Compito di Meccanica Razionale

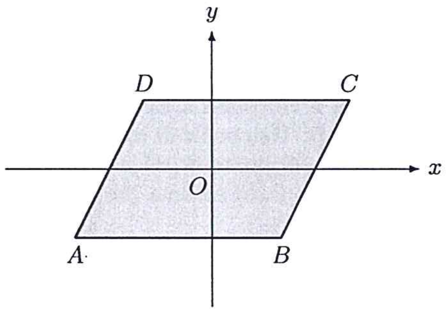
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

6 Giugno 2022

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri una lamina che ha la forma di un parallelogramma. La lamina è omogenea e di massa m. Le coordinate dei vertici A, B, C, D sono date da

$$A \equiv \left(-\ell, -\frac{\ell}{2}\right), \quad B \equiv \left(\frac{\ell}{2}, -\frac{\ell}{2}\right), \quad C \equiv \left(\ell, \frac{\ell}{2}\right), \quad D \equiv \left(-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right).$$



i) Determinare i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi Ox, Oy, Oz.

ii) Mostrare che il sistema di riferimento $Oxyz$ non è principale di inerzia.

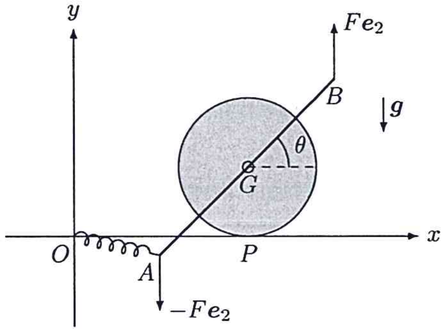
Secondo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Nel piano Oxy si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R che rotola senza strisciare sull'asse Ox e da un'asta omogenea di massa m e lunghezza 2ℓ. L'asta è vincolata nel suo baricentro G tramite una coppia rotoidale al baricentro del disco. Agli estremi A, B dell'asta sono applicate le forze $-F\mathbf{e}_2$, $F\mathbf{e}_2$ ($F > 0$), rispettivamente, con $\mathbf{e}_2$ versore associato ad Oy. Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collega il punto A con l'origine O. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.

Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto di contatto P del disco con l'asse Ox e l'angolo θ formato dall'asta con l'asse orizzontale (si veda la figura),

i) scrivere le equazioni (pure) del moto del sistema;

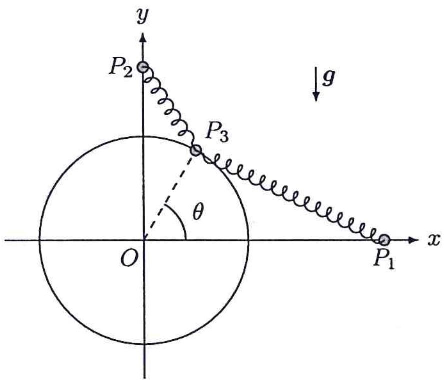
ii) determinare la reazione vincolare in P in funzione delle coordinate lagrangiane.



Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Nel piano Oxy si consideri un sistema meccanico formato da tre punti materiali P_1, P_2, P_3, ciascuno avente massa uguale ad m. I punti P_1, P_2 possono scorrere lungo gli assi Ox, Oy, rispettivamente, mentre il punto P_3 è vincolato a scorrere lungo una guida circolare fissa con centro in O e raggio R. Due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collegano le coppie di punti P_1, P_3 e P_2, P_3. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g. Si assuma che tutti i vincoli siano privi di attrito e che valga la relazione

