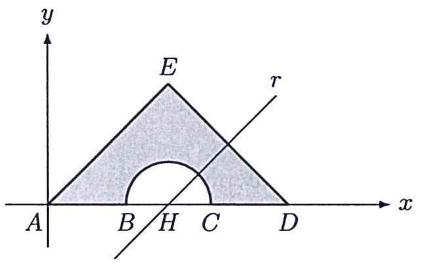
Compito di Meccanica Razionale
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
18 Luglio 2022

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri la lamina omogenea $ABCDE$ di massa m definita come segue: dal triangolo rettangolo ADE, con $\overline{AE} = \overline{DE} = 2\ell$, viene rimossa la regione corrispondente ad un semicerchio di raggio $\ell/2$ con centro nel punto medio H del segmento AD (si veda la figura).



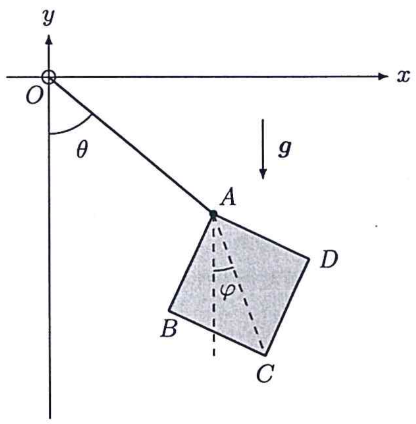
i) Calcolare i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi Ax, Ay in funzione di m, ℓ.

ii) Introdotto l'asse r passante per H ed il punto medio del segmento ED, dire se l'asse r è principale di inerzia e calcolare il momento di inerzia corrispondente.

Secondo Esercizio

In un piano verticale si fissi un riferimento Oxy e si consideri il sistema meccanico formato da un'asta OA omogenea di massa m lunga 2ℓ e da una lamina quadrata $ABCD$ omogenea di massa M e di lato ℓ. L'estremo O dell'asta è vincolato all'origine degli assi da una coppia rotoidale fissa. Il vertice A della lamina è vincolato all'estremo A dell'asta tramite una coppia rotoidale mobile.

Usando come parametri lagrangiani gli angoli θ e φ formati rispettivamente dall'asta e dal segmento AC con l'asse verticale (si veda la figura), scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.



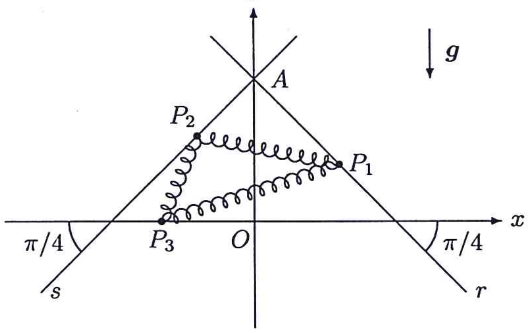
Terzo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri il sistema meccanico formato da tre punti materiali P_1, P_2, P_3 aventi la stessa massa m. I punti P_1, P_2 possono scivolare lungo le guide rettilinee r, s, rispettivamente, inclinate di $\pi/4$ rispetto all'asse Ox e passanti per il punto $A \equiv (0, \ell)$ (si veda la figura). Il punto P_3 può scivolare lungo l'asse Ox. Ciascun punto è collegato agli altri due da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.

Usando come parametri lagrangiani le coordinate x_1, x_2, x_3 di P_1, P_2, P_3 relative all'asse Ox,

i) mostrare che esiste un'unica configurazione di equilibrio e che essa è stabile;

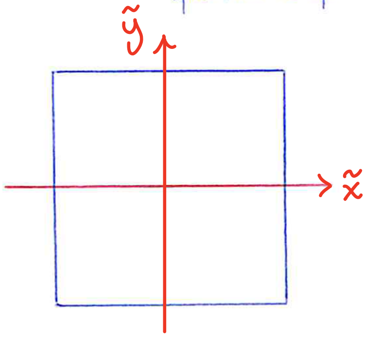
ii) calcolare le frequenze proprie ed i modi normali di oscillazione attorno alla configurazione di equilibrio stabile trovata.



