per sviluppare come abbiamo fatto nel paragrafo 3.1.1, usiamo la seguente:

$$|\vec{r} - \vec{\rho}| = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta)^{\frac{1}{2}},$$

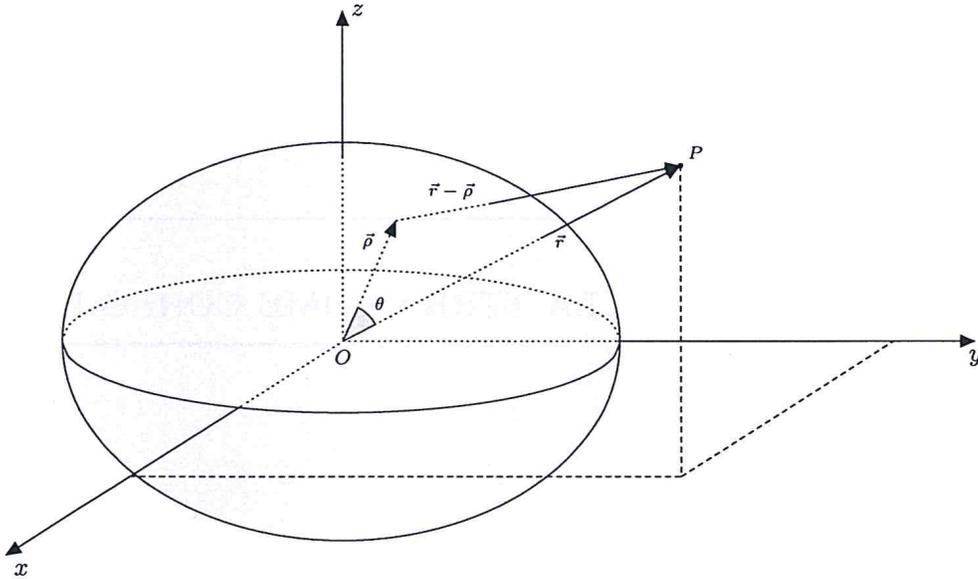


Figura 4.1: Uno sferoide oblato.

dove  $\theta$  è l'angolo compreso tra i vettori  $\vec{r}$  e  $\vec{\rho}$ . Sostituendo nella (4.1) e mettendo in evidenza un fattore  $r$ , otteniamo:

$$U(x, y, z) = +G \int \frac{dm}{r \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos \theta\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

A questo punto utilizziamo il seguente sviluppo:

$$(1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 + o(\epsilon^2),$$

con  $\epsilon := \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos \theta$ ; otteniamo che

$$\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos \theta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\rho}{r} \cos \theta + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \frac{\rho^2}{r^2} + o\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

Sostituendo nell'espressione del potenziale, otteniamo:

$$U(x, y, z) = + \underbrace{\frac{G}{r} \int dm}_{=:U_0} + \underbrace{\frac{G}{r} \int \frac{\rho}{r} \cos \theta dm}_{=:U_1} + \underbrace{\frac{G}{r} \int \frac{\rho^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} dm}_{=:U_2} + o\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

Analizziamo i singoli addendi.

- Il primo termine,  $U_0$ , è il termine di *monopolo* e vale, naturalmente,

$$U_0 = \frac{GM}{r}.$$

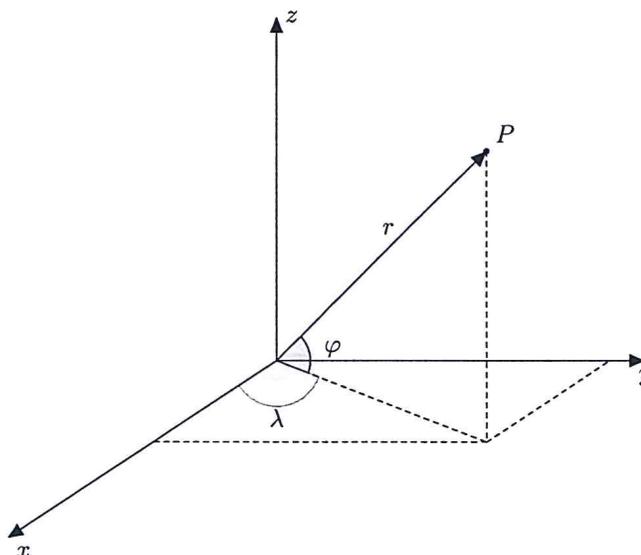


Figura 4.2: Coordinate polari.

- L'addendo  $U_1$  è il termine di *dipolo* e ci aspettiamo che sia nullo. Dimostriamolo: se  $\vec{\rho} := (\xi, \eta, \zeta)$ , allora

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{G}{r} \int \frac{\rho}{r} \cos \theta \, dm = \frac{G}{r^3} \int \vec{\rho} \cdot \vec{r} \, dm \\ &= \frac{G}{r^3} \left( x \int \xi \, dm + y \int \eta \, dm + z \int \zeta \, dm \right) = 0, \end{aligned}$$

perché  $(x \int \xi \, dm, y \int \eta \, dm, z \int \zeta \, dm)$  sono le coordinate del centro di massa dello sferoide, che noi abbiamo posto nell'origine.

- L'ultimo termine è detto di *quadrupolo* e vorremmo riscriverlo in modo da comprendere con esattezza da quali grandezze dipende. Per fare ciò, consideriamo un sistema di riferimento di assi  $XYZ$  in cui l'asse  $X$  coincide con la direzione del vettore  $\vec{r}$ . In questo sistema di riferimento abbiamo che, se  $\vec{\rho} = (X, Y, Z)$ , allora  $X = \rho \cos \theta$ .

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{G}{2r^3} \int \rho^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \, dm = \frac{G}{2r^3} \left( \int 3X^2 \, dm - \int \rho^2 \, dm \right) \\ &= \frac{G}{2r^3} \left( \int 3(X^2 - \rho^2) \, dm + 2 \int \rho^2 \, dm \right) = \frac{G}{2r^3} \left( -3 \int Y^2 + Z^2 \, dm + 2 \int \rho^2 \, dm \right) \\ &= \frac{G}{2r^3} \int [2\rho^2 - 3(Y^2 + Z^2)] \, dm. \end{aligned} \tag{4.2}$$

A questo punto, poniamo

$$I := \int (Y^2 + Z^2) \, dm$$

e osserviamo che corrisponde al momento di inerzia dello sferoide nella direzione  $X$ . Inoltre, siano  $A, B, C$  i momenti di inerzia dello sferoide rispetto agli assi  $x, y, z$ , che ci siamo premurati di scegliere come assi principali di inerzia per lo sferoide. In queste notazioni, la (4.2) diventa

$$U_2 = \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3I). \quad \text{formula di MacCullagh}$$

L'espressione appena ottenuta non è ancora soddisfacente. In effetti, la simmetria del corpo ci fa aspettare che il potenziale non dipenda dalla longitudine del punto  $P$ , ma solo dalla sua inclinazione rispetto all'equatore. Vorremmo rendere evidente questo fatto ed è essenziale usare coordinate polari  $(r, \lambda, \varphi)$  (figura 4.2). In queste coordinate abbiamo che