$$mg = kR.$$



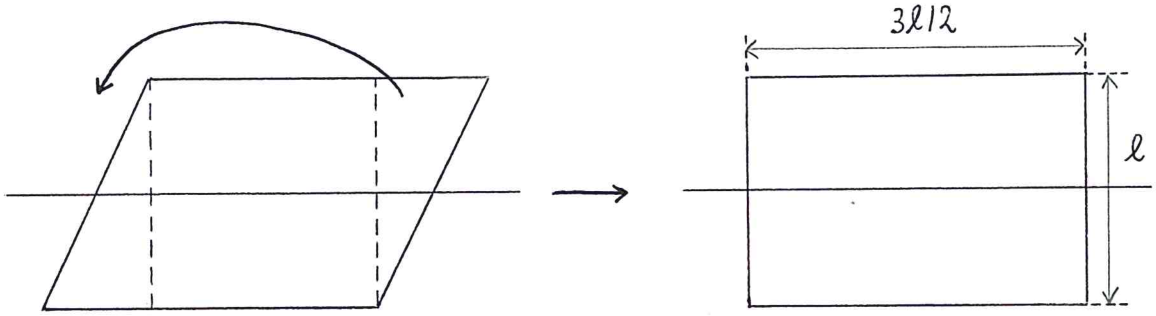
Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa x di P_1, l'ordinata y di P_2 e l'angolo θ tra il segmento OP_3 e l'asse Ox,

i) trovare le configurazioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità;

ii) scrivere l'equazione secolare per calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno all'unica configurazione di equilibrio stabile.

ES. 1

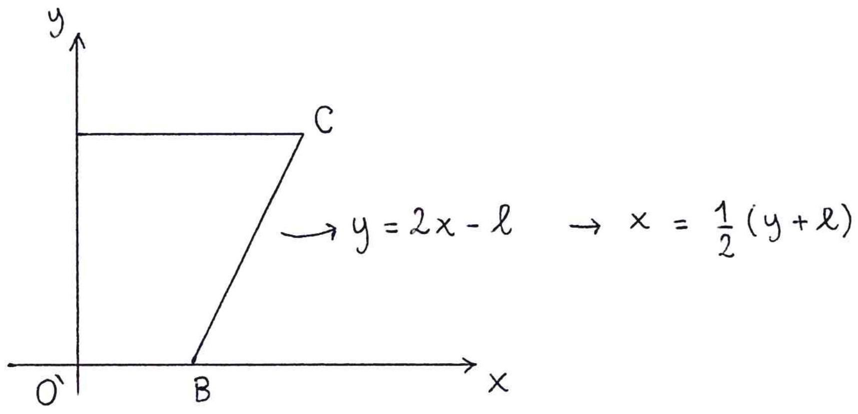
i) Momento d'inerzia rispetto all'asse Ox.



$$I_{Ox} = \sigma \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{0}^{3\ell/2} y^2 \, dx\, dy = \frac{\cancel{3}\ell\sigma}{2} \, \frac{1}{\cancel{3}} \left(\frac{\ell^3}{8} + \frac{\ell^3}{8} \right) = \underline{\frac{m\ell^2}{12}} \, , \qquad \sigma = \frac{2m}{3\ell^2}$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse Oy.

Calcolo il momento d'inerzia del corpo che corrisponde a metà parallelogramma



$$\tilde{I}_{Oy} = \sigma \int_{0}^{\ell} \int_{0}^{\frac{1}{2}(y+\ell)} x^2 \, dx\, dy = \frac{\sigma}{3} \int_{0}^{\ell} \frac{1}{8} \left(y^3 + \ell^3 + 3y^2\ell + 3y\ell^2 \right) dy =$$

