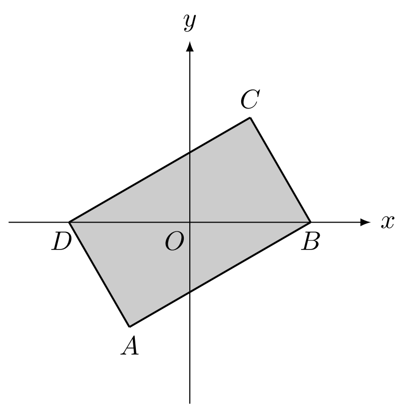
Compito di Meccanica Razionale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

12 settembre 2022

Primo Esercizio

Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$. Sul piano Oxy si consideri una lamina rettangolare $ABCD$ omogenea di massa m e lati ℓ, $\sqrt{3}\,\ell$. L'origine O coincide con il baricentro della lamina ed i punti B, D giacciono sull'asse Ox (vedi figura).

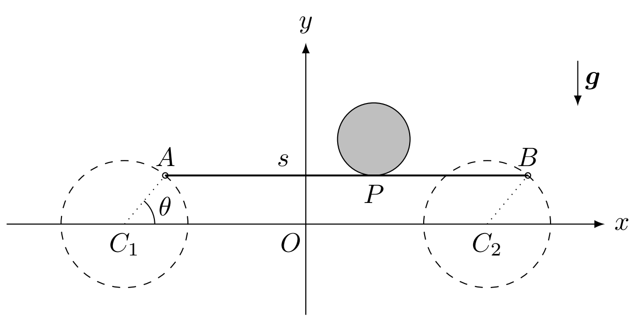


i) Calcolare i momenti di inerzia della lamina rispetto agli assi Ox, Oy.

ii) Determinare una terna di assi principali di inerzia per la lamina con polo in O, motivando la risposta.

Secondo Esercizio

Nel piano verticale Oxy si consideri il sistema meccanico formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R che rotola senza strisciare su un'asta AB omogenea di massa m e lunghezza $2\,\ell$. Gli estremi A, B dell'asta sono vinvolati a scivolare su due guide circolari di raggio r e centro in $C_1 \equiv (-\ell, 0)$, $C_2 \equiv (\ell, 0)$, rispettivamente, in modo che l'asta resti sempre parallela all'asse Ox (vedi figura). Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g.



Indichiamo con P il punto di contatto tra il disco e l'asta. Usando come coordinate lagrangiane l'ascissa s del punto P misurata da A lungo l'asta e l'angolo θ formato dal segmento AC_1 con l'asse Ox,

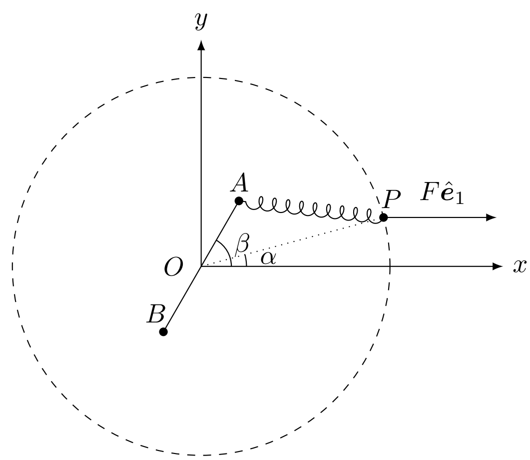
i) scrivere le equazioni (pure) del moto del sistema;

ii) determinare la reazione vincolare che l'asta esercita sul disco in P;

iii) scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica del disco rispetto al polo P.

Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si introduca un sistema di riferimento Oxy. Si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali A, B di uguale massa m vincolati a mantenere la stessa distanza tramite un'asta di massa trascurabile e lunghezza $2r$. Il punto di mezzo dell'asta è incernierato nell'origine O in modo che l'asta possa ruotare senza attrito. Fa parte del sistema anche un punto materiale P di massa M, che può muoversi senza attrito su una guida circolare di raggio R ($R > r$) centrata in O. Sul punto P agisce una forza costante $F\hat{\boldsymbol{e}}_1$, $F > 0$, dove $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ è il versore dell'asse Ox. Inoltre il punto A è collegato al punto P da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (vedi figura).