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Usando che

$$I = \int (Y^2 + Z^2) dm = \int \rho^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{r^2} \int |\vec{\rho} \times \vec{r}|^2 dm,$$

calcoliamo un'espressione di  $I$  in coordinate polari. Abbiamo che

$$\begin{aligned} (\vec{\rho} \times \vec{r})_x &= \eta r \sin \varphi - \zeta r \cos \varphi \sin \lambda \\ (\vec{\rho} \times \vec{r})_y &= \zeta r \cos \varphi \cos \lambda - \xi r \sin \varphi \\ (\vec{\rho} \times \vec{r})_z &= \xi r \cos \varphi \sin \lambda - \eta r \cos \varphi \cos \lambda, \end{aligned}$$

da cui

$$I = \sin^2 \varphi \int (\eta^2 + \xi^2) dm + \cos^2 \varphi \int \zeta^2 dm + \cos^2 \varphi \int (\xi^2 \sin^2 \lambda + \eta^2 \cos^2 \lambda) dm;$$

si osservi che gli integrali  $\int \eta \zeta dm$ ,  $\int \eta \xi dm$ ,  $\int \xi \zeta dm$  sono nulli, in quanto la terna di assi  $xyz$  è fatta di assi principali d'inerzia per lo sferoide.

Sostituendo  $\sin^2 \lambda = 1 - \cos^2 \lambda$ , otteniamo l'espressione

$$\begin{aligned} I &= \sin^2 \varphi \int (\eta^2 + \xi^2) dm + \cos^2 \varphi \int (\zeta^2 + \xi^2) dm + \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda \int (\eta^2 - \xi^2) dm \\ &= C \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi + (A - B) \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda. \end{aligned}$$

Il termine di quadrupolo diventa

$$U_2(r, \varphi, \lambda) = \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3C \sin^2 \varphi - 3B \cos^2 \varphi - 3(A - B) \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda).$$

Ponendo  $\cos^2 \lambda = (1 + \cos 2\lambda)/2$ , si ottiene, finalmente,

$$U_2(r, \varphi, \lambda) = \frac{G}{r^3} \left[ \left( \frac{A+B}{2} - C \right) P_2(\sin \varphi) - \frac{3}{4}(A - B) \cos^2 \varphi \cos 2\lambda \right],$$

dove  $P_2(t)$  è il polinomio ortogonale di Legendre di grado 2:

$$P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}.$$

simmetria assiale

Grazie alla simmetria dello sferoide oblatto, abbiamo che  $A = B$ ; il termine di quadrupolo diventa

$$U_2(r, \varphi) = -\frac{G}{r^3} (C - A) P_2(\sin \varphi),$$

che non dipende dalla longitudine  $\lambda$  del punto.

Riscrivendo la precedente espressione come

$$U_2(r, \varphi) = -\frac{GM}{r} \frac{(C - A) a^2}{Ma^2} \frac{1}{r^2} P_2(\sin \varphi),$$

otteniamo l'espressione del potenziale di uno sferoide oblatto a meno di termini di ordine  $\mathcal{O}(\rho^2/r^2)$ :

$$U(r, \varphi) = +\frac{GM}{r} \left( 1 - \frac{C - A a^2}{Ma^2} \frac{1}{r^2} P_2(\sin \varphi) \right). \quad (4.3)$$

**DEFINIZIONE 4.1** - In uno sferoide oblatto di semiasse maggiore  $a$ , massa  $M$  e momenti d'inerzia rispetto agli assi di simmetria  $A, B, C$ , il *momento di quadrupolo* è la quantità

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2}.$$

**OSSERVAZIONI 4.2** -  $\circ$  In uno sferoide oblatto il potenziale dipende dallo schiacciamento polare, dalla distanza e dall'inclinazione rispetto all'equatore.

$\circ$  In generale, il potenziale gravitazionale per un corpo a simmetria assiale è della forma

$$U(r, \varphi) = +\frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left( \frac{a}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi) \right),$$

per opportune costanti  $J_k$  e dove  $P_k$  è il  $k$ -esimo polinomio ortogonale di Legendre, definito dalla *formula di Rodrigues*

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k.$$

## 4.2 La Terra come sferoide oblatto

Newton dimostrò nei *Principia* (Libro III, Proposizioni XVIII-XX) che, a causa della sua rotazione, la Terra deve essere uno sferoide oblatto. In questa sezione definiremo alcuni parametri che misurano l'entità dello schiacciamento della Terra e stabiliremo delle relazioni tra di loro, ~~prima~~ assumendo che la densità della Terra sia costante, ~~poi nel caso più generale di densità non costante.~~

Da adesso in poi penseremo alla Terra come ad uno sferoide oblatto ottenuto facendo ruotare un'ellisse di semiasse maggiore  $a$  (raggio equatoriale) e semiasse minore  $b$  (raggio polare) attorno a quest'ultimo. Indicheremo con  $M$  la massa della Terra e con  $\omega_{\oplus}$  la velocità angolare media di rotazione della Terra attorno al proprio asse. Considereremo un sistema di riferimento di assi  $xyz$ , con origine nel centro dell'ellisse.

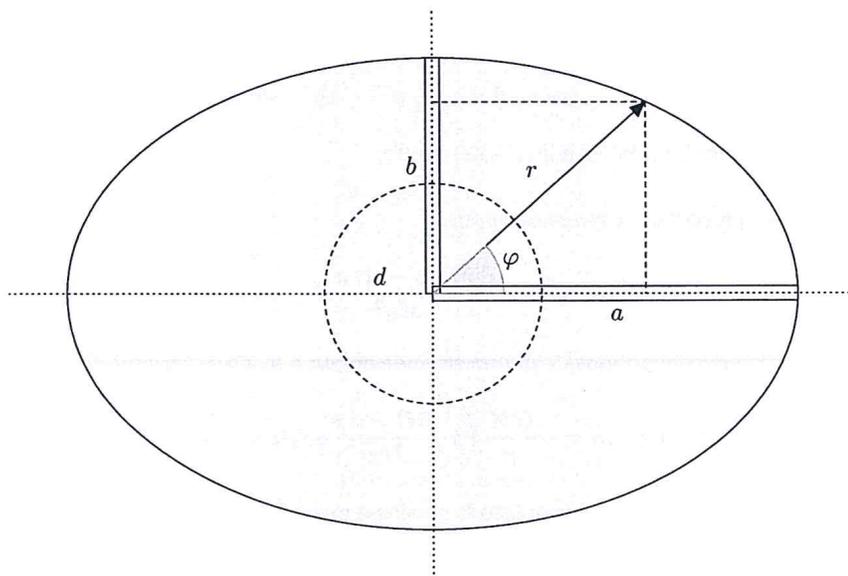


Figura 4.3: Sezione laterale dello sferoide oblato; sono evidenziate le colonne di fluido.