ESERCIZIO 1

i) Considero la lamina di densità σ definita dal triangolo ADE

$I_{Ax}^{ADE} = \frac{1}{2} I_q$ con I_q momento di inerzia di una lamina quadrata omogenea di densità σ e lato 2ℓ rispetto ad un qualunque asse passante per il suo baricentro e che giace sul piano della lamina



$$\sigma \int_{-\ell}^{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{y}^2 \, dx \, dy = \sigma (2\ell) \frac{1}{3} \tilde{y}^3 \Big|_{-\ell}^{\ell} =$$

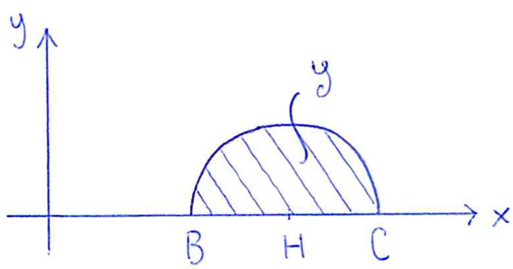
$$\frac{4}{3} \sigma \ell^4$$

$$I_{Ax}^{ADE} = \frac{2}{3} \sigma \ell^4$$

$$I_{Ay}^{ADE} = I_{Ax}^{ADE} + m^{ADE} (\ell\sqrt{2})^2 \qquad \text{con} \qquad m^{ADE} = \sigma 2 \ell^2$$

$$I_{Ay}^{ADE} = \frac{14}{3} \sigma \ell^4$$

Considero la lamina di densità σ definita dal semicerchio con centro in H e raggio $\frac{\ell}{2}$



$$I_{Ax}^{y} = \frac{\sigma}{2} \int_0^{\ell/2} \int_0^{\pi} \rho^3 \, d\rho \, d\theta = \frac{\pi \sigma \ell^4}{128}$$

$$I_{Ay}^{y} = I_{Ax}^{y} + m^{y} (\ell\sqrt{2})^2 \qquad \text{con} \qquad m^{y} = \sigma \frac{\pi \ell^2}{8}$$

$$I^{\mathcal{Y}}_{Ay} = \frac{\pi\, 33}{128}\,\sigma \ell^4$$

Allora

$$I_{Ax} = I^{ADE}_{Ax} - I^{\mathcal{Y}}_{Ax} = \underline{\underline{\sigma \ell^4 \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{128}\right)}}$$

$$\text{con} \quad \sigma = \frac{m}{\frac{4\ell^2}{2} - \frac{\pi}{2}\frac{\ell^2}{4}} = \frac{8m}{\ell^2(16-\pi)}$$

$$I_{Ay} = I^{ADE}_{Ay} - I^{\mathcal{Y}}_{Ay} = \underline{\underline{\sigma \ell^4 \left(\frac{14}{3} - \frac{33\pi}{128}\right)}}$$

ii) Si può mostrare attraverso le simmetrie che gli assi Hx e Hy sono principali di inerzia. Inoltre $I_{Hx} = I_{Hy}$. Segue che l'asse r è principale di inerzia e

$$I_r = I_{Ax}.$$

ESERCIZIO 2

Energia cinetica asta

$$T^{(a)} = \frac{1}{2} I^{(a)}_{Oz} \|\vec{w}^{(a)}\|^2 = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 \qquad \left(I^{(a)}_{Oz} = \frac{4}{3} m l^2 , \quad \vec{w}^{(a)} = \dot{\theta}\, \hat{e}_3 \right)$$

Energia cinetica lamina

$$T^{(l)} = \frac{1}{2} M \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} I^{(l)}_{Gz} \|\vec{w}^{(l)}\|^2$$

G è il baricentro della lamina

$$G - O = \left(2l \operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} l \operatorname{sen}\varphi \right) \hat{e}_1 - \left(2l \cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} l \cos\varphi \right) \hat{e}_2$$

$$\|\vec{v}_G\|^2 = 4 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + 2\sqrt{2}\, l^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi),$$

$$I^{(l)}_{Gz} = \frac{M l^2}{6}, \qquad \vec{w}^{(l)} = \dot{\varphi}\, \hat{e}_3$$

$$T^{(l)} = M l^2 \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{3} + 2\dot{\theta}^2 + \sqrt{2}\, \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) \right)$$

Energia potenziale

$$V = - m g l \cos\theta - M g l \left(2\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\varphi \right)$$