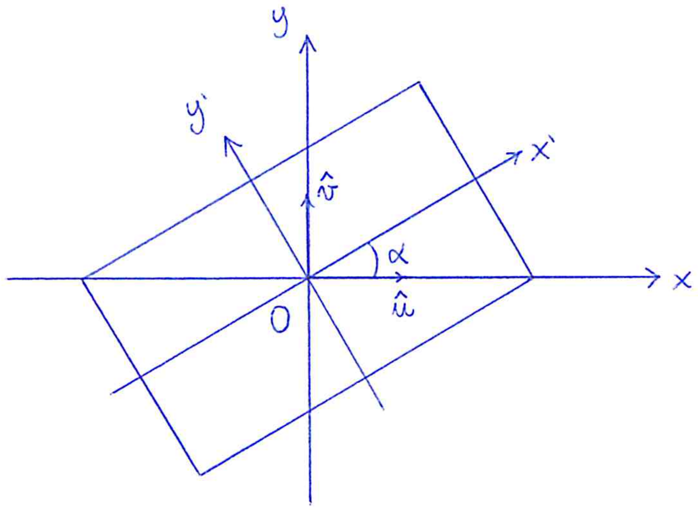


Usando come coordinate lagrangiane gli angoli α e β, che OP e OA formano rispettivamente con l'asse Ox,

i) calcolare le configurazioni di equilibrio e determinarne la stabilità;

ii) calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno all'unica configurazione di equilibrio stabile.

ESERCIZIO 1



Sia σ la densità della lamina. Si ha $\sigma = \dfrac{m}{\sqrt{3}\,\ell^2}$

i) Introduciamo l'asse Ox' parallelo ai lati AB, CD e l'asse Oy' parallelo ai lati BC, AD.

$$I_{Ox'} = \int_{-\sqrt{3}\ell/2}^{\sqrt{3}\ell/2}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sigma (y')^2\, dx'\, dy' = \frac{\sigma\sqrt{3}\ell}{3}\frac{\ell^3}{8}2 = \frac{m\sqrt{3}\ell}{3\sqrt{3}\ell^2}\frac{\ell^3}{4} = \frac{m\ell^2}{12}$$

$$I_{Oy'} = \int_{-\sqrt{3}\ell/2}^{\sqrt{3}\ell/2}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sigma (x')^2\, dx'\, dy' = \frac{\sigma\ell}{3}(x')^3\Big|_{-\sqrt{3}\ell/2}^{\sqrt{3}\ell/2} = \frac{\sigma\ell}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\ell^3\,2\right) =$$

$$\frac{m\ell}{\sqrt{3}\ell^2}\frac{\sqrt{3}\ell^3}{4} = \frac{m\ell^2}{4}$$

Siano $\hat{u}$ e $\hat{v}$ i versori associati agli assi Ox, Oy, rispettivamente. Notando che $\overline{OB} = \overline{OC} = \ell$ e dalla definizione di Ox' si può dire che $\alpha = \pi/6$. Allora

$$\hat{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T, \qquad \hat{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)^T$$

$$I_{Ox} = \frac{m\ell^2}{12}\,\hat{u}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\hat{u} = \frac{m\ell^2}{8}$$

$$I_{Oy} = \frac{m\ell^2}{12}\,\hat{v}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\hat{v} = \frac{5}{24}\,m\ell^2.$$

ii) Il piano perpendicolare al piano Oxy e passante per Ox' è un piano di simmetria per riflessione. Segue che Oy' è principale.

Il piano Oxy è di simmetria per riflessione. Segue che Oz (asse passante per O e perpendicolare ad Ox e Oy) è principale.

Dunque anche Ox' è un asse principale di inerzia.