Il primo parametro che definiamo misura<sup>1</sup> l'entità della causa che produce lo schiacciamento. Viene naturale, quindi, definirlo come rapporto delle accelerazioni presenti sulla superficie terrestre:

$$m := \frac{\text{acc. centrifuga all'Equatore}}{\text{acc. locale di gravità all'Equatore}} = \frac{\omega_{\oplus}^2 a}{\frac{GM}{a^2}}. \quad (4.4)$$

Il secondo parametro che definiamo vogliamo che sia un indicatore della geometria dello sferoide e quindi vogliamo che misuri l'entità dello schiacciamento. Chiameremo, quindi, *schiacciamento* o *flattening* della Terra il numero

$$\epsilon := \frac{a - b}{a}. \quad (4.5)$$

Il terzo parametro che definiamo è stato già definito nella sezione precedente e si tratta del momento di quadrupolo  $J_2$ .

Quello di cui ci occuperemo adesso sarà di trovare relazioni tra i tre parametri precedentemente definiti. Studieremo prima il caso a densità costante, nella trattazione data dallo stesso Newton. In seguito, tratteremo il caso più generale.

### Densità costante

L'idea<sup>2</sup> è quella di considerare la Terra come un solido a cui viene fatto un buco<sup>3</sup> a forma di "L", lungo un raggio polare e uno equatoriale, che viene riempito con fluido perfetto (figura 4.3).

<sup>1</sup>Parliamo di misura, ma si tratta di un numero adimensionale.

<sup>2</sup>Appartenente a Newton. (proposizione XIX, Principia; consiglio la lettura di «Newton's Principia for the common reader» di Chandrasekhar S. premio Nobel per la fisica nel 1983).

<sup>3</sup> con sezione trasversale costante e di area unitaria.

Dal fatto che il fluido contenuto nel canale è in equilibrio, Newton conclude che i pesi delle colonne di fluido, equatoriale e polare, devono essere uguali.

Tuttavia, lungo l'equatore l'accelerazione di gravità è affievolita dall'accelerazione centrifuga, e dato che entrambe queste accelerazioni, in un corpo omogeneo, variano linearmente con la distanza dal centro\*, il fattore di "indebolimento" rimane costante e può essere calcolato all'equatore, ottenendo quindi m.

Poniamo

$$P_{\text{pole}} = P_{\text{eq}},$$

dove

$P_{\text{pole}}$  = peso della colonna polare di fluido,

$P_{\text{eq}}$  = peso della colonna equatoriale di fluido.

Si ha

$$P_{\text{pole}} = \int_0^b \rho g(s) ds = \int_0^b \rho Ks ds = \frac{1}{2} \rho K b^2 = \frac{1}{2} \rho b g_{\text{pole}},$$

con

$\rho$  : densità del fluido,

$g(s) = Ks$  accelerazione di gravità (con  $K$  costante opportuna),

$g_{\text{pole}} = Kb$  accelerazione di gravità al polo.

- \* la spiegazione di questo fatto nel caso di una sfera omogenea è riportata più avanti

Inoltre si ha

$$P_{eq} = \int_0^a \rho (g(s) - \omega_{\oplus}^2 s) ds = \frac{1}{2} \rho (K - \omega_{\oplus}^2) a^2 =$$

$$\frac{1}{2} \rho a (g_{eq} - \underbrace{\omega_{\oplus}^2 a}_{= m g_{eq}}) = \frac{1}{2} \rho a g_{eq} (1 - m),$$

con

$g_{eq} = Ka$  accelerazione di gravità all'equatore,

$\omega_{\oplus}$  = velocità angolare di rotazione della Terra.

Dunque

$$\frac{1}{2} \rho b g_{pole} = \frac{1}{2} \rho a g_{eq} (1 - m),$$

da cui

$$\frac{g_{pole}}{g_{eq}} = \frac{a}{b} (1 - m). \quad (4.6)$$

Poiché  $\epsilon = \frac{(a-b)}{a}$ , allora  $\frac{b}{a} = 1 - \epsilon$  ed essendo  $\epsilon \ll 1$

$\frac{a}{b} \approx 1 + \epsilon$ . D'ora in poi quando compare  $\epsilon$ , considereremo sempre sviluppi al primo ordine. Allora

$$\frac{g_{pole}}{g_{eq}} \approx (1 + \epsilon)(1 - m). \quad (4.7)$$

A questo punto valutiamo  $g_{pole}/g_{eq}$ . Abbiamo

$$g(r, \varphi) = \frac{\partial U}{\partial r}(r, \varphi),$$

con  $U(r, \varphi) = \frac{GM}{r} \left( 1 - J_2 \frac{a^2}{r^2} P_2(\cos \varphi) \right)$ ; segue che

$$g(r, \varphi) = -\frac{GM}{r^2} + \frac{3GM}{r^4} a^2 J_2 P_2(\cos \varphi). \quad (4.8)$$

Occupiamoci adesso della quantità  $J_2$ . Per uno sferoide oblato omogeneo abbiamo

$$A = B = \frac{1}{5} M (a^2 + b^2), \quad C = \frac{2}{5} M a^2.$$

Dunque

$$J_2 = \frac{C - A}{M a^2} = \frac{1}{5} \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) = \frac{1}{5} [1 - (1 - \epsilon)^2] \approx \frac{2}{5} \epsilon$$

e sostituendo nell'espressione di  $g(r, \varphi)$  si ha

$$g(r, \varphi) \approx -\frac{GM}{r^2} + \frac{6GM}{5r^4} a^2 \epsilon P_2(\cos \varphi).$$

Calcoliamo le accelerazioni di gravità al polo e all'equatore:

$$\begin{aligned} g_{\text{pole}} &= g(b, \pi/2) \approx -\frac{GM}{b^2} + \frac{6GM}{5b^4} a^2 \epsilon \\ &= -\frac{GM}{b^2} \left( 1 - \frac{6}{5} \frac{a^2}{b^2} \epsilon \right) \approx -\frac{GM}{b^2} \left( 1 - \frac{6}{5} (1 + \epsilon)^2 \epsilon \right) \\ &\approx -\frac{GM}{b^2} \left( 1 - \frac{6}{5} \epsilon \right), \end{aligned}$$

$$g_{\text{eq}} = g(a, 0) \approx -\frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{3}{5} \epsilon \right).$$

Si ottiene

$$\frac{g_{\text{pole}}}{g_{\text{eq}}} \approx \frac{a^2}{b^2} \left( 1 - \frac{6}{5} \epsilon \right) \left( 1 - \frac{3}{5} \epsilon \right) \approx$$

$$(1 + \epsilon)^2 \left(1 - \frac{6}{5}\epsilon\right) \left(1 - \frac{3}{5}\epsilon\right) \approx 1 + \frac{1}{5}\epsilon.$$

Usando questo risultato nella 4.7 risulta

$$(1 - m)(1 + \epsilon) \approx 1 + \frac{1}{5}\epsilon,$$

da cui si trova che

$$\epsilon \approx \frac{5}{4}m$$

### Dati numerici

Nel caso della Terra, è possibile misurare i parametri che abbiamo definito.