Lagrangiana

$$L = T - V = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 + M l^2 \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{3} + 2\dot{\theta}^2 + \sqrt{2}\, \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) \right) +$$

$$m g l \cos\theta + M g l \left(2\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\varphi \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4 m l^2}{3} \dot{\theta} + 4 M l^2 \dot{\theta} + \sqrt{2} M l^2 \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 4\ell^2\left(\frac{m}{3}+M\right)\ddot\theta + \sqrt{2}\,M\ell^2\ddot\varphi\cos(\theta-\varphi) - \sqrt{2}\,M\ell^2(\dot\theta-\dot\varphi)\dot\varphi\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{2M\ell^2}{3}\dot\varphi + \sqrt{2}\,M\ell^2\dot\theta\cos(\theta-\varphi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{2M\ell^2}{3}\ddot\varphi + \sqrt{2}\,M\ell^2\ddot\theta\cos(\theta-\varphi) - \sqrt{2}\,M\ell^2(\dot\theta-\dot\varphi)\dot\theta\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\sqrt{2}\,M\ell^2\dot\theta\dot\varphi\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi) - (m+2M)g\ell\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \sqrt{2}\,M\ell^2\dot\theta\dot\varphi\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi) - \frac{\sqrt{2}}{2}Mg\ell\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

Equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} 4\ell\left(\frac{m}{3}+M\right)\ddot\theta + \sqrt{2}\,M\ell\ddot\varphi\cos(\theta-\varphi) + \sqrt{2}\,M\ell\,\dot\varphi^2\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi) = -(m+2M)g\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \\ \frac{2M\ell}{3}\ddot\varphi + \sqrt{2}\,M\ell\ddot\theta\cos(\theta-\varphi) - \sqrt{2}\,M\ell\,\dot\theta^2\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}Mg\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

ESERCIZIO 3

i) Equazione della retta r : $\quad y = -x + \ell$

Equazione della retta s : $\quad y = x + \ell$

$$V(x_1, x_2, x_3) = mg\,y_1 + mg\,y_2 + \frac{1}{2}k\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{2}k\left[(x_2 - x_3)^2 + y_2^2\right] + \frac{1}{2}k\left[(x_1 - x_3)^2 + y_1\right]$$

dopo aver sostituito $y_1 = -x_1 + \ell$, $y_2 = x_2 + \ell$ si ha

$$V(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(mg + k\ell) + k\left(2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_3(x_1 + x_2)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} = -mg - k\ell + 4kx_1 - kx_3 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial x_2} = mg + k\ell + 4kx_2 - kx_3 = 0 \end{array}\right\}$$

le sommo: $\quad 4k(x_1 + x_2) - 2kx_3 = 0$

$$x_3 = 2(x_1 + x_2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = 2kx_3 - k(x_1 + x_2) = 0$$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

allora deve essere $x_1 = -x_2$, $x_3 = 0$

L'unica configurazione di equilibrio è $\quad (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \left(\dfrac{mg + 2k\ell}{4k}, -\dfrac{mg + 2k\ell}{4k}, 0\right)$

Si ha

$$V'' = \begin{pmatrix} 4k & 0 & -k \\ 0 & 4k & -k \\ -k & -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4k > 0 \\ 16k^2 > 0 \\ 4k(8k^2 - k^2) - k(4k^2) = 24k^3 > 0 \end{array}\right\}$$

Per il criterio di Sylvester V'' è definita positiva.
Per il teorema di Lagrange - Dirichlet $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è stabile.

ii) Matrice cinetica

$$T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + (\dot{x}_3^2) \right] = \frac{m}{2} (2\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\det(V'' - \lambda A) = \det \begin{pmatrix} 4k - 2\lambda m & 0 & -k \\ 0 & 4k - 2\lambda m & -k \\ -k & -k & 2k - \lambda m \end{pmatrix} =$$

$$2(2k - \lambda m)(k - \lambda m)(3k - \lambda m) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{k}{m}, \quad \lambda_2 = \frac{2k}{m}, \quad \lambda_3 = \frac{3k}{m}$$

frequenze proprie $\underline{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$, $\underline{\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$, $\underline{\omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}}$.

Modi normali

$$\lambda_1 : \begin{pmatrix} 2k & 0 & -k \\ 0 & 2k & -k \\ -k & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{(u_1, v_1, w_1) = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 1, 2)}$$

$$\lambda_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & -k \\ -k & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{(u_2, v_2, w_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1, -1, 0)}$$

$$\lambda_3 : \begin{pmatrix} -2k & 0 & -k \\ 0 & -2k & -k \\ -k & -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{(u_3, v_3, w_3) = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 1, -2)}$$