ESERCIZIO 2

i) Siano $G^{(d)}$, $G^{(a)}$ i baricentri del disco e dell'asta.

$$\vec{X}_{G^{(a)}} = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, 0)^T \rightarrow \vec{v}_{G^{(a)}} = r\dot{\theta}(-\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta, 0)^T$$

$$\vec{X}_{G^{(d)}} = (r\cos\theta + s - \ell, r\,\mathrm{sen}\,\theta + R, 0)^T \rightarrow$$

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = (-r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{s}, r\dot{\theta}\cos\theta, 0)^T$$

Energia potenziale

$$V = mgr\,\mathrm{sen}\,\theta + Mg(r\,\mathrm{sen}\,\theta + R)$$

Energia cinetica asta

$$T^{(a)} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

Velocità angolare disco

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{X}_{G^{(d)}} - \vec{X}_P), \quad \vec{X}_{G^{(d)}} - \vec{X}_P = (0, R, 0)^T,$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{G^{(a)}}, \quad \vec{\omega} = (0, 0, \omega)^T$$

$$-r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{s} = -r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - \omega R \longrightarrow \omega = -\frac{\dot{s}}{R}$$

$$\vec{v}_{G^{(d)}} = (-r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{s}, r\dot{\theta}\cos\theta, 0)^T$$

Energia cinetica disco

$$T^{(d)} = \frac{1}{2}M(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2 - 2r\dot{\theta}\dot{s}\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{2}\frac{M\cancel{R^2}}{2}\frac{\dot{s}^2}{\cancel{R^2}}$$

$$= \frac{1}{2}M\left(r^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\dot{s}^2 - 2r\dot{\theta}\dot{s}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

Funzione lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\left(r^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\dot{s}^2 - 2r\dot{\theta}\dot{s}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

$$-mgr\,\mathrm{sen}\,\theta \;-\; Mg\,(r\,\mathrm{sen}\,\theta + R)$$

Equazioni pure del moto:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta + Mr^2\dot\theta - Mr\dot s\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = mr^2\ddot\theta + Mr^2\ddot\theta - Mr\ddot s\,\mathrm{sen}\,\theta - Mr\dot s\,\dot\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -Mr\dot\theta\dot s\cos\theta - mgr\cos\theta - Mgr\cos\theta$$

$$\underline{r^2(m+M)\ddot\theta - Mr\ddot s\,\mathrm{sen}\,\theta = -gr\cos\theta\,(m+M)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot s} = \frac{3}{2}M\dot s - Mr\dot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot s}\right) = \frac{3}{2}M\ddot s - Mr\ddot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - Mr\dot\theta^2\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

$$\underline{\frac{3}{2}\ddot s - r\ddot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - r\dot\theta^2\cos\theta = 0}$$

ii) Accelerazione del baricentro del disco

$$\vec a_{G^{(d)}} = (-r\ddot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - r\dot\theta^2\cos\theta + \ddot s,\; r\ddot\theta\cos\theta - r\dot\theta^2\,\mathrm{sen}\,\theta,\; 0)^T$$

1° eq. cardinale proiettata lungo Ox e Oy

$$\begin{cases} \Phi_{P,x} = (-r\ddot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - r\dot\theta^2\cos\theta + \ddot s)\,M \\ \Phi_{P,y} = (r\ddot\theta\cos\theta - r\dot\theta^2\,\mathrm{sen}\,\theta)\,M + Mg \end{cases}$$

iii) $$\dot{\vec M}_P = \vec N_P - M\vec v_P \times \vec v_{G^{(d)}}$$

$$\vec N_P = \vec 0$$

$\vec{v}_P$ è la velocità di P come punto di contatto tra il disco e l'asta, è dunque diversa dalla velocità $\vec{v}_P$ introdotta in precedenza

$$\vec{X}_P = (-\ell + r\cos\theta + s,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0)^T \longrightarrow \vec{v}_P = (-r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{s},\ r\dot{\theta}\cos\theta,\ 0)^T$$

$$\vec{v}_P \times \vec{v}_{G^{(d)}} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_P = \vec{M}_{G^{(d)}} + M(\vec{X}_{G^{(d)}} - \vec{X}_P) \times \vec{v}_{G^{(d)}}$$

$$= \left(0,\ 0,\ \frac{MR^2}{2}\left(-\frac{\dot{s}}{R}\right) - MR(-r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{s})\right)^T = \left(0,\ 0,\ MR\left(r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{3}{2}\dot{s}\right)\right)^T$$

$$\dot{\vec{M}}_P = \left(0,\ 0,\ MR\left(r\dot{\theta}^2\cos\theta + r\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{3}{2}\ddot{s}\right)\right)^T$$