Parametro	Valore per la Terra
$\epsilon$	1/298.2
$m$	$3.46 \cdot 10^{-3}$
$J_2$	$1.08 \cdot 10^{-3}$

I valori presenti nella precedente tabella si riferiscono ad un raggio equatoriale  $a = 6.378 \cdot 10^6$  m. È, inoltre, possibile misurare il valore  $(C - A)/A$ :

$$\frac{C - A}{A} \simeq 3.27 \cdot 10^{-3}.$$

## 4.3 Moti della Terra come corpo rigido

In questo paragrafo descriveremo due importanti moti di precessione che interessano la Terra: il primo è il moto di precessione libera, che non tiene conto dell'interazione gravitazionale con altri corpi celesti; il secondo è il moto di precessione luni-solare che, al contrario del primo, è causato dalla presenza del Sole e della Luna. Avremo prima bisogno di scrivere le equazioni di Eulero per un corpo rigido con un punto fisso.

### 4.3.1 Equazioni di Eulero

In questo paragrafo daremo per buone le nozioni di corpo rigido e di sistema di riferimento solidale al corpo rigido.

Siano  $\Sigma, \Sigma'$  due sistemi di riferimento, sia  $\vec{\omega}$  la velocità angolare di  $\Sigma'$  rispetto a  $\Sigma$ . Vale la seguente relazione:

$$\frac{d\vec{u}}{dt}\Big|_{\Sigma} = \frac{d\vec{u}}{dt}\Big|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{u} \quad \text{per ogni } \vec{u} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.13)$$

Supponiamo adesso di avere un corpo rigido  $\mathcal{C}$  e che  $\Sigma$  sia un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro di massa di  $\mathcal{C}$ , mentre  $\Sigma'$  sia solidale a  $\mathcal{C}$ .

**PROPOSIZIONE 4.4** - Esiste una matrice  $\mathcal{I}$  tale che il momento angolare  $\vec{L}$  del corpo rigido soddisfa la seguente relazione:

$$\vec{L} = \mathcal{I}\vec{\omega}, \quad (\vec{M}_0 = \mathcal{J}_0 \vec{\omega}) \quad (4.14)$$

dove  $\vec{\omega}$  è la velocità angolare del corpo rigido.

*Dimostrazione.* Supponiamo che il corpo rigido sia formato da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  di masse  $m_1, \dots, m_N$ , posizioni  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  e velocità  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$ . Il momento angolare totale risulta

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \vec{r}_i).\end{aligned}$$

In componenti, abbiamo:

$$\begin{aligned}L_x &= \omega_x \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\ L_y &= -\omega_x \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i + \omega_y \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\ L_z &= -\omega_x \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i + \omega_z \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - z_i^2).\end{aligned}$$

È evidente che le precedenti sono relazioni lineari in  $\vec{\omega}$ , per cui è possibile definire una matrice  $\mathcal{I}$  tale che

$$\vec{L} = \mathcal{I} \vec{\omega}.$$

□

**OSSERVAZIONI 4.5** - ○ La precedente proposizione vale anche nel caso di un corpo rigido continuo: basta sostituire le somme con integrali.

- La matrice  $\mathcal{I}$  è detta tensore di inerzia del corpo rigido ed è evidentemente simmetrica. Si può dimostrare che è anche definita positiva nel caso in cui esistano almeno tre punti del corpo rigido non allineati. Ciò ci garantisce che esiste un sistema di riferimento ortonormale in cui la matrice  $\mathcal{I}$  è diagonale: un tale sistema di riferimento viene detto riferimento principale d'inerzia; i corrispondenti autovalori sono i momenti principali d'inerzia.

Siamo pronti a scrivere le equazioni di Eulero per un corpo rigido con un punto fisso. Indichiamo con  $\vec{N}^e$  il momento delle forze esterne che agiscono su  $\mathcal{C}$ .

**PROPOSIZIONE 4.6 (EQUAZIONI DI EULERO)** - Sia  $\Sigma'$  un sistema di riferimento principale d'inerzia per il corpo rigido  $\mathcal{C}$  solidale ad esso e supponiamo che in tale riferimento i vettori  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{N}^e$  abbiano rispettivamente componenti  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  e  $N_x^e, N_y^e, N_z^e$ ; siano  $I_1, I_2, I_3$  i momenti principali d'inerzia in  $\Sigma'$ . Valgono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}N_x^e &= I_1 \dot{\omega}_x - (I_2 - I_3) \omega_y \omega_z \\ N_y^e &= I_2 \dot{\omega}_y - (I_3 - I_1) \omega_x \omega_z \\ N_z^e &= I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2) \omega_x \omega_y.\end{aligned}\tag{4.15}$$

*Dimostrazione.* Sia  $\Sigma$  un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro di massa del corpo rigido. In  $\Sigma$  vale l'equazione cardinale

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma} = \vec{N}^e - m \vec{r}_o \times \vec{r}_\beta \quad \vec{r}_o = \vec{0}$$

Inoltre, dalla (4.14),

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \mathcal{I} \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'}$$

Scriviamo la (4.13) con  $\vec{u} = \vec{L}$ :

$$\begin{aligned} \vec{N}^e &= \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{L} \\ &= \mathcal{I} \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{L} \\ &= \mathcal{I} \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \mathcal{I} \vec{\omega}. \end{aligned}$$

La precedente, scritta in componenti, dà esattamente le (4.15). □

### 4.3.2 Precessione libera della Terra rigida

Per la descrizione del moto di precessione libera supporremo che la Terra sia un corpo rigido della forma di uno sferoide oblatto non soggetto a forze esterne.

Osserviamo che un qualsiasi sistema di riferimento solidale alla Terra  $\Sigma' = \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  con origine nel centro di massa e in cui  $\hat{e}_x, \hat{e}_y$  sono nel piano equatoriale, è un sistema di riferimento principale *se il corpo è omogeneo* d'inerzia. Se  $I_1, I_2, I_3$  sono i momenti principali d'inerzia rispetto agli assi  $x, y, z$ , allora abbiamo che  $I_1 = I_2 < I_3$ . Supponiamo che la Terra ruoti con velocità angolare  $\vec{\omega}_\oplus$  non parallela all'asse  $z$  e siano  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  le componenti di  $\vec{\omega}_\oplus$  rispetto al riferimento  $\Sigma'$ .