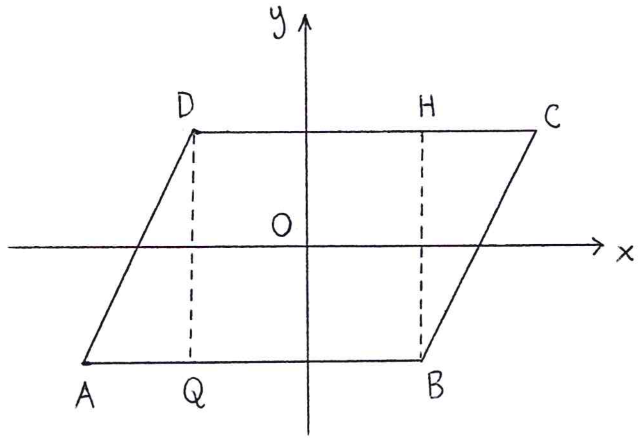
$$\frac{\sigma}{24} \left(\frac{1}{4}\ell^4 + \ell^4 + \ell^4 + \frac{3}{2}\ell^4 \right) = \frac{\sigma}{24} \, \frac{15}{4} \ell^4 = \frac{5}{48} m\ell^2$$

$$I_{Oy} = 2\,\tilde{I}_{Oy} = \underline{\frac{5}{24} m\ell^2}$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse Oz

$$I_{Oz} = I_{Ox} + I_{Oy} = \left(\frac{1}{12} + \frac{5}{24}\right) m\ell^2 = \underline{\frac{7}{24} m\ell^2}$$

ii)



Ci sono diversi modi per rispondere a questa domanda.

Notiamo che

$$I_{xy}^{QBHD} = 0 ;$$

inoltre applicando ai punti del triangolo BHC la mappa $(x,y) \to (-x,-y)$ otteniamo i punti del triangolo AQD, segue che

$$I_{xy}^{BHC} = I_{xy}^{AQD} \neq 0 .$$

e questi due momenti sono evidentemente diversi da zero.

ES. 2

i) Equazioni pure del sistema + ii) Reazione in P

2ª equazione cardinale dell'asta rispetto a G

$$\vec{x}_G = s\,\hat{e}_1 + R\,\hat{e}_2 \quad , \quad \vec{x}_A = (s - \ell\cos\theta)\,\hat{e}_1 + (R - \ell\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{e}_2$$

$$\vec{M}_G^{(a)} = \frac{m(2\ell)^2}{12}\dot{\theta}\,\hat{e}_3 = \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}\,\hat{e}_3 \quad , \quad \dot{\vec{M}}_G^{(a)} = \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta}\,\hat{e}_3$$

$$\vec{F}_{el} = -k\,\vec{x}_A = -k\left[(s - \ell\cos\theta)\,\hat{e}_1 + (R - \ell\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{e}_2\right]$$

$$(\vec{x}_A - \vec{x}_G) \times \vec{F}_{el} = k\ell\,(R\cos\theta - s\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{e}_3$$

$$\vec{N}_G^{(a)} = \ell\left[(2F + kR)\cos\theta - ks\,\mathrm{sen}\,\theta\right]\hat{e}_3$$

$$\underline{\frac{m\ell}{3}\ddot{\theta} = (2F + kR)\cos\theta - ks\,\mathrm{sen}\,\theta}$$ (1ª equazione pura del moto)

2ª equazione cardinale del disco rispetto a G

$$\vec{M}_G^{(d)} = \frac{MR^2}{2}\left(-\frac{\dot{s}}{R}\right)\hat{e}_3 = -\frac{MR}{2}\dot{s}\,\hat{e}_3 \quad , \quad \dot{\vec{M}}_G^{(d)} = -\frac{MR}{2}\ddot{s}\,\hat{e}_3$$

$$\vec{N}_G^{(d)} = \Phi_{P,x}\,R\,\hat{e}_3$$

$$\underline{\Phi_{P,x} = -\frac{M}{2}\ddot{s}}$$

1ª equazione cardinale dell'intero sistema

$$(m+M)\ddot{s}\,\hat{e}_1 = -(m+M)g\,\hat{e}_2 + \Phi_{P,x}\,\hat{e}_1 + \Phi_{P,y}\,\hat{e}_2 + \vec{F}_{el}$$