2ª equazione cardinale del disco

$$\underline{r\dot{\theta}^2\cos\theta + r\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{3}{2}\ddot{s} = 0}$$

Es. 3

Coordinate dei punti materiali

$$A \equiv r\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix} \qquad B \equiv -r\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix} \qquad P \equiv R\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2}k\,|A-P|^2 - F\,(P-O)\cdot\hat{e}_1$$

$$= -k r R\cos(\alpha-\beta) - FR\cos\alpha$$

Equilibri $\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial\alpha} = krR\sin(\alpha-\beta) + FR\sin\alpha = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial\beta} = -krR\sin(\alpha-\beta) = 0 \end{cases}$

Sommando le due equazioni si ottiene $\sin\alpha = 0$, cioè $\alpha = 0, \pi$

Sostituendo nella seconda equazione si ottiene $\sin\beta = 0$, cioè $\beta = 0, \pi$

Le configurazioni di equilibrio sono quindi

$$(\alpha,\beta) = (0,0),\ (0,\pi),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi)$$

Per studiare la loro stabilità calcolo la matrice hessiana di V:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} = krR\cos(\alpha-\beta) + FR\cos\alpha$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\partial\beta} = -krR\cos(\alpha-\beta)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2} = krR\cos(\alpha-\beta)$$

$$V''(0,0) = R\begin{bmatrix}(kr+F) & -kr\\ -kr & kr\end{bmatrix}$$

$\det V''(0,0) = RFkr > 0$

$\mathrm{tr}\, V''(0,0) > 0$

$(\alpha,\beta) = (0,0)$ è STABILE per il teor. di Lagrange-Dirichlet

Es. 3

$$V''(0,\pi) = R\begin{bmatrix} (-kr+F) & kr \\ kr & -kr \end{bmatrix}$$

$\det V''(0,\pi) = -RFkr < 0$

$(\alpha,\beta)=(0,\pi)$ è INSTABILE perché $V''(0,\pi)$ ha un autovalore <0.

$$V''(\pi,0) = R\begin{bmatrix} -(kr+F) & kr \\ kr & -kr \end{bmatrix}$$

$\det V''(\pi,0) = RFkr > 0$

$\mathrm{Tr}\, V''(\pi,0) < 0$

$(\alpha,\beta)=(\pi,0)$ è INSTABILE perché $V''(\pi,0)$ ha autovalori <0.

$$V''(\pi,\pi) = R\begin{bmatrix} (kr-F) & -kr \\ -kr & kr \end{bmatrix}$$

$\det V''(\pi,\pi) = -RFkr < 0$

$(\alpha,\beta)=(\pi,\pi)$ è INSTABILE perché $V''(\pi,\pi)$ ha un autovalore <0.

Studio le piccole oscillazioni attorno ad $(\alpha,\beta)=(0,0)$

energia cinetica $T = \frac{1}{2}m\left(|v_A|^2+|v_B|^2\right) + \frac{1}{2}M|v_P|^2$

$$= mr^2\dot\beta^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot\alpha^2$$

per cui la matrice cinetica è $A = \begin{bmatrix} MR^2 & 0 \\ 0 & 2mr^2 \end{bmatrix}$

equazione secolare: $\left|V''(0,0) - \lambda A\right| = 0$

$$\left|V''(0,0) - \lambda A\right| = \begin{vmatrix} R(kr+F)-\lambda MR^2 & -kRr \\ -kRr & kRr - \lambda 2mr^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{(2mMrR)}_{\xi}\lambda^2 - 2\underbrace{\left(mkr^2 + mrF + \frac{MkR^2}{2}\right)}_{\eta}\lambda + \underbrace{RkF}_{\zeta} = 0$$

ES. 3

$$\xi \lambda^2 - 2\eta\lambda + \zeta = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\cancel{2}\eta \pm \sqrt{\cancel{4}\eta^2 - \cancel{4}\xi\zeta}}{\cancel{2}\xi}$$

frequenze proprie $\omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}}$