**PROPOSIZIONE 4.7** - Il vettore velocità angolare  $\vec{\omega}_\oplus$  descrive, nel riferimento  $\Sigma'$ , un cono attorno all'asse  $z$ . \* (si consideri anche il commento a più pagina)

*Dimostrazione.* Scriviamo le equazioni di Eulero per la Terra in questo caso. Poiché la Terra non è soggetta a forze esterne, allora  $\vec{N}^e = \vec{0}$ :

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x = \omega_y \omega_z (I_1 - I_3) \\ I_1 \dot{\omega}_y = \omega_x \omega_z (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_z = 0. \end{cases}$$

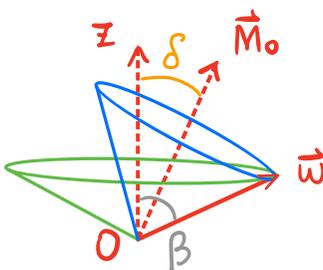
La terza equazione ci dice che  $\omega_z$  è costante, per cui possiamo porre  $\Omega := \omega_z (I_1 - I_3) / I_1$ , ottenendo

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \Omega \omega_y \\ \dot{\omega}_y = -\Omega \omega_x \end{cases} \rightarrow \ddot{\omega}_x = -\Omega^2 \omega_x$$

Le precedenti possono essere disaccoppiate ottenendo le equazioni di due oscillatori armonici di soluzione

$$\begin{cases} \omega_x = A \sin(\Omega t) & \omega_x = A \cos(\Omega t + \varphi_0) \\ \omega_y = A \cos(\Omega t) & \omega_y = A \sin(\Omega t + \varphi_0) \\ \omega_z = B \end{cases}$$

Commento Assumiamo che  $\omega_z > 0$  (Oz asse di simmetria giroscopica di  $\mathcal{C}$ )



Uale  $\cos \beta < \cos \delta$ , infatti

$$\frac{\omega_z}{|\vec{\omega}|} < \frac{M_{0,z}}{|\vec{M}_0|} = \frac{I_3 \omega_z}{|\vec{M}_0|}$$

ed elevando al quadrato

$$I_3^2 (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) > I_1^2 (\omega_x^2 + \omega_y^2) + I_3^2 \omega_z^2$$

che è verificata in quanto  $I_3 > I_1$ .

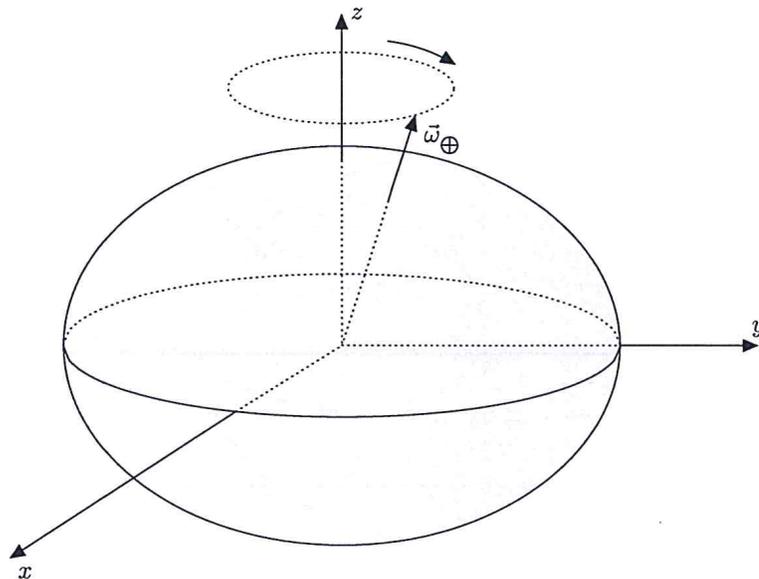


Figura 4.4: Precessione libera della Terra rigida.

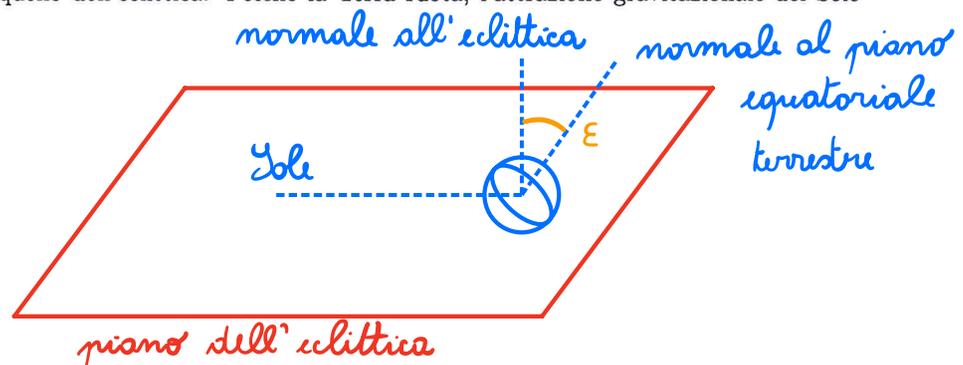
con  $A, B$  costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Si conclude osservando che le precedenti sono equazioni parametriche per un cono di asse coincidente con  $z$ .  $\square$

**OSSERVAZIONI 4.8** -  $\circ$  La quantità  $\Omega$  è chiamata *velocità angolare di precessione* ed è la frequenza con cui gira  $\vec{\omega}_{\oplus}$ . Osserviamo che  $\Omega < 0$ , per cui il moto di precessione avviene in verso opposto alla rotazione della Terra.

- $\circ$  Per la Terra abbiamo che  $(I_1 - I_3)/I_1 \simeq 3.3 \cdot 10^{-3}$ , da cui ricaviamo che il periodo di precessione libera è di circa 300 giorni. In realtà si osserva che il periodo effettivo è di circa 427 giorni; la differenza è dovuta all'elasticità della Terra.

### 4.3.3 Precessione lunisolare dell'asse di rotazione della Terra

Il Sole non si trova sul piano equatoriale della Terra, ma su un piano, detto *piano dell'eclittica*, inclinato rispetto a questo di un angolo  $\epsilon = 23,5^\circ$ . Se la Terra non avesse una rotazione propria, l'attrazione gravitazionale del Sole tenderebbe a spostare la Terra, fino a far coincidere il piano equatoriale con quello dell'eclittica. Poiché la Terra ruota, l'attrazione gravitazionale del Sole



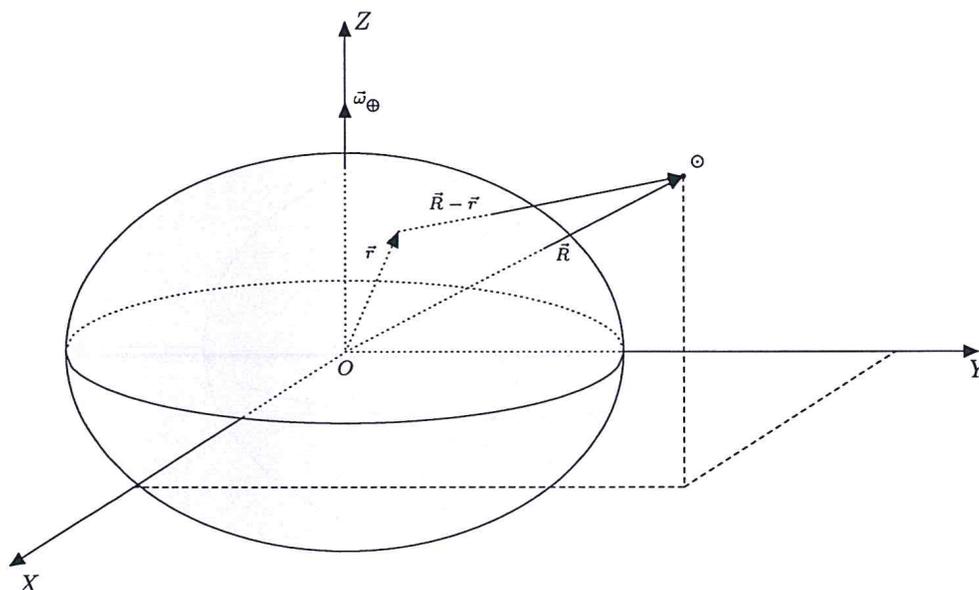


Figura 4.5: Riferimento inerziale della Terra.

riesce solo a fare in modo che l'asse di rotazione terrestre descriva un cono attorno alla perpendicolare al piano dell'eclittica, causando cioè la cosiddetta *precessione lunisolare*. In questo paragrafo descriveremo quantitativamente questo fenomeno.