$$\begin{array}{ll} \hat{e}_1: & \left\{\begin{array}{l} (m+M)\ddot{s} = \Phi_{P,x} - k(s - \ell\cos\theta) \\ 0 = -(m+M)g + \Phi_{P,y} - k(R - \ell\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{array}\right. \\ \hat{e}_2: & \end{array}$$

dalla seconda si ha

$$\underline{\Phi_{P,y} = (m+M)\,g + k\,(R - \ell \operatorname{sen}\theta)}$$

e sostituendo nella prima l'espressione di $\Phi_{P,x}$ si ha la 2ª equazione pura del moto

$$\underline{\left(m + \frac{3}{2}M\right)\ddot{s} = k\,(\ell\cos\theta - s)}$$

ES. 3

i) Configurazioni di equilibrio e loro stabilità

$X_1 = (x,0)^T \qquad X_2 = (0,y)^T \qquad X_3 = R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)^T$

$$V(x,y,\theta) = mgy + mgR\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}k\left[R^2\cos^2\theta + (R\operatorname{sen}\theta - y)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{2}k\left[(R\cos\theta - x)^2 + R^2\operatorname{sen}^2\theta\right]$$

$$= mgy + mgR\operatorname{sen}\theta + \frac{k}{2}(R^2 + y^2 - 2Ry\operatorname{sen}\theta) +$$

$$\frac{k}{2}(R^2 + x^2 - 2Rx\cos\theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k(x - R\cos\theta) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \overbrace{mg}^{=kR} + k(y - R\operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \overbrace{mg}^{=kR}R\cos\theta - kRy\cos\theta + kRx\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$x = R\cos\theta \qquad y = R(\operatorname{sen}\theta - 1)$$

$$kR^2\cos\theta - kR^2(\cancel{\operatorname{sen}\theta} - 1)\cos\theta + kR^2\cancel{\cos\theta\operatorname{sen}\theta} = 0$$

$$2kR^2\cos\theta = 0$$

$$\begin{cases} \underline{\theta^{(1)} = \frac{\pi}{2},\ x^{(1)} = 0,\ y^{(1)} = 0} \\ \underline{\theta^{(2)} = \frac{3\pi}{2},\ x^{(2)} = 0,\ y^{(2)} = -2R} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x} = kR\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = k \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial y} = -kR\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} = kR\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \theta} = -kR\cos\theta \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = -kR^2\operatorname{sen}\theta + kRy\operatorname{sen}\theta$$

$$+ kRx\cos\theta$$

$$V''\left(0,0,\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} k & 0 & kR \\ 0 & k & 0 \\ kR & 0 & -kR^2 \end{pmatrix}, \qquad \det V''\left(\tfrac{\pi}{2},0,0\right) = k(-k^2R^2) + kR(-k^2R) = -2k^3R^2 < 0$$

<u>la c. di e. è instabile</u>

$$V''\left(0,-2R,\tfrac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} k & 0 & -kR \\ 0 & k & 0 \\ -kR & 0 & 3kR^2 \end{pmatrix}, \qquad \det V''\left(\tfrac{3\pi}{2},0,-2R\right) =$$

$$k(3k^2R^2) - kR(k^2R) =$$

$$2k^3R^2 > 0$$

<u>la c. di e. è stabile</u>

ii) Equazione secolare

$$\det\left(V''\left(0,-2R,\tfrac{3\pi}{2}\right) - \lambda A\right) = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} k-\lambda m & 0 & -kR \\ 0 & k-\lambda m & 0 \\ -kR & 0 & 3kR^2-\lambda mR^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underline{(k-\lambda m)\left[(k-\lambda m)(3kR^2-\lambda mR^2) - k^2R^2\right] = 0}$$

$$\underline{\lambda_1 = \frac{k}{m}}$$

$$\lambda^2 m^2 - 4mk\lambda + 2k^2 = 0, \qquad \underline{\lambda_{2,3} = \frac{k}{m}(2 \pm \sqrt{2})}$$