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale  $\Sigma$  con origine nel centro di massa della Terra e di assi  $XYZ$ , con  $Z$  asse di simmetria della Terra<sup>4</sup>. Sia  $\vec{R}$  la posizione del Sole, di coordinate  $(X, Y, Z)$  (figura 4.5). Supponiamo che la Terra ruoti attorno all'asse  $Z$  con velocità angolare  $\vec{\omega}_{\oplus}$ , trascurando così il moto di precessione libera. Su ogni elemento di massa  $dm$  della Terra agisce una forza elementare esercitata dal Sole di intensità

$$d\vec{F} = \frac{GMdm(\vec{R} - \vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|^3}.$$

Osserviamo che nel calcolo di questa forza possiamo trascurare la rotazione della Terra, grazie alla simmetria dello sferoide oblato. Al solito, supponiamo che  $R \gg r$ , per cui, sviluppando e

<sup>4</sup>Possiamo pensare al piano  $XY$  come al piano dell'equatore celeste e  $Z$  in direzione del Polo Nord Celeste.

trascurando termini di ordine superiore a  $r/R$ :

$$\begin{aligned} |\vec{R} - \vec{r}|^{-3} &= (R^2 + r^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{r})^{-\frac{3}{2}} \\ &= R^{-3} \left( 1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\simeq R^{-3} \left( 1 - 2\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\simeq R^{-3} \left( 1 + 3\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right). \end{aligned}$$

La forza, quindi, diventa:

$$d\vec{F} = \frac{GMdm}{R^3} \left( 1 + 3\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right) (\vec{R} - \vec{r}).$$

Calcoliamo, adesso, il momento della forza esercitata dal Sole: ricaviamo prima il momento elementare della forza e poi integreremo sul corpo rigido per ottenere il momento totale. Il momento elementare è

$$\begin{aligned} d\vec{K} &:= \vec{r} \times d\vec{F} \\ &\simeq \frac{GMdm}{R^3} \left( 1 + 3\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right) (\vec{r} \times \vec{R}), \end{aligned}$$

mentre il momento totale è

$$\vec{K} \simeq \frac{GM}{R^3} \int \left( 1 + 3\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right) (\vec{r} \times \vec{R}) dm.$$

Osserviamo che l'addendo  $\int (\vec{r} \times \vec{R}) dm$  è uguale a  $(\int \vec{r} dm) \times \vec{R}$  che a sua volta è nullo perché  $\int \vec{r} dm$  sono le coordinate del centro di massa, che abbiamo posto nell'origine. Il momento si riduce a

$$\vec{K} \simeq \frac{3GM}{R^5} \int (\vec{r} \cdot \vec{R}) (\vec{r} \times \vec{R}) dm.$$

Osserviamo adesso che il riferimento prescelto è un riferimento principale d'inerzia, con associati momenti principali d'inerzia  $A, B, C$  dati da:

$$A = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$B = \int (x^2 + z^2) dm = A$$

$$C = \int (x^2 + y^2) dm.$$

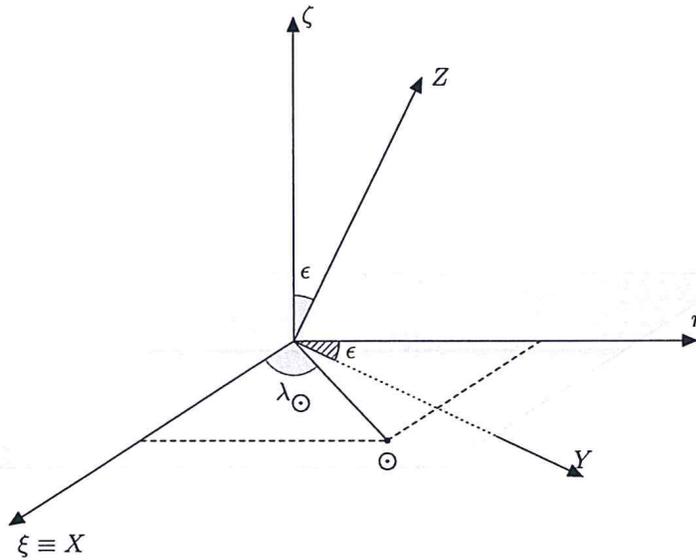


Figura 4.6: Il riferimento della Terra e dell'eclittica.

Esplicitiamo le componenti di  $\vec{K}$ : se  $\vec{r} = (x, y, z)$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} K_X &\simeq \frac{3GM}{R^5} \int (xX + yY + zZ)(yZ - zY) dm \\ &= \frac{3GM}{R^5} YZ \int (y^2 - z^2) dm \\ &= \frac{3GM}{R^5} (C - A)YZ. \end{aligned}$$

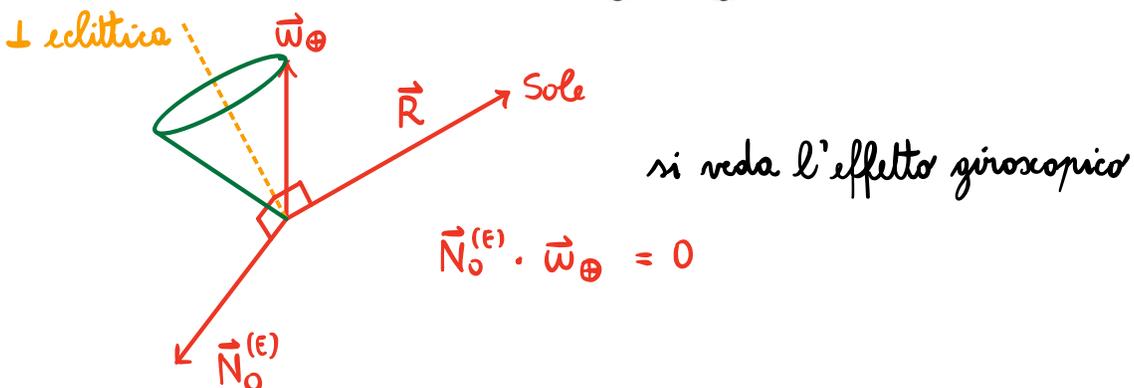
Un conto analogo mostra che

$$\begin{aligned} K_Y &\simeq -\frac{3GM}{R^5} (C - A)XZ \\ K_Z &\simeq \frac{3GM}{R^5} (B - A)XY = 0. \end{aligned}$$

È semplice verificare che  $\vec{K} \cdot \vec{R} = 0$ . Questo, unito al fatto che  $K_Z = 0$ , ci fa concludere che  $\vec{K}$  è diretto lungo l'asse  $X$ , perciò tenderà a far precedere il vettore velocità angolare  $\vec{\omega}_\oplus$ , che descriverà un cono attorno all'asse perpendicolare al piano dell'eclittica.

Calcoliamo, adesso, la velocità angolare di precessione. Mettiamo coordinate  $\xi \equiv X, \eta$  sul piano dell'eclittica e sia  $\zeta$  l'asse perpendicolare (figura 4.6). In questo riferimento, che denotiamo con  $\Sigma'$ , il Sole avrà coordinate

$$\vec{R} = (R \cos \lambda_\odot, R \sin \lambda_\odot, 0),$$



dove  $\lambda_{\odot}$  è la longitudine del Sole; pertanto, avremo

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ 0 & \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \lambda_{\odot} \\ R \sin \lambda_{\odot} \cos \epsilon \\ R \sin \lambda_{\odot} \sin \epsilon \end{pmatrix}.$$

Inoltre, il vettore  $\vec{K}$  avrà coordinate date da

$$\begin{pmatrix} K_{\xi} \\ K_{\eta} \\ K_{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_X \\ K_Y \\ K_Z \end{pmatrix} = \frac{3GM}{R^3} (C - A) \sin \epsilon \begin{pmatrix} \sin^2 \lambda_{\odot} \cos \epsilon \\ -\sin \lambda_{\odot} \cos \lambda_{\odot} \cos \epsilon \\ \sin \lambda_{\odot} \cos \lambda_{\odot} \sin \epsilon \end{pmatrix}.$$

Il suo modulo dipende da  $C - A$  e dall'inverso del cubo della distanza: l'effetto che si avrà sarà piccolo rispetto alla rotazione principale della Terra, quindi il periodo di precessione sarà lungo. Supponiamo che  $T_{\text{prec}} \gg 1 \text{ yr}$  (è un'ipotesi che verificheremo a posteriori, ma è ragionevole). L'effetto che apprezziamo ha un periodo molto lungo, dunque non è scorretto pensare al Sole in una posizione media rispetto a quelle che occupa sull'eclittica durante l'anno: possiamo calcolare l'effetto di precessione *mediando* sulla posizione del Sole in un anno. In questo modo, otteniamo  $\overline{K}_{\eta} = \overline{K}_{\zeta} = 0$  e

$$\overline{K}_{\xi} = \frac{3}{2} \frac{GM}{R^3} (C - A) \sin \epsilon \cos \epsilon.$$

Per il momento angolare  $\vec{L} = C\vec{\omega}_{\oplus}$ , vale l'equazione fondamentale

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \vec{K}.$$

Sia  $\Sigma''$  un sistema di riferimento solidale all'asse di rotazione della Terra: la sua velocità angolare rispetto a  $\Sigma'$  sarà la velocità con cui l'asse terrestre precede. Indichiamo tale velocità angolare con  $\vec{\Omega}_{\text{prec}} = \Omega_{\text{prec}} \hat{\zeta}$  e osserviamo che soddisfa, per la (4.13):

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\Sigma''} + \vec{\Omega}_{\text{prec}} \times \vec{L}.$$

Nel riferimento  $\Sigma''$  il vettore  $\vec{L}$  è fermo, dunque la precedente equazione diventa, tenendo conto dell'equazione fondamentale,

$$\vec{K} = \vec{\Omega}_{\text{prec}} \times \vec{L}.$$

Da questa ricaviamo:

$$\overline{K}_{\xi} = (\vec{\Omega}_{\text{prec}} \times \vec{L})_{\xi} = -\Omega_{\text{prec}} L_{\eta} = -\Omega_{\text{prec}} L \sin \epsilon.$$

Concludiamo che

$$\Omega_{\text{prec}} = -\frac{\overline{K}_{\xi}}{L \sin \epsilon} = -\frac{3}{2} \frac{GM}{R^3} \left( \frac{C - A}{C} \right) \frac{1}{\omega_{\oplus}} \cos \epsilon.$$

**OSSERVAZIONE 4.9** - Abbiamo studiato il moto di precessione nel caso della Terra e del Sole, ma nulla cambia se si considera la Terra e la Luna: difatti, gli effetti dei due corpi vanno sommati

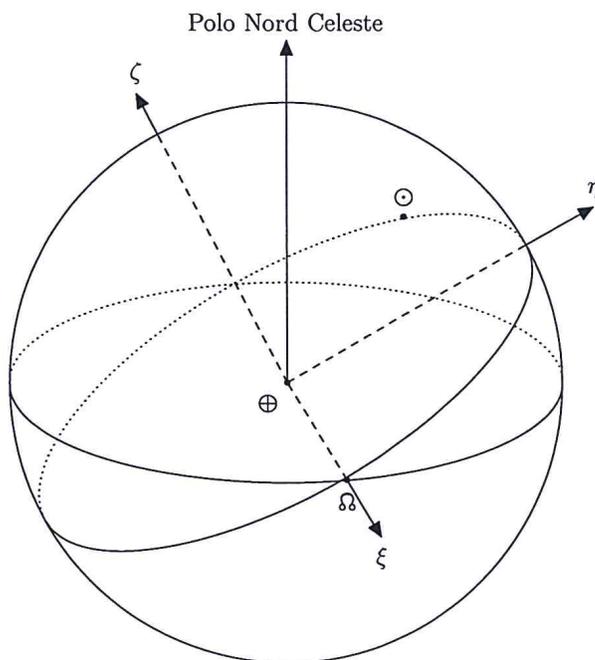


Figura 4.7: La Sfera Celeste e il riferimento dell'eclittica.

per ottenere il periodo effettivo della precessione lunisolare. Possiamo distinguere:

$$\Omega_{\text{prec},\odot} = -\frac{3}{2} \frac{GM_{\odot}}{d_{\odot\oplus}^3} \left( \frac{C-A}{C} \right) \frac{1}{\omega_{\oplus}} \cos \epsilon$$

$$\Omega_{\text{prec},\zeta} = -\frac{3}{2} \frac{GM_{\zeta}}{d_{\zeta\oplus}^3} \left( \frac{C-A}{C} \right) \frac{1}{\omega_{\oplus}} \cos \epsilon.$$

Come accade per le maree, l'effetto della Luna è più importante dell'effetto del Sole di un fattore 2.2:

$$\frac{\Omega_{\text{prec},\zeta}}{\Omega_{\text{prec},\odot}} = \frac{M_{\zeta}}{M_{\odot}} \cdot \frac{d_{\odot\oplus}^3}{d_{\zeta\oplus}^3} \simeq 2.2.$$

Pertanto la velocità angolare di precessione lunisolare è  $\Omega_{\text{lunisol}} = 3.2\Omega_{\text{prec},\odot}$ . Facendo i dovuti calcoli, tenendo conto che  $(C-A)/C \simeq 3.27 \cdot 10^{-3}$ , si trova che il periodo della precessione lunisolare è

$$T_{\text{lunisol}} \simeq 26000 \text{ yr.}$$

# « Orbital Motion », A. E. Roy

206

General Perturbations

If it is assumed that the Earth is a spheroid, then its potential may be written as a series of spherical harmonics of the form

$$U = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \phi) \right]$$

where  $P_n(\sin \phi)$  is the Legendre polynomial. The first three of these polynomials are

$$P_0(\sin \phi) = 1, \quad P_1(\sin \phi) = \sin \phi, \quad P_2(\sin \phi) = \frac{1}{2}(3 \sin^2 \phi - 1).$$

The origin here is the centre of mass

This general result was first obtained by Laplace. It is seen that it corresponds to equation (7.17) with

$$J = \frac{3}{2} J_2, \quad H = \frac{5}{2} J_3, \quad K = -\frac{15}{4} J_4.$$

It will be seen in chapter 11 how a study of the orbits of artificial satellites enables the value of these and the higher-order constants to be found (see also appendix II).

## 7.6 Potential at a Point Within a Sphere

We shall find in chapter 16 that we require the expression for the gravitational potential of a massive sphere at a point within it.

Consider first the attraction at O of a spherical shell of density  $\rho$ , defined by two concentric spheres of different radii (figure 7.5). Let a cone with vertex O cut the shell as shown, defining

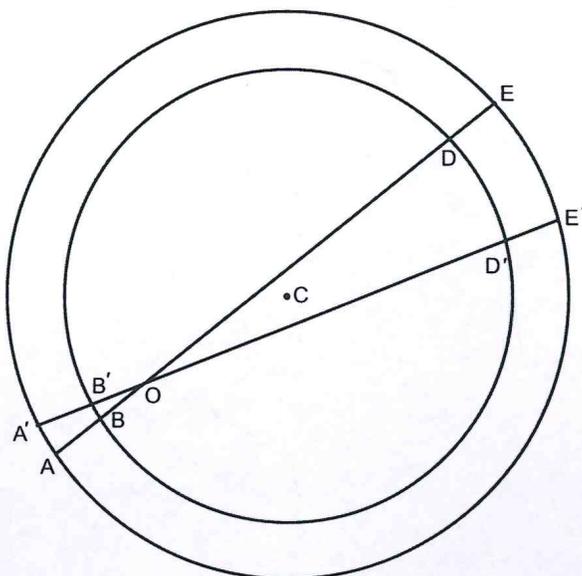


Figure 7.5

two frusta  $A'B'BA$  and  $D'E'ED$ . If the cone has a small solid angle  $d\omega$ , then if  $OB = r$ , the mass of the frusta  $ABB'A'$  is  $\rho r^2 d\omega BA$  and its force of attraction per unit mass at  $O$  is  $G\rho d\omega BA$ . Similarly the attraction per unit mass at  $O$  is  $G\rho d\omega DE$ . But  $AB = DE$ , since any chord (for example  $ABODE$ ) makes equal intercepts on the concentric spheres. The attractions are thus equal and opposite. By taking cones in every direction about  $O$ , the resultant attraction at  $O$  is seen to be zero. Since  $O$  is any point inside the shell, the attraction of the shell throughout its interior must be zero. It follows that the potential must be constant at every point and so must equal the potential at the centre  $C$  of the shell. By definition, if  $m$  is the mass of the shell and  $a$  is its radius, the potential is  $Gm/a$ .

A solid sphere can be considered to be made up of concentric shells. Take a point  $O$  distant  $r$  from its centre. Let a thin shell of matter of thickness  $2\epsilon$  and mid-radius  $r$  be removed so that  $O$  lies within the cavity formed (figure 7.6). Those shells external to the cavity thus exert no force on  $O$ , while the shells internal to the cavity exert an attraction as if their mass were gathered at the centre  $C$ . Hence, if  $\rho$  is the density of the material, the attraction at  $O$  is given by the expression

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4}{3} G \pi \rho (r - \epsilon)^3 / r^2 = \frac{4}{3} G \pi \rho r.$$

We see then that the attraction of a uniform solid sphere at a point inside it is directly proportional to its distance from the centre.

To obtain the gravitational potential at  $O$  we recall that the potential due to a sphere of radius  $(r - \epsilon)$  and density  $\rho$  at a point outside it at a distance  $(r - \epsilon)$  from the centre is

$$\frac{4}{3} G \pi \rho (r - \epsilon)^3 / (r - \epsilon) = \frac{4}{3} G \pi \rho (r - \epsilon)^2. \tag{7.18}$$

Let  $s$  be the radius of a shell of thickness  $ds$ , where  $s > r + \epsilon$ . Then its mass is  $4\pi s^2 \rho ds$  and the potential it produces at  $O$  is, by the previous result for the potential of a spherical shell

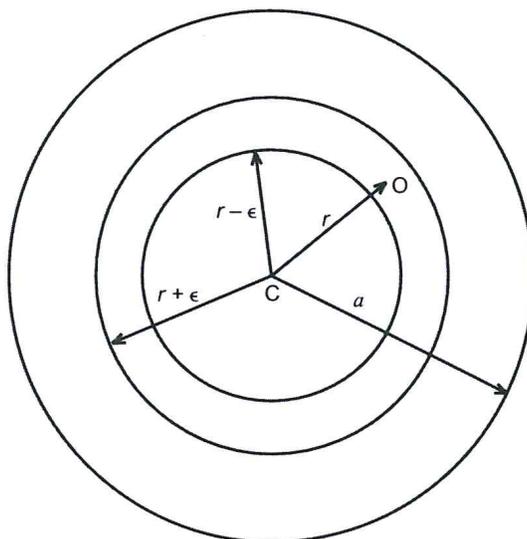


Figure 7.6

at a point within it, equal to  $4\pi G\rho s ds$ . For the potential due to all such shells we integrate, giving

$$\int_{r+\epsilon}^a 4\pi G\rho s ds = 2\pi G\rho[a^2 - (r + \epsilon)^2]. \quad (7.19)$$

Combining equations (7.18) and (7.19) and taking the limit as  $\epsilon$  tends to zero, we obtain for the potential of a uniform sphere of radius  $a$  at a point within it and distant  $r$  from its centre the expression  $(2/3)G\pi\rho(3a^2 - r^2)$ .

In passing, it may be noted that the attraction of a uniform shell bounded by two similar ellipsoids at a point inside the shell is also zero.

### 7.7 The Method of the Variation of Parameters

Let us consider the case of a planet P of mass  $m$ , moving about the Sun of mass  $M$  and being disturbed in its heliocentric orbit by a second planet P<sub>1</sub> of mass  $m_1$ . Then by equation (7.3) the equation of motion of the planet P is

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(M + m)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = Gm_1 \left( \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}}{\rho^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) \quad (7.20)$$

where  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_1$  are the heliocentric radius vectors of planets P and P<sub>1</sub> and

$$\rho = [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})]^{1/2}.$$

We may write equation (7.20), following equation (7.3), as

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla U = \nabla(U_0 + R) \quad (7.21)$$

where

$$U_0 = \frac{G(M + m)}{r}$$

$$R = Gm_1 \left( \frac{1}{\rho} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right)$$

and

$$\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

The corresponding equation of motion of planet P<sub>1</sub> is

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + G(M + m_1)\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} = Gm \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{\rho^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (7.22)$$

or

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \nabla_1 U_1 = \nabla_1(U_0' + R_1) \quad (7.23